<講 座>

計算 水理學의 基礎：水工 模型의 構成

李 吉 成*

本 講座는 英文으로 作成된 著者의 講義노트(理論水理學)에서 拔萃 要約된 것으로 그 國文翻譯을 담당한 이 상호氏에게 謝意를 표합니다.

〈기호〉 (Notation)

1절 (Basic Concepts and Principles) 기호

ρ : 밀도(mass density)
p : 압력(pressure)
V : 유속(velocity vector, $V=ui+vj+wk$)
μ : 粘性계수(dynamic viscosity)
g : 重力 가속도(gravitational acceleration)
Ci : 質量 농도(mass concentration)
j : 質量 束 벡타(mass flux vector)
f : 體力(body force)
Φ : dissipation function
D_i : mass diffusivity
c : 比勢(specific heat)
θ : 溫度(temperature)
k : thermal conductivity
K : thermal diffusivity
ϕ : velocity potential

2절 (Turbulent Flows) 기호

D_x, D_y, D_z : 亂流 擴散계수(turbulent diffusivity)
ν : 動粘性계수(kinematic viscosity)
ε : 渦動粘性계수(eddy viscosity)
σ : normal stress
τ : shear stress
S : stress tensor

3절 (Groundwater Hydraulics) 기호

θ : 含水比(water content)
Ψ : capillarity
K : hydraulic conductivity
k : intrinsic permeability
h : piezometric head
$D(\theta)$: soil moisture diffusivity
Sy : specific yield
ϕ : total potential

4절 (Coastal Hydraulicz) 기호

p_a : 대기압(atmospheric presure)
ϕ : 위도(latitude)
$H=(\eta+h)^*$: 全 水深
ω : 지구의 回轉 角速度(angular velocity of the earth)
C : Chézy 계수
Fx, Fy : 표면 응력(surface stress)
f : Coriolis parameter
h : depth to the bottom
η : elevation of the free surface
Bx, By : 저면 응력(bottom stress)
U, V : depth averaged yelocities
u_* : shear velocity
w_f : terminal fall velocity of the particles
k : von Kármán's constant

5절 (Openchannel Hydraulics) 기호

A : 단면적(cross-sectional area)
R : 動水半徑(hydraulic radius)
S_w : 水面의 경사(slope of water surface)
$Q=AV$: 流量(flow rate)
i : 유효 강우(rainfall excess)
$h\Leftarrow(\eta+h)$: 全 水深; 4절의 H에 해당
K : 通水能(conveyance)
τ_b : 평균 바닥 응력(mean bottom stress)
S_0 : 河床의 勾配

* 서울 大學校 土木工學科 助敎授 (工博)

q : 횡방향 유입량(lateral flow rate)
Zb : bottom elevation
S_f : fricition slope
$F_r = V/c$: Froude number
$J_{\pm}$: Riemann invariants
E : specific energy
P : wetted perimeter

1절 序論(Basic Concepts and Principles)

工學은 사람의 편의를 위하여 自然을 변형시키고 또한 인간 사회와 調和시키는 작업을 수행하여왔다. 그러한 과정을 실행하기 위해서는 자연계의 性質과 秩序를 量的·質的으로 파악하는 행위가 필요하며, 그로부터 자연에 대한 목적을 定量化, 定性化해야하는 것이다. 이를 위하여 우리는 자연계의 원리를 數學的으로 抽像化하는 것을 필요로 하며, 보다 구체적으로 말하면 이는 수공 모형을 구성하는 일이다. 일반적으로 물의 力學的, 運動學的, 定性的 상태는 常微分 方程式이나 偏微分 方程式으로 표시되며, 특히 편미분 방정식의 경우 解析的인 解가 없을 때가 우리의 주 관심 대상이 된다. 이 강좌는 미분 방정식으로 표시되는 수공 모형을 풀기 위한 기초 작업으로서 그 모형들을 기술하는 것이 목적이며 모형들에 대한 상세한 유도는 생략되었다.

(1) 여러가지 보존식(Conservation Equations)

임의의 검사 체적(control volume) 내의 物理的 變數가 갖는 값의 시간에 따른 변화율은 그 체적의 境界를 들고 나는 물리량의 순(net) 변화율과 그 물리량이 체적내에서 생겨나는 생성율의 합으로 표시된다는 보존 법칙에 따라 다음과 같은 식들이 성립된다. (유도 과정은 참고 문헌을 참조)

① 質量 보존식(conservation of mass)

$\partial p/\partial t + \nabla \cdot (\rho V) = 0$

혹은 $D\rho/Dt + \rho \nabla \cdot V = 0$

만일 非壓縮性 流體라면 $D\rho/Dt = 0$ 이므로 $\nabla \cdot V = 0$ 이 성립된다.

② 運動量 보존식(balance of momentum)

비압축성 유체의 경우

$\rho DV/Dt = \rho f - \nabla p + u \nabla^2 V$ 로 표시되며,

이는 Navier-Stokes 식이라고 불리운다. 또한 비점성 유체의 경우에는

$DV/Dt = -\nabla (p/\rho + gz)$

로 Euler의 운동식이라고 부른다. 비회전류의 경우에는 위의 Euler 식이 흐름 영역 全體에 걸쳐 積分되어 다음과 같은 Bernoulli 식이 된다.

$\partial \phi/\partial t + V \cdot V/2 + P/\rho + gz = $(상수).

③ 열 에너지 보존식(thermal energy equation)

역시 비압축성 유체의 경우에

$\rho c D\theta/Dt = \nabla \cdot (k \nabla \theta) + \Phi$ (C 는 비열)

로 표시되고 다시 비점성이라고 한다면

$D\theta/Dt = K \nabla^2 \theta$ 가 된다. (k 가 상수일 경우)

(2) 混合 物質의 보존식

다음에는 유체 媒質에 더해진 물질의 移動 현상에 대한 支配 方程式을 유도하고자 하며, 이는 水質의 문제나 sediment의 이동 현상과 연관된다.

① 물질의 均衡(material balance)

특정한 물질의 成分 i 에 대한 질량의 균형은 다음과 같이 기술된다.

[임의의 검사체적내에서 i 성분이 증가되는 순 변화율]=[{i 성분이 검사 표면(control surface)에 대하여 유입되는 순 변화율}+{검사 체적내의 化學 反應에 의한 생성율}]

위의 식을 표시하면,

$$d/dt \int_v C_i dv = -\int_s j \cdot n dA + \int_v r_i \, dv$$

여기서 C_i 는 질량 농도, j 는 質量 束 벡타이고 r_i 는 $r_i \equiv r(C_i) = dC_i/dt$ 로 정의된다. 이제 Gauss의 divergence 定理를 쓰면 아래와 같이 변형된다.

$$\int_v \{\partial C_i/\partial t + \nabla \cdot j_i - r_i\} dv = 0$$

Dubois—Reymond lemma에 의하여

$\partial C_i/\partial t = -\nabla \cdot j + r_i$ 가 된다.

