貯水池 操作 (Ⅲ)

權 五 憲*

4.4 其 他

動的計劃(Dynamic Programming) 기법은 2章2節에 이미 설명한 바와 같이 Bellman의 最適性의 原理에 따라 多段階로 수행되며 그밖에 저수지조작에 관련되는 방법으로는 모의조작(simulation)기법이 흔히 쓰이며, Pontryagin의 최대원리, Kalman filter 등의 시스템공학기법이 시도되고 있다.

자동제어이론중 線型追跡(linear tracking) 이론과 폰트리아진의 最小原理에 의한 저수지계의 최적제어[21]를 하나의 實例로 살펴 본다.

評價函數를 식(47)과 같이 월별 방류량이 용수수요($\hat{u}$)에 가장 近接하고 또한 端末制約條件($\hat{x}$)을 충족토록 設計하면,

$$J=\frac{1}{2}[\underline{x}(N)-\hat{\underline{x}}(N(]^T V[\underline{x}(N)-\hat{\underline{x}}(N)]$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}[\underline{u}(k)-\hat{\underline{u}}(k)]^T R[\underline{u}(k)-\hat{\underline{u}}(k)] \cdots\cdots(47)$$

여기서 $V: n\times n$ 대칭가중치 행렬, PSD
$R: n\times m$ 대칭가중치 행렬, PD
N: 마지막 시간축

그리고 저수지계의 시스템방정식은,

$$\underline{x}(k+1)=\Phi\underline{x}(k)+\Psi u(k)+\underline{y}(k) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(48)$$

여기서 $\underline{x}: n\times 1$ 상태벡터(저류량)
$\underline{u}: m\times 1$ 제어벡터(방류량)
$\underline{y}: n\times 1$ 기타 벡터
Φ: 상태변수 변환행렬$(n+n)$
Ψ: 제어변수 변환행렬$(n\times n)$

식(47), (48)을 라그랑즈함수로 확장하고 이를 정리하면 해일토니안은 式(49)와 같다.

$$H[\underline{x}(k),\underline{u}(k),\underline{\lambda}(k+1)]=\frac{1}{2}[\underline{u}(k)-\hat{\underline{u}}(k)]^T R[\underline{u}(k)-\hat{\underline{u}}(k)]+\underline{\lambda}^T(k+1)[\Phi\underline{x}(k)+\Psi\underline{u}(k)+\underline{y}(k)] \cdots\cdots(49)$$

식(49)를 變分法으로 정리하면 最適解과 境界條件을 얻게된다.

$$\underline{u}^*(k)=-R^{-1}\Psi^T\underline{\lambda}^*(k+1)+\hat{\underline{u}}(k) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(50)$$

$$\underline{\lambda}^*(N)=V\underline{x}^*(N)-V\hat{\underline{x}}(N) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(51)$$

식(50),(51)은 2點 境界値問題로서 상태벡터와 공액상태벡터의 경계조건이 초기 및 종기로 분리되어 있으므로 이를 Kalman의 Riccati형의 해로 유도하면,

$$\underline{u}^*(k)=F(k)\underline{x}^*(k)+\underline{g}(k)+\hat{\underline{u}}(k) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(52)$$

여기서 $F(k)=-R^{-1}\Psi^T\Phi^{-\tau}P(k)$
$g(k)=-R^{-1}\Psi^T\Phi^{-T}\underline{S}_{ck}(h)$
$p(N)=V$
$\underline{s}(N)=-V\underline{x}(N)$

Φ가 單位行列로 표시되는 時不變(time-invariant) 저수지계에 대한 補整式을 최소원리로 유도하면, 제어벡터가 制約條件을 위배하면, 식(53), (54)와 같은 보정을 하게된다.

$$\underline{u}'(k)=\underline{u}^*(k)-\triangle\underline{u}(k) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(53)$$

$$\left.\begin{aligned}&\underline{x}'(k+1)=\underline{x}^*(k+1)-\Psi\triangle\underline{u}(k)\\&\underline{S}'(k+1)=\underline{S}^*(k+1)+P^*(k+1)\Psi\triangle\underline{y}(h)\\&\underline{g}'(k+1)=\underline{g}^*(k+1)+R^{-1}\Psi^{\tau}\Phi^{-\tau}\\&\quad[-P^*(k+1)\Psi\triangle\underline{u}(k)]\end{aligned}\right\}\cdots(54)$$

이상과 같은 feedforward는 累加的으로 수행되어야 하며 상태변수는 feedforward 뿐만아니라 feedback 보정도 아울러 실시해야 한다.

5. 推計學的 模型(Stochastic Modeling)

5.1. 遷移確率(transition probability)

上流로부터 조절되지 않는 저수지로의 流入量은 任意的이다. 이에 따라 엄격한 의미에서 저수지의 저류량이나 이로부터 발생되는 放流量 역시 確率的으로 처

21) 權五憲, "離散型 線型追跡에 의한 制約貯水池系의 최적제어", 서울大學校 大學院 博士學位 論文, 1984.

리된다. 따라서 저수지의 管理, 運營問題는 본질적으로 推計學的 計劃問題라고 할 수 있다.

t 期間中 임의의 放流量을 Q_t, 活用저수용량을 K_a 라고 하자. 이때 流入量의 確率分布는 안다고 가정하자. S_t 와 R_t 를 t 期間初 저수지의 저류용량 및 방류량이라하고 저수지의 操作律이 未知이면 이 두변수의 확률분포는 알 수 없다.

t 期間中 i 區間으로 離散化된 流入量 Q_{it} 의 發生確率을 PQ_{it} 로 하자. 이러한 Q_{it} 의 통계적 모멘트는 과거 기록치와 같아야 한다. 마찬가지로 초기 저류량 역시 指數 k 로 離散化하여 S_{kt} 의 확률을 PS_{kt} 로 표기한다. S_{kt} 의 값이 주어진 경우에도 S_{kt} 의 확률분포는 未知인 저수지 操作律의 함수이므로 PS_{kt} 는 未知數이다.

그림 13에서 보는 바와같이 t 기간중 유입량과 저수량의 指數를 i, j 라고 할때 $(t+1)$기간의 유입량 및 저류량 指數를 j 및 l 로 나타내면 연속방정식에 따라 방류량 R_{kilt} 는;

$$R_{kilt}=S_{kt}+Q_{it}-E_{klt}-S_{l,\,t+1} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (55)$$

여기서 E_{ikilt} : 期間 t 의 初期 및 終期의 저류량의 함수인 증발 및 침투손실.

R_{kilt} 의 발생확률 PR_{kilt} 는 未知로서 S_{kt}, $Q_{it}, S_{l,\,t+1}$ 의 확률에 따라 결정되므로 最適操作律은 이러한 結合確率(joint probabilities)을 결정할 수 있는 모형을 설계하므로서 구하는 방법도 있다.

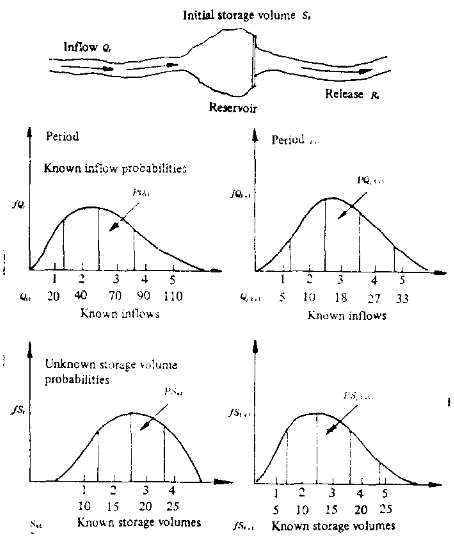

그림 13. 任意의 유입량, 초기저류량의 이산화

t 기간중 저류량과 유입량 S_{kt}, Q_{it} 가 주어질 경우 최적의 저류량 $S_{l,\,t+1}$이 발생할 조건확률(conditional probability)을‥

$$Rr[l|k,i,t]=\frac{PR_{kilt}}{\sum_{l}PR_{kilt}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (56)$$

즉 식(56)에서 初期値 $S_{k,\,t}$ 와 $Q_{i,\,t}$ 가 주어진 경우에

$$Pr[l|k,i,t]=\begin{cases} O: \text{종기 저류량 } S_{l,\,t+1} \text{ 이 최적이 아닐 경우} \\ L: S_{l,\,t+1} \text{ 이 최적인 경우} \end{cases}$$

5.2. 推計學的 動的計劃 模型

이 모형은 물론 確定論的 操作모형과 매우 비슷하다 期間 t 중의 最適放流量을 R_{kilt}, 또는 이에 따른 終期 저류량을 $S_{k,\,t+1}$ 이라 할때 이 값은 初期저류량 S_{kt} 와 기간중 유입량 Q_{it} 의 2개 상태변수에 좌우된다. 목적함수를 시스템 수행의 最適化로 할 경우에 S_{kt}, Q_{it}, R_{kilt} 및 $S_{e,\,t+1}$ 에 의한 수익을 B_{kilt} 로 하자. 動的計劃을 逆次의 반복방정식으로 구성하려면 最終段階 $t=T$ 로부터 최적화되어야 한다.