② 質量 傳達(mass transport)

그러면 i 성분이 분자 확산과 매질의 운동에 의하여 이동하는 관계를 서술하자. 이에는 Fick의 법칙이 적용된다.

$$j_i = -D_i \nabla C_i + VC_i$$

즉 질량 속은 두가지 성분으로 구성되는데 하나는 농도 勾配(concentration gradient)에 의한 것이고 다른 하나는 유체와 함께 속도 V 를 가지고 움직이는 효과이다. 이 식을 물질 균형을 표시하는 식에 대입하면 다음과 같다.

$$\partial C_i/\partial t + \nabla \cdot (VC_i) \nabla \cdot [D_i \nabla C_i] + r(C_i)$$

여기서 비압축성 유체라는 조건과 D_i 가 상수라는 조건을 가정하면,

$$DC_i/\partial t \equiv \partial C_i/\partial t + V \cdot \nabla C_i = D_i \nabla^2 C_i + r(C_i) \text{이다.}$$

2절 亂流의 흐름(Turbulent Flows)

언급된 바와 같이 비압축성 유체의 경우 Navier—Stokes 식은

$$\rho[\partial V/\partial t+(V\cdot\nabla)V]=-\nabla(p+\rho gz)+\mu\nabla^2V$$

로 주어진다. 이 식의 x 성분만을 쓰면 다음과 같다.

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{\partial}{\partial x}(p/\rho+gz)+\nu\nabla^2V \quad\cdots\cdots(2\text{-}1)$$

(1) Reynolds 식

① Reynolds 응력

어떠한 물리량 A(t)가 시간에 대하여 매우 빨리 변동(fluctuation) 한다면 $\bar{A}=\frac{1}{T}\int_0^T A(t)dt$ 와 같이 일시적인 평균값(temporal mean)을 취할 수 있고 이때 $A=\bar{A}+A'(A'$: 變動量)으로 나타낼 수 있다. 이러한 概念이 유속 V 에 적용되면 $V=\bar{V}+V'$ 으로 나타내지고, 이를 식 (2-1)에 대입한 후 연속 방정식 $\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}+\frac{\partial\bar{w}}{\partial z}=0$ 을 사용하여 시간 평균을 취하면 다음과 같은 Reynolds 식을 얻게 된다.

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}+\frac{\partial(\bar{u}\bar{u})}{\partial x}+\frac{\partial(\bar{u}\bar{v})}{\partial y}+\frac{\partial(\bar{u}\bar{w})}{\partial z}=-\frac{\partial}{\partial x}(\bar{p}/\rho+gz)+\nu\nabla^2V-\frac{\partial}{\partial x}(\overline{u'u'})-\frac{\partial}{\partial y}(\overline{u'v'})-\frac{\partial}{\partial z}(\overline{u'w'}) \quad\cdots\cdots(2\text{-}2)$$

여기서 두 물리량의 積 $A\cdot B$ 의 평균값 $\overline{A\cdot B}$ 는 $(\bar{A}\cdot\bar{B}+\overline{A'B'})$이다. 윗 식의 이해를 위하여 線形 運動量 보존에 관한 Cauchy 의 미분 방정식을 소개하면

$$\rho DV/Dt=\rho f+\nabla\cdot S$$

이 식의 x 성분에 대하여 시간 평균을 취한 결과는,

$$\rho D\bar{u}/Dt=\rho f_x+\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_{xx}-\rho\overline{u'v'})+\frac{\partial}{\partial y}(\bar{\tau}_{xy}-\rho\overline{u'v'})+\frac{\partial}{\partial z}(\bar{\tau}_{xz}-\rho\overline{u'w'})\cdots\cdots(2\text{-}3)$$

으로 쓸 수 있다. (2-2)식을 (2-3)식과 비교하면 $\overline{u'u'}$ 등등의 變動 速度 項들은 外力으로 취급할 수 있다. 이 추가된 항들은 물리적으로 應力으로 분류될 수 있고 Reynolds 응력이라고 부른다. 이들은 보통 粘性에 의하여 야기되는 응력(Newtonian stresses)들보다 훨씬 크다고 알려져 있다.

② Boussinesq 相似(Boussinesq Analogy)

난류에서는 u', v', w', p' 의 네 개의 미지수가 새로 도입되었으며 이를 위하여 새로운 네 개의 식이 필요하다. 그런데 Reynolds 식에서는 p' 항이 나타나지 않으므로 3개의 식만이 필요하다. Boussinesq 는 粘性에 의한 응력과 亂流의 變動項에 의한 응력이 같은 거동을 한다고 가정하고 시간 평균 유속 $\bar{u},\bar{v},\bar{w}$ 과 Reynolds 응력을 연관시켰다. 하나의 성분에 대하여 이를 기술하면

$$\bar{\tau}_{xy}-\rho\,\overline{u'w'}=\mu\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}+\rho\varepsilon\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}=\rho(\nu+\varepsilon)\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}$$

이고 이때 ν 는 動粘性계수(kinematic viscosity), ε 은 渦動粘性계수(coeff. of eddy viscosity)이다. 실제의 경우에 $\varepsilon\gg\nu$ 이어서 $\tau_{xz}\equiv\bar{\tau}_{xz}-\rho\,\overline{u'w'}\approx\rho\varepsilon\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}$ 로 된다.

(2) 亂流 擴散(Turbulent Diffusion)

질량 전달식(mass transport equation)은 生成 消滅項이 없는 경우에 다음의 형태를 갖는다.

$$\partial c/\partial t+V\cdot\nabla c=D\nabla^2c,\quad D=\text{a scalar constant}$$

$c=\bar{c}+c'$, $V=\bar{V}+V'$ 을 위의 식에 대입하고 시간 평균을 취하면,

$$\partial\bar{c}/\partial t+\bar{V}\cdot\nabla\bar{c}+\nabla\cdot(\overline{V'c'})=D\nabla^2\bar{c}$$

로 변형되고 변동 항의 곱인 $\overline{V'c'}$ 을 처리하기 위하여 Reynolds 상사(Reynolds Analogy)식을 쓰면 다음과 같은 최종형태를 갖는다.

$$\partial\bar{c}/\partial t+\bar{V}\cdot\nabla\bar{c}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D_x\frac{\partial\bar{c}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(D_y\frac{\partial\bar{c}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(D_z\frac{\partial\bar{c}}{\partial z}\right)$$

이때 분자 확산에 기인하는 항인 $D\nabla^2\bar{c}$ 는 무시되었다. 그리고 난류 확산 계수 D_x, D_y, D_z 는 방향에 따라 서로 다른 값을 가질 수 있고 공간 좌표에 따라서도 변할 수 있다. 만일 난류의 성격이 균일(homogeneous)하고 등방성(isotropic)을 가진다면 위의 식은 질량 전달식과 동일한 형태를 가지며 다만 확산 계수만이 다른 값을 갖게된다.

3절 지하수 수리학(Groundwater Hydraulics)

(1) Darcy 의 法則

多孔質의 媒質(porous media)에 대한 흐름은 지금까지의 경우와는 상당히 다른 특성을 가지고 있다. 첫

째로 局部(local)가속도와 移流(convective)가 속도가 거의 0이 된다. 둘째로 매질의 間隙사이로 물이 흐르고 그 흐름은 공간에 대하여 불규칙성을 갖는다. 이러한 성격 때문에 Navier-Stokes식은

$$-\nabla(p+\rho gz)+\mu\nabla^2 V=0$$

으로 간단히 되고, 이전까지의 난류 논의에서는 시간평균을 고려한 반면 이제는 공간에 대한 평균을 생각하여야 의미를 가질 수 있다. : $q=\frac{1}{\mathrm{vol}}\int_{\mathrm{vol}} Vd(\mathrm{vol})$ 지하수의 흐름을 보다 간단히 하기 위하여 Darcy는 $\frac{1}{\mathrm{vol}}\int_{\mathrm{vol}}\mu\nabla^2 Vd(\mathrm{vol})=-\mu q/k$로 가정하였고 이로부터 다음의 관계식이 성립한다.

$$q=-k/\mu\nabla(\bar{p}+\rho gz)=-K\nabla(\bar{p}/\gamma+z)=-K\nabla h$$

여기서 h는 piezometric head이다.

(2) Boussinesq 식의 유도(under Dupuit's assumptions)

$\triangle x$, $\triangle y$의 길이와 h의 自由 水面을 가지는 물 기둥을 생각하자.

$$Q(x)=-KA\nabla h=K(h\triangle y)\partial h/\partial x \quad \cdots\cdots\cdots(3\text{-}1\text{ a})$$

$$Q(x+\triangle x)=Q(x)+\partial Q/\partial x\cdot\triangle x+\cdots\cdots$$
$$\approx(-Kh\triangle y\,\partial h/\partial x)$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}(-Kh\triangle y\,\partial h/\partial x)\triangle x \quad (3\text{-}1\text{ b})$$

이때 h는 평면 좌표의 함수로 $h(x,y)$로 생각될 수 있으며 Dupuit의 가정(hydraulic theory)에 의하여 piezometric head일 뿐만 아니라 자유 수면의 높이이기도 하다.

(3-1 a)에서 (3-1 b)를 빼고 순 유입량을 계산하면

$$\triangle x\triangle y\,\partial/\partial x[Kh\,\partial h/\partial x]\triangle t$$

이와 같은 과정으로 y 방향에 대하여도 $\triangle x\triangle y\,\partial/\partial y[Kh\,\partial h/\partial y]\triangle t$가 된다. Dupuit는 $\partial h/\partial z$가 무시될 수 있다고 가정하여 수직한 방향으로는 흐름이 없다고 보았다. 그러면 연속의 원리를 사용하여 [순 유입량]=[각수 내의 물의 변화량]이 성립되어야 한다. 그러므로

$$\triangle x\triangle y\,\partial/\partial x[Kh\,\partial h/\partial x]\triangle t+\triangle x\triangle y\,\partial/\partial y[Kh\,\partial h/\partial y]\triangle t=S_y(\triangle x\triangle y)[h(t+\triangle t)-h(t)]$$

이고 여기서 S_y는 자유 수면을 가진 대수층의 specific yield이다. 지하수 補充 强度 I [L/T]를 고려하면서 윗 식을 $\triangle x\triangle y\triangle t$로 나눈 다음 $\triangle t\to 0$로 하면 등방성(isotropic)의 帶水層에 대하여

$$\partial/\partial x[Kh\,\partial h/\partial x]+\partial/\partial y[Kh\,\partial h/\partial y]+\mathrm{I}=S_y\,\partial h/\partial t$$

이고 상수의 K값을 가진 균일한(homogeneous) 대수층을 생각하면

$$\partial/\partial x(h\,\partial h/\partial x)+\partial/\partial y(h\;\partial h/\partial y)\,\mathrm{I}+K)$$
$$=(S_y/K)\partial h/\partial t$$

로 되고 이것이 지하수에서의 Boussinesq식 (non-linear parabolic)이다.

(3) 不飽和 흐름(unsaturated flow)

유체가 매질의 간극에 포화되지 않은 경우 함수비는 $\theta=\mathrm{vol(water)/vol(total)}$로 정의되고 질량 보존식 $\partial\rho/\partial t+\nabla\cdot(\rho v)=0$에 의하여 변형되지 않는 매질에서

$$\partial(\rho\theta)\partial t+\nabla\cdot(\rho q)=0\text{ 가 된다.} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3\text{-}2)$$

지금까지 무시되었던 모세관 현상에 의한 Ψ효과를 고려하여 일반화된 Darcy의 法則을 나타내면 $\phi=z+\Psi$, $q=-K(\theta)\nabla\phi$가 된다. 이 관계를 (3-2)에 대입하면

$$\partial(\rho\theta)/\partial t=\nabla\cdot[\rho K(\theta)\nabla\phi]$$

비압축성인 경우(ρ=constant)

$$\partial\theta/\partial t=\partial/\partial x[K(\theta)\partial\Psi/\partial x]+\partial/\partial y[K(\theta)\partial\Psi/\partial y]$$
$$+\partial/\partial z[K(\theta)(1+\partial\Psi/\partial z)].$$

만일 모세관 현상에 의한 항 $\Psi=\Psi(\theta)$의 단순한 관계가 성립된다면

$$\partial\theta/\partial t=\partial/\partial x[K\,\partial\Psi/\partial\theta\cdot\partial\theta/\partial x]$$
$$+\partial/\partial y[K\,\partial\Psi/\partial\theta\cdot\partial\theta/\partial y]$$
$$+\partial K/\partial z+\partial/\partial z[K\,\partial\Psi/\partial\theta\cdot\partial\theta/\partial z]$$

그리고 soil moisture diffusivity를 $D(\theta)\triangleq K(\theta)\partial\Psi/\partial\theta$로 정의하면

$$\nabla\cdot[D(\theta)\nabla\theta]+\partial K(\theta)/\partial z=\partial\theta/\partial t \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3\text{-}3)$$

가 된다. 또한 연직한 방향으로의 1차원 침투만 일어난다고 생각하면

$$\partial\theta/\partial t=\partial/\partial z[D(\theta)\partial\theta/\partial z]$$
$$+(dK(\theta)/d\theta)\partial\theta/\partial z \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3\text{-}4)$$

위의 (3-4)식을 Richard식이라고 부른다. 그리고 중력에 의한 potential이 없고 x방향만으로의 흐름이라면

$$\partial\theta/\partial t=\partial/\partial x[D(\theta)\partial\theta/\partial x] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3\text{-}5)$$

가 된다. 식 (3-3), (3-4), (3-5) 등은 $K(\theta)$, $D(\theta)$가 모두 θ의 함수이므로 비선형식이고 해석적으로 풀기가 어렵다.

4절 해안 수리학(Coastal Hydraulics)

(1) Reynolds식의 單純化

① Reynolds식과 경계 조건

자유 수면을 가진 난류에서 유체가 비압축성이라고 한다면 연속 방정식은

$$\nabla\cdot\bar{V}\equiv\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}+\frac{\partial\bar{w}}{\partial z}=0$$

로 표시된다. 여기서 $\bar{u}$ 등은 시간 평균값을 말하고 유체의 밀도 ρ가 모두 같은 균일질이 아니더라도 성립된다. 운동량 보존에 대한 Reynolds식을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$x:\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}+\frac{\partial(\bar{u}\bar{u})}{\partial x}+\frac{\partial(\bar{u}\bar{v})}{\partial y}+\frac{\partial(\bar{u}\bar{w})}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}-\frac{\partial(\overline{u'u'})}{\partial x}-\frac{\partial(\overline{u'v'})}{\partial y}-\frac{\partial(\overline{u'w'})}{\partial z}+f\bar{v}$$

$$y:\frac{\partial\bar{v}}{\partial t}+\frac{\partial(\bar{u}\bar{v})}{\partial x}+\frac{\partial(\bar{v}\bar{v})}{\partial y}+\frac{\partial(\bar{v}\bar{w})}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{p}}{\partial y}-\frac{\partial(\overline{u'v'})}{\partial x}-\frac{\partial(\overline{v'v'})}{\partial y}-\frac{\partial(\overline{v'w'})}{\partial z}-f\bar{u}$$

$$z:\frac{\partial\bar{w}}{\partial t}+\frac{\partial(\bar{w}\bar{u})}{\partial x}+\frac{\partial(\bar{w}\bar{v})}{\partial y}+\frac{\partial(\bar{w}\bar{w})}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}-\frac{\partial(\overline{w'u'})}{\partial x}-\frac{\partial(\overline{w'v'})}{\partial y}-\frac{\partial(\overline{w'w'})}{\partial z}-g$$

위의 식에서 Coriolis parameter는 $f=zw\sin\phi$이고 Newton의 점성 응력에 의한 힘은 무시되었다. 그리고 2절에서 지적한 바와 같이 변동 속도에 의한 미지수들은 Boussinesq의 와동점성 계수나 Prandtl의 混合 거리 등의 도입으로 근사된다. 또한 기술된 것과 다른 물리량인 열 에너지나 용해된 물질에 대한 보존식도 이와 유사하게 기술될 수 있고 밀도 ρ가 이들 변수들과 독립이 아닐 경우 狀態 方程式(equation of ztate)을 도입하여야 한다. 그리고 解를 구성하는 경계 조건에는 다음과 같은 것들이 있다. 우선 자유 수면 $z=\eta(x,y;t)$에서 運動學的 경계 조건(kinematic BC)이 만족되어야 한다. 그리고 바닥 경계(fixed boundary)에서는 직각 방향의 유속 성분이 0이어야 하며 평면 경계(open boundary)에서는 해수면의 높이 $\eta(t)$나, 경계에 직각인 방향으로 유속이 주어져야 한다.

② 난류에 관한 가정과 단순화

$x-y$ 평면에서 등방성 난류임을 가정하면(isotropic turbulence) 변동항들은 다음과 같이 표시된다.

$$\overline{u'u'}=-\varepsilon_H\frac{\partial\bar{u}}{\partial x},\quad\overline{u'v'}=-\varepsilon_H\frac{\partial\bar{u}}{\partial y},$$

$$\overline{u'w'}=-\varepsilon_V\frac{\partial\bar{u}}{\partial z},\quad\cdots\cdots$$

ε_H는 상수로 취급될 수 있는 반면 ε_V는 z방향에 대하여 일정하다고 가정될 수 없다. 이러한 가정에 의하여 운동량 식을, $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$의 기호아래 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$x:\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}+\frac{\partial(\bar{u}\bar{u})}{\partial x}+\frac{\partial(\bar{u}\bar{v})}{\partial y}+\frac{\partial(\bar{u}\bar{w})}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}+\varepsilon_H\nabla^2\bar{u}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon_V\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\right)+f\bar{v}$$

$$y:\frac{\partial\bar{v}}{\partial t}+\frac{\partial(\bar{v}\bar{u})}{\partial x}+\frac{\partial(\bar{v}\bar{v})}{\partial y}+\frac{\partial(\bar{v}\bar{w})}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{p}}{\partial y}+\varepsilon_H\nabla^2\bar{v}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon_V\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}\right)-f\bar{u}$$

$$z:\frac{\partial\bar{w}}{\partial t}+\frac{\partial(\bar{w}\bar{u})}{\partial x}+\frac{\partial(\bar{w}\bar{v})}{\partial y}+\frac{\partial(\bar{w}\bar{w})}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}+\varepsilon_H\nabla^2\bar{w}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon_V\frac{\partial\bar{w}}{\partial z}\right)-g$$

평면 유속 성분의 z방향에 대한 변화를 나타내는 $\frac{\partial}{\partial z}$의 항들은 x, y 방향으로의 변화를 나타내는 ∇^2의 항들보다 중요하다. 또한 z방향의 유속과 가속도는 중력항에 비해 무시된다고 가정하면 운동량 식들은 다음과 같이 단순화된다.

$$x:\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}+\frac{\partial(\bar{u}\bar{u})}{\partial x}+\frac{\partial(\bar{u}\bar{v})}{\partial y}+\frac{\partial(\bar{u}\bar{w})}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}(\tau_{xz})+f\bar{v}$$

$$y:\frac{\partial\bar{v}}{\partial t}+\frac{\partial(\bar{v}\bar{u})}{\partial x}+\frac{\partial(\bar{v}\bar{v})}{\partial z}+\frac{\partial(\bar{v}\bar{w})}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{p}}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}(\tau_{yz})-f\bar{u}$$

$$z:0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}-g$$

z방향의 운동량 식은 압력 분포가 靜水 力學의 형태와 같다는 것이다.

$$\bar{p}=\rho g(\eta-z)+p_a\quad(P_a\text{는 대기압})$$

이 관계를 대입하여 x, y에 대한 식을 다시 쓰면

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}+\frac{\partial(\bar{u}\bar{u})}{\partial x}+\frac{\partial(\bar{u}\bar{v})}{\partial y}+\frac{\partial(\bar{u}\bar{w})}{\partial z}-f\bar{v}=-g\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}(\tau_{xz})-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_a}{\partial x}\cdots(4\text{-}1a)$$

$$\frac{\partial\bar v}{\partial t}+\frac{\partial(\bar v\bar u)}{\partial x}+\frac{\partial(\bar v\bar v)}{\partial y}+\frac{\partial(\bar v\bar w)}{\partial z}+f\bar u$$
$$=-g\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}(\tau_{yz})-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_a}{\partial y}\cdots(4\text{-}1b)$$

(2) Depth-integrated Equations

① 連續 方程式(continuity equation)

연직 방향으로 바닥 $z=-h(x, y)$에서 자유 수면 $\eta(x, y; t)$까지 연속 방정식을 적분하면

$$\int_{-h}^{\eta}\left[\frac{\partial\bar u}{\partial x}+\frac{\partial\bar v}{\partial y}+\frac{\partial\bar w}{\partial z}\right]dz=0\text{로 표시된다}\cdots(4\text{-}2)$$

이제 depth-averaged velocity 성분을 도입하자.

$$U=\frac{1}{\eta+h}\int_{-h}^{\eta}\bar u dz,\quad V=\frac{1}{\eta+h}\int_{-h}^{\eta}\bar v dz$$

(4-2)식에 이들을 대입하고 정리하면

$$\frac{\partial}{\partial x}[U(\eta+h)]+\frac{\partial}{\partial y}[V(\eta+h)]+\bar w\Big|_{-h}^{\eta}=0$$
$$\cdots\cdots(4\text{-}3)$$

바닥과 자유 수면에서의 운동학적(kinematic) 경계 조건을 쓰면

$$\bar w\Big|_{\eta}=\frac{\partial\eta}{\partial t}+\bar u\frac{\partial\eta}{\partial x}+\bar v\frac{\partial\eta}{\partial y}\approx\frac{\partial\eta}{\partial t}$$
$$\bar w\Big|_{-h}=\quad\bar u\frac{\partial h}{\partial x}+\bar v\frac{\partial h}{ay}\approx 0$$

그러므로 (4-3)식은

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}[U(\eta+h)]+\frac{\partial}{\partial y}[V(\eta+h)]=0$$
$$\cdots\cdots(4\text{-}4)$$

여기서 만약 $\eta+h\approx h$ 라면,

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(Uh)+\frac{\partial}{\partial y}(Vh)=0$$

② 運動量 方程式(momentum equation)

운동 방정식의 여러 항들에 대하여 z 방향으로 평균을 취하는 과정은 Leibniz 법칙을 적용하여 수행된다.

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{\eta+h}\int_{-h(\alpha)}^{\eta(\alpha)}f(z,\alpha)dz=\frac{1}{\eta+h}\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_{-h(\alpha)}^{\eta(\alpha)}f(z,\alpha)dz-\frac{1}{(\eta+h)^2}\frac{\partial}{\partial\alpha}(\eta+h)\int_{-h(\alpha)}^{\eta(\alpha)}f(z,\alpha)dz$$
$$=\left[\frac{1}{\eta+h}f(\eta,\alpha)\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}-\frac{1}{\eta+h}f(-h,\alpha)\frac{\partial(-h)}{\partial\alpha}+\frac{1}{\eta+h}\int_{-h(\alpha)}^{\eta(\alpha)}\frac{\partial}{\partial\alpha}f(z,\alpha)dz\right]-\frac{1}{(\eta+h)^2}\frac{\partial(\eta+h)}{\partial\alpha}\int_{-h(\alpha)}^{\eta(\alpha)}f(z,\alpha)dz.$$

그러므로

$$\frac{1}{\eta+h}\int_{-h}^{\eta}\frac{\partial\bar f}{\partial\alpha}dz=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{1}{\eta+h}\int_{-h}^{\eta}\bar f dz\right]+\frac{1}{(\eta+h)^2}\cdot\frac{\partial(\eta+h)}{\partial\alpha}\int_{-h}^{\eta}\bar f dz-\frac{1}{\eta+h}\left[\bar f(\eta)\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}+\bar f(-h)\frac{\partial h}{\partial\alpha}\right]$$

이 식에서 $\bar f(\eta)$는 시간 평균값이다. 그리고 $F=\bar f=\frac{1}{(\eta+h)}\int_{-h}^{\eta}\bar f dz$로 정의하면 F는 시간 평균값에 대한 수심에 관한 평균값이 된다. F를 넣어 윗 식을 쓰면

$$\frac{1}{\eta+h}\int_{-h}^{\eta}\frac{\partial\bar f}{\partial\alpha}dz=\frac{\partial F}{\partial\alpha}+\frac{F}{(\eta+h)}\frac{\partial(\eta+h)}{\partial\alpha}-\frac{1}{\eta+h}\left[\bar f(\eta)\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}+\bar f(-h)\frac{\partial h}{\partial\alpha}\right]$$

즉
$$\int_{-h}^{\eta}\frac{\partial\bar f}{\partial\alpha}dz=\frac{\partial}{\partial\alpha}[(\eta+h)F]-\left[\bar f(\eta)\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}+\bar f(-h)\frac{\partial h}{\partial\alpha}\right]\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4\text{-}5)$$

식 (4-5)의 관계를 단순화된 운동량 방정식인 (4-1 a, b)에 각 항별로 적용하고 두 유속의 곱에 대한 평균이 각 유속의 평균값의 곱이라는 가정을 이용하여 정리하면 다음과 같은 수심에 대하여 적분된 운동량 방정식을 얻게 된다.

$$x:\frac{\partial}{\partial t}[(\eta+h)U]+\frac{\partial}{\partial x}[(\eta+h)U^2]+\frac{\partial}{\partial y}[(\eta+h)UV]-(\eta+h)fV=-\frac{\eta+h}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}(\rho g\eta+p_a)+\frac{1}{\rho}\tau_{xz}\Big|_{-h}^{\eta}\quad(4\text{-}6a)$$

$$y:\frac{\partial}{\partial t}[(\eta+h)V]+\frac{\partial}{\partial x}[(\eta+h)VU]+\frac{\partial}{\partial y}[(\eta+h)V^2]+(\eta+h)fU=-\frac{\eta+h}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}(\rho h\eta+p_a)+\frac{1}{\rho}\tau_{yz}\Big|_{-h}^{\eta}\quad(4\text{-}6b)$$

(4-6 a, b)에 대하여 연속 방정식 (4-4)를 이용하여 정리하면

$$\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial x}+V\frac{\partial U}{\partial y}-fV=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}(\rho g\eta+p_a)+\frac{1}{\rho(\eta+h)}\tau_{xz}\Big|_{-h}^{\eta}$$
$$\cdots\cdots(4\text{-}7\,a)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}+U\frac{\partial V}{\partial x}+V\frac{\partial V}{\partial y}+fU=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}(\rho g\eta+p_a)+\frac{1}{\rho(\eta+h)}\tau_{yz}\Big|_{-h}^{\eta}$$
$$\cdots\cdots(4\text{-}7\,b)$$

식 (4-4)와 (4-7)은 미지수 U, V, η,를 가진 storm surge의 지배 방정식이라고 할 수 있다. 그리고 이 연립 방정식이 완결 되려면, 공기와 물의 접촉면에서 바람에 의한 응력인 $\tau_{xz}|_{\eta}$와 $\tau_{yz}|_{h}$가 지정되어야 하고 바닥면에서의 마찰 응력 $\tau_{yz}|_{-h}$와 $\tau_{yz}|_{-h}$가 주어져야 하는데 이는 유속 성분 U와 V를 媒介變數로 하여 나타내질 수 있다. 淺海에서는 특히 바닥 응력에 대한 세심한 처리가 요구된다.

이론적으로 바닥 응력을 처리할 수 있는 경우는, 2차원 흐름에 있어서, 定常(steady)狀態이고 等流일 때에만 가능하다. 이러한 경우 바람의 응력이 없이 수심에 대하여 적분된(depth-integrated) 운동량 방정식에서

$$\tau_{xz}|_{-h}=-\rho g(\eta+h)\frac{\partial\eta}{\partial x}$$

이고 유속 U는 動水半徑 R대신 $(\eta+h)$를 써서 나타낼 수 있으며

$$U=C\sqrt{-(\eta+h)\frac{\partial\eta}{\partial x}} \qquad (C \text{는 Chézy 계수})$$

이다. 그러면 위의 두 식들로부터

$\tau_{xz}|_{-h}=\rho g U^2/C^2$이 된다.

그리고 이 resistance 공식은 보다 일반적인 경우에도 근사적으로 적합하다.

(3) 淺水 방정식(Shallow Water Equations)

선형 이론(linearized theory)을 적용할 경우 운동량 방정식은 (4-1 a, b)로부터

$$\partial\bar{u}/\partial t-f\bar{v}=-g\partial\eta/\partial x+\partial/\partial z(\varepsilon\cdot\partial\bar{u}/\partial z) \quad \cdots\cdots(4\text{-}8\text{ a})$$
$$\partial\bar{v}/\partial t+f\bar{u}=-g\partial\eta/\partial y+\partial/\partial z(\varepsilon\cdot\partial\bar{v}/\partial z) \quad \cdots\cdots(4\text{-}8\text{ b})$$

이고 이 운동량 보존식은 다음과 같은 연속 방정식과 함께 쓰인다.

$$\partial\bar{u}/\partial x+\partial\bar{v}/\partial y=-\partial\bar{w}/\partial z \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4\text{-}8\text{ c})$$

(4-8) 식들은 淺海 영역에서 유체 운동의 동역학 관계를 잘 기술하고 있으므로 Shallow Water Equations 라고 한다.

주어진 강제 효과에(forcing effect)에 대한 천해의 응답을 예측하는 문제는 국부적(local) 문제와 전체적(global) 문제로 나누어진다. $\varepsilon(z)$의 분포가 적절히 파악되면 위의 식은, η의 구배가 주어질 때 $\bar{u}(z)$, $\bar{v}(z)$에 대하여 풀리게 된다. 그래서 임의의 점(x,y)에서의 속도 분포는 국부적 계산으로부터 나오게 된다. 남은 문제는 전체적(global)인 압력 분포 즉, 해수면의 분포이다. 이는 depth integration을 통한 다음 방정식으로부터 계산된다$(H=\eta+h)$.

$$\partial U/\partial t-fU=-gH\,\partial\eta/\partial x+F_x-B_x$$
$$\partial V/\partial t+fV=-gH\,\partial\eta/\partial y+F_y-B_y$$
$$\partial U/\partial x+\partial V/\partial y=-\partial\eta/\partial t.$$

이때 F_x, F_y는 표면 응력으로서 외부에서 주어져야 할 값이고, 底面 응력 B_x, B_y는 국부적 문제로부터 얻어질 수 있다.

(4) 浮遊砂의 亂流擴散(Suspended Sediment Transport)

2절에서 설명한 난류 확산(turbulent diffusion) 모형은 부유 입자가 퍼져 나가는 현상을 기술하는 데 쓰일 수 있다. 한 가지 첨가되야 할 항은 sediment 입자의 연직 운동으로 $-w_f\,\partial\bar{c}/\partial z$로 표시된다. 이는 중력에 의한 항이며 w_f는 잔잔한 물에서 입자가 갖는 정상(steady) 상태의 落下 유속이다. 따라서 종 방향 확산(longitudinal diffusion)이 이류 확산(convective dispersion)에 대하여 무시될 수 있다면 작은 입자들의 낮은 농도에 대한 난류확산식은 다음과 같다.

$$\partial\bar{c}/\partial t+\bar{u}\,\partial\bar{c}/\partial x+\bar{v}\,\partial\bar{c}/\partial y+(\bar{w}-w_f)\partial\bar{c}/\partial z$$
$$=\partial/\partial y(D_z\,\partial\bar{c}/\partial y)+\partial/\partial z(D_z\,\partial\bar{c}/\partial z)$$

이 식은 bed load transport 식과 함께 적절한 경계 조건을 부여하여 풀어야 하며, z는 저면으로부터 연직 상향으로의 높이이다.

이 식은 횡 방향으로 잘 혼합된 매우 넓은 하구에 대하여

$$\partial\bar{c}/\partial t+\bar{u}\,\partial\bar{c}/\partial x=\partial/\partial z(D_z\,\partial\bar{c}/\partial z+w_f\,\bar{c})$$

로 되는데, 여기서 유사(sand-sized particles)의 연직 유속 $\bar{w}$는 낙하 속도 w_f에 비하여 작으므로 무시되었다. 만일 유사의 퇴적량과 난류 조건이 종 방향으로 균등하다고 가정되면 다음의 식이 된다.

$$\partial\bar{c}/\partial t=\partial/\partial z(D_z\,\partial\bar{c}/\partial z+w_f\,\bar{c})$$

또한 연직 방향의 모든 높이에서 평형상태$(\partial\bar{c}/\partial t=0)$가 이룩어졌다면 위의 식은 Schmidt 식이 된다.

$$D_z\,dc/dz+w_f\,\bar{c}=0.$$

또한, 對數形 유속 분포$(d\bar{u}/dz=u^*/kz)$와 線形 전단력 분포 $\tau=\tau_0(1-z/H)=\rho D_z\,d\bar{u}/d_z$를 가정하면 $D_z=ku_*z(1-z/H)$가 되는데, 이 경우 Schmidt 식을 적분하면

$$c/c_a=[(H/z-1)/(H/a-1)]w_f/(\beta k u_*)$$

여기서 $\beta(<1)$은 보정 계수(correction factor)이다.

5절 開水路 水理學(Open channel Hydraulics)

(1) 1차원 흐름의 방정식

① 연속 방정식(continuity equation)

4절에서 사용된 기호들의 정의를 그대로 써서, $h=h(x, y)$로서 시간에 대하여 고정되었다고 생각하고 u, v를 수심에 대하여 적분된 유속들이라고 하자. 이에 따라 수심에 대하여 적분된 연속 방정식은 다음으로 주어진다.

$$\partial(\eta+h)/\partial t+\partial/\partial x[(\eta+h)u]+\partial/\partial y[(\eta+h)v]=0$$

4절의 적분 방법과 동일하게 이번에는 횡 방향으로 적분하자. 적분 구간은 $y=y_1(x, t)$에서 $y=y_2(x, t)$까지이고 $y=y_1, y_2$에서 $(\eta+h)=0$이다. Leibniz 법칙을 사용하여 적분하면

$$\partial/\partial t\int_{y1}^{y2}(\eta+h)dy+\partial/\partial x\int_{y1}^{y2}(\eta+h)udy=0$$

즉, $\partial A/\partial t+\partial Q/\partial x=0$ ……………………………(5-1)

가 된다. 이 식은 횡 방향 유입량 q를 0으로 생각한 경우이고 A는 단면적 Q는 $Q=AV$로서 유량이다. 또한

$$\partial A(\eta+h)/\partial t=dA(\eta+h)/d(\eta+h)\cdot\partial(\eta+h)/\partial t$$
$$\equiv b(h)\partial h/\partial t$$

로 정의하면 $(h\Leftarrow\eta+h)$

$$b\,\partial h/\partial t+\partial Q/\partial x=b\,\partial h/\partial t+(A\partial V/\partial x+V\partial A/\partial x)=0$$

여기서 $A\partial V//\partial x$와 $V\,\partial A/\partial x$는 각각 prism 및 wedge storage에 의한 항이다.

② 운동량 방정식(momentum equation)

만일 Coriolis 효과와 대기압, 바람의 응력 등의 영향을 무시한다면 수심에 대하여 적분된 운동량 방정식은 다음과 같이 된다.

$$\partial(\eta+h)u/\partial t+\partial(\eta+h)u^2/\partial x+\partial(\eta+h)uv/\partial y$$
$$=-g(\eta+h)\partial\eta/\partial x-\frac{1}{\rho}\tau_{xz}|_{-h}$$

횡 방향으로 적분된 형태는

$$\partial Q/\partial t+\partial(Q^2/A)/\partial x=-g\,A\,\partial\eta/\partial x-P\,\tau_b/\rho$$

여기서 P는 wetted perimeter이고. 표면 경사 $\partial\eta/\partial x$는 횡 방향에 대하여 상수이며 평균 바닥 응력 τ_b≙ $\left(\frac{1}{P}\right)\int_{y1}^{y2}\tau_{xz}|_{-h}\,dy$로 정의하였다. 수면 경사를 S_w≙$-\partial\eta/\partial x$로 정의하고 $\tau_b=\gamma RS_f$라고 가정하면 위의 식은 다음의 형태로 쓸 수 있다.

$$\partial Q/\partial t+\partial(Q^2/A)/\partial x=gA(S_w-S_f)$$

또한 $Q=AV$, $S_w=-\partial z_b/\partial x-\partial(\eta+h)/\partial x\equiv S_o-\partial h/\partial x$으로 정의하면$(h\Leftarrow\eta+h)$ 다음과 같이 된다.

$$DV/Dt=g(S_w-S_f)$$

즉, $\partial V/\partial t+V\partial V/\partial x+g\,\partial h/\partial x=g(S_o-S_f)$ ………(5-2)

통수능(conveyance)을 $K=K(h)$라고 하고 통수 반경을 R이라고 하면 S_f를 다음과 같이 표시할 수 있다.

$S_f=Q\,|Q|/K^2$ 또는 $kV|V|R^{-n}$

(2) 운동량 방정식(de St. Venant equation)의 분류

식 (5-2)는 각 항들의 添削에 따라 다음과 같이 분류된다.

Kinematic wave : $S_f=S_o$

Diffusion analogy : $S_f=S_o-\partial h/\partial x$

Dynamic wave : $S_f=S_o-\partial h/\partial x-(V/g)\partial V/\partial x-(1/g)\partial V/\partial t$

① Dynamic wave(for a prismatic channel)

$$\begin{cases}\text{연속 방정식}: \partial h/\partial t+A/b\,\partial V/\partial x+V\,\partial h/\partial x=0\\ \text{Dynamic equation}: \partial V/\partial t+V\,\partial V/\partial x+g\partial h/\partial x\\ \quad=g(S_o-S_f)\end{cases}$$

위의 두 식에서 특성 방향(characteristic directions) $dx/dt=V\pm\sqrt{gA/b}$에 따른 특성 방정식(characteristic eguations)은

$$D/Dt(V\pm2\sqrt{gA/b})=g(S_o-S_f)$$

이다. 경계 조건은 常流(subcritical flow)의 경우에 양쪽 끝단에서 1개씩 주어져야 하고 射流(supercritical flow)의 경우에는 上流에서 2개만 주어지면 된다. 不等流인 경우의 초기 조건은 $dE/dx=dE/dh\cdot dh/dx=(1-F_r^2)dh/dx=S_o-S_f$를 쓰고 等流인 경우에는 Chezy 식이나 Manning 식을 쓴다.

만일 흐름이 근사적으로 등류이어서 S_o-S_f이거나 혹은 傾斜가 없는 하도이고 resistance도 무시되어 $S_o=S_f=0$인 경우라면 윗 식은

$D/Dt(V\pm2\sqrt{gA/b})=0$ ……………………(5-3)

이 된다. 이제 특성 방향 $C_\pm: dx/dt=V\pm c$에 따라 적분하면

$$V \pm 2c = J_{\pm} \quad \text{(Riemann invariants)}$$

가 되고, 위에서 波速으로 $c=\sqrt{gA/b}$가 쓰였다.

하도 흐름의 거동은 $F_r=V/c$로 정의되는 Froude 數에 관계된다. 식 (5-3)을 특성 방향 C^-를 따라서 다시 쓰면

$$D/Dt[c(F_r-2)]=(F_r-2)dc/dt+cdF_r/dt=0$$

그러므로 dc/dt와 dF_r/dt의 부호는 F_r의 값이 2보다 크거나 작음에 따라서 서로 다른 부호를 갖는다. 이 점은 흐름의 stability에 중요한 결과를 초래한다. 즉, $F_{ro}<2$(initial uniform flow)이면 resistance가 surge의 형성을 늦추고 洪水波를 보다 길게 퍼지도록 한다. (Jeffreys Vedernikov Cond.)

② Diffusion analogy(for a flood routing)

$$\begin{cases} \text{연속 방정식}: \partial h/\partial t+(1/b)\partial Q/\partial x=0 \\ \text{운동량 방정식}: \partial h/\partial x+\partial_{zb}/\partial x+Q\,|Q|\,/K^2=0 \end{cases}$$

K를 수심 h만의 함수라고 하고 $\partial K/\partial t$를 풀어쓰면

$$\partial K/\partial t=(dK/dh)(\partial h/\partial t)=-(1/b)(dK/dh)(\partial Q/dx)$$

그리고 연속 방정식과 운동량 방정식에서 $\partial^2 h/\partial x\partial t$ 항을 구한 후 소거하고 $\partial K/\partial t$의 관계를 대입하면 일정한 $b(h)=b$의 경우 다음과 같은 포물형 미분 방정식이 된다.

$$\partial Q/\partial t+[Q/(bK)dK/dh]\partial Q/\partial x=[K^2/(2b\,|Q|\,)]\,\partial^2 Q/\partial x^2$$

경계 조건으로는 $Q(o,t)$, $Q(L,t)$ 초기 조건으로는 $Q(x,o)$가 필요하다.

③ Kinematic wave ($F_r<2$: 하나의 초기 조건 $Q(x,o)$와 하나의 경계조건 $Q(o,t)$이 필요)

$$\begin{cases} \text{연속 방정식}: \partial A/\partial t+\partial Q/\partial x=(\partial A/\partial Q)\partial Q/\partial t \\ \quad +\partial Q/\partial x=0 \\ \text{운동량 방정식}: Q=AV=K(h)\sqrt{S_o} \end{cases}$$

연속 방정식으로부터

$$c\equiv dx/dt=\partial Q/\partial A=\left[\frac{1}{b(h)}\partial Q/\partial h\right]=V+A\partial V/\partial A$$

그래서 $c=dQ/dA=\left(\frac{1}{b}\right)dQ/dh=V+AdV/dA(>V)$가 된다. (Seddon's Obs.)

(3) 洪水 追跡(Flood Routing)

동수 반경을 $R=h$라고 할 수 있는 넓은 사각형(wide rectangular) 하도를 생각하자. 이때에 discharge 식은 $q=\alpha h^m$으로 표시되고, m은 Chezy 공식에서 3/2, Manning 공식에서 5/3, 層流(laminar flow)일 때에는 3인 반면 자연하도에서는 실험 자료로부터 2.1, 실측 자료로부터 1.45이다. 연속 방정식은 유효 강우(rainfall excess) i_o와 횡 방향(lasteral) 유입량 $2q_L/b$를 고려할 때

$$\partial h/\partial t+(1/b)\partial Q/\partial x=i_o+2q_L/b$$

이다.

① 地表水의 흐름(overland flow)

연속 방정식은

$$\partial h/\partial t+\partial q/\partial x=i_o \quad \text{(scalar wave equation)}$$

이다. $dq=\partial q/\partial x\cdot dx+\partial q/\partial t\cdot dt$, $dh=\partial h/\partial x\cdot dx+\partial h/\partial t\cdot dt$를 이용하여 특성 방향을 구하면

$$c\equiv dx/dt\equiv dq/dh=\alpha m\,h^{m-1}=mV$$

이고 특성 방향들을 따라서 연립 상미분 방정식이 형성된다.

$$\begin{cases} dh/dt=i_o \\ dq/dt=i_o \end{cases}$$

만일 kinematic wave speed가 상수의 Chezy C에 대해 $c=3/2V$인 경우, $F_r\equiv V/\sqrt{gh}=2$이라면 dynamic wave speed 즉, $c=V+\sqrt{gh}$가 된다.

② 河道 추적

급한 경사(steep slopes)를 가진 하도의 경우에 $Q_o=\alpha A^m$으로 표시되고 이때 m은 3/2이다. 또한 $q_i\equiv 2q_L$를 생각할 때 $\partial A/\partial t+\partial Q_o/\partial x=q_i$이다. 그렇다면 특성 방향 $c_o\equiv dx/dt\equiv dQ_o/dA=\alpha m A^{m-1}=mV$를 따라서 $dA/dt=q_i$이고, q_i가 무시될 수 있는 경우에 이는 $dQ_o/dx=0$를 나타낸다.

완만한 경사를 가진 하천에서 loop-rating curve는

$$Q=Q_o\sqrt{1-(\partial h/\partial x)/S_o}$$
$$=Q_o\sqrt{1+(\partial h/\partial t)/(S_o c_o)}$$

로 주어지고 이는 Jones formula라고 알려져 있다. $\partial A/\partial t+\partial Q/\partial x=q_i$를 사용하면 $c=c_o\sqrt{1-(\partial h/\partial x)/S_o}$이고 이는 표면 경사의 dispersion 혹은 flattering을 나타낸다. Rating curve를

$$\partial A/\partial t+\partial Q/\partial x=0.$$

에 대입하면

$$\partial A/\partial t+c\partial A/\partial x=Q_o/[2S_o\sqrt{1-(\partial h/\partial x)/S_o}]\cdot\partial^2 h/\partial x^2$$

이고 波項(crest)에서는

$$\partial A/\partial t\equiv dA/dt=Q_o/[2s_o]\partial^2 h/\partial x^2$$

이 되어(uniform channel에 대하여) 첨두 유량의 attenuation 혹은 decaying을 보인다.

(4) Convective Dispersion

이제까지 Reynolds식으로부터 여러가지 가정 혹은 단순화를 통하여 개수로의 1차원 흐름에 관한 식들을 유도하였다. 그러면 이제 난류 확산(turbulent diffusion)에 관한 식을 간단히 하여 1차원 식으로 나타내 보자. 이는 관수로나 개수로의 1차원 해석에 이용될 수 있다.

일시적인 시간 평균 농도를 $\bar{c}$로 표시하고 $\bar{v}$, $\bar{w}=0$ 이라고 하면 난류 확산식은 다음과 같다.

$$\partial\bar{c}/\partial t+\bar{u}\,\partial\bar{c}/\partial x=\partial/\partial x[D_x\,\partial\bar{c}/\partial x]$$
$$+\partial/\partial y[D_y\,\partial\bar{c}/\partial y]+\partial/\partial z[D_z\,\partial\bar{c}/\partial z]$$

종 방향으로의 난류 확산 항$\partial/\partial x[D_x\,\partial\bar{c}/\partial x]$가 convective dispersion 항 $\bar{u}\partial\bar{c}/\partial x$ 보다 현저히 작다고 가정하면

$$\partial\bar{c}/\partial t+\bar{u}\,\partial\bar{c}/\partial x=\partial/\partial y[D_y\,\partial\bar{c}/\partial y]+\partial/\partial z[D_z\,\partial\bar{c}/\partial z]$$

다시 $\bar{c}'$과 $\bar{u}'$을 단면상의 평균값 C, U으로부터의 변동량으로 정의하면

$$\bar{c}=C+\bar{c}',\quad \bar{u}=U+\bar{u}'$$

으로 나타내진다. 그리고 관측자가 U의 속도로 움직인다고 하여 관측자에 대한 x방향 좌표계를 $x'=x+Ut$로 표시하면 (Galilean transformation)

$$\partial/\partial t(C+c')+\bar{u}'\partial/\partial x'(C+\bar{c}')$$
$$=\partial/\partial y[D_y\,\partial(C+\bar{c}')/\partial y]+\partial/\partial z[D_z\partial(C+\bar{c}')/\partial z].$$

난류에 대한 일시적인 평균값(temporal mean)과 유사한 개념으로 단면에 대하여 평균값을 취한다. 어느 점에서나 $\partial\bar{u}'/\partial x'=0$를 이용하면,

$$\partial C/\partial t+\partial/\partial x'(\overline{\bar{u}'\bar{c}'})=0$$

여기서 Reynolds 상사에 의한 1차원의 확산 계수 $\overline{\bar{u}'\bar{v}'}=-D\,\partial C/\partial x'$를 도입하면

$$\partial C/\partial t=\partial/\partial x'(D\,\partial C/\partial x')=D\,\partial^2C/\partial x'^2$$

여기서 다시 관측자가 고정되어 있다고 하면

$$\partial C/\partial t+U\,\partial C/\partial x=D\,\partial^2C/\partial x^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5\text{-}4)$$

흐름의 경계면으로는 이동 현상이 없다고 생각하고 non-uniform channel의 경우에는 다음과 같은 포물형(parabolic)식을 얻는다.

$$\partial(AC)/\partial t+\partial(QC)/\partial x=\partial/(AD\,\partial C/\partial x)/\partial x\pm AS^*$$

이때 A는 흐름의 단면적, $Q=AU$이고, S^*는 sink/source 항이다. 사실상 상수 D의 도입은, 단순히 단면에 대한 속도 변동에 의한 효과만을 고려한 것이 아니라 분자 확산과 난류 확산을 모두 포함하고 있다고 보아야 한다. 그러므로 보통 D는 D_x, D_y. D_z보다 큰 값을 가지며 각각의 흐름 상황에 따라 바뀌어야 한다.

參 考 文 獻

1. Bear, J., "*Hydraulics of Groundwater*", McGraw-Hill, 1979.
2. Csanady, G.T., "*Circulation in the Coastal Ocean*", D. Reidel Pub. Co., 1984
3. De Wiest, R.J.M., "*Geohydrology*", Wiley, 1965.
4. Eagleson, P.S., "*Dynamic Hydrology*", McGraw-Hill, 1970.
5. Edwards, D.K., V.E. Denny, and A.F. Mills, "*Transfer Processes*", Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1973.
6. Henderson, F.M., "*Open Channel Flow*", Macmillan, 1966.
7. Le Méhauté, "*An Introduction to Hydrodynamics and Water Waves*", Spring-Verlag, 1976.
8. Li, W.H., "*Differential Equations of Hydraulic Transients, Dispersion and Groundwater Flow*", Prentice-Hall, 1972.
9. Lin, C.C., and L.A. Segel, "*Mathematics Applied to Deterministic Problems in the Natural Sciences*", Macmillan, 1974.
10. McDowell, D.M., and B.A. O'Connor, "*Hydraulic Behavior of Estuaries*", Macmillan, 1977.
11. Raudkivi, A.J., and R.A. Callander, "*Advanced Fluid Mechanics*", Arnold, 1975.
12. Weber, W.J.Jr., "*Physicochemical Processes for Water Quality Control*", Wiley-Interscience.
13. Wood, A.M.M., and C.A. Fleming, "*Coastal Hydraulics*", 2nd. ed., Macmillan, 1981