$f_t^n(k,i)$ 를 n 期間 進行했을 때 시스템 수행에 따른 總期待値라고 하면 최종단계에서는

$$f_t^1(k,i)=\max_l(B_{kilt}) \quad \forall k,i \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (58)$$

여기서 l 은 주어진 k,i,t 의 조건에서 妥當域에 존재해야 함.

마지막으로부터 2段階에서는,

$$f_{T-1}^2(k,i)=\max_l(B_{kilT-1}+\sum_j P_{ij}^{T-1} f_T^1(l,j), \forall k,i$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (59)$$

여기서 P_{ji}^{T-1} 은 $(T-1)$기간 유입량 $Q_{i,\,T-1}$ 일때 T 기간 유입량 $Q_{j,T}$ 일 천이확률임.

이를 일반화하면,

$$f_t^n(k,i)=\max_l[B_{kil}+\sum_j P_{ij}^t f_{t+1}^{n-1}(l,j), \forall k,i \cdots (60)$$

식(60)은 期間에 따른 가치의 변동을 고려하지 않을 것이며 利子率을 고려할 경우에는

$$f_t^n(k,i)=\max_l B_{kilt}+(1+r)^{-1}\sum_j P_{ij}^t f_{t+1}^{n-1}(l,j)]$$
$$\forall k,\ i \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (61)$$

5.3. 저류량과 방류량의 확률분포

위의 動的 計劃技法으로 解를 구하여 이로부터 定常狀態의 操作律을 유도하면 t 기간중 유입량 Q_{it} 와 초기저류량 S_{kt} 가 주어지면 최적의 종기저류량 $S_{l,\,t+1}$ 이 구해진다. 이런 操作律을 $l=l(k,i,t)$로 표시할 경우 연속방정식 (55)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$R_{kit}=S_{kt}+Q_{it}-E_{klt}-S_{l,t+1} \quad \forall k,i,t;\ l=l$$

(k,i,t) ……………………………………………(62)

그리고 구간초기 저류량 S_{kt}, 유입량 Q_{it} 및 구간종기 저류량 $S_{l,t+1}$에 대한 결합확률(joint probability) PR_{kit}는 함수 (k,i,t)로 정의될 수 있다.

이 확률 PR_{kit}와 流入量 천이확률 $P^t_{i.j}$의 積은 바로 S_{kt}, Q_{it} 및 $Q_{j,t+1}$의 결합확률이라고 할 수 있다.

$P^t_{i.j}$의 값과 함수 $l(k,i,t)$를 알 경우 다음의 제차 방정식을 풀면 모든 PR_{kit}을 얻게된다.

$$\left.\begin{aligned} &PR_{l,j,t+1}=\sum_k \sum_i PR_{kit}\,P^t_{i.j} \quad \forall j,t\,l=l(k,i,t) \\ &\sum_k \sum_i PR_{kit}=1 \qquad \forall t \end{aligned}\right\} \cdots(63)$$

조작률 $l=l(k,i,t)$에 따른 marginal probability의 분포는,

$$\left.\begin{aligned} &PR_{kt}=\sum_i PR_{it} \quad \forall k,t \\ &PQ_{it}=\sum_k PR_{kit} \quad \forall i,t \\ &PS_{l,t+1}=\sum_k \sum_i PR_{kit} \quad \forall t,l=l\ (k,i,t) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(64)$$

이상에서 살펴 모형은 현기간중의 유입량을 알 경우 初期(또는 前 區間末)의 저류량의 함수로서 방류량을 결정할 수 있는 일련의 操作律인데 실제 문제에 있어서 현기간이 종료되기 이전에는 유입량을 알 수 없다. 따라서 이는 저수지 관리자가 區間初에 결정하는데 도움을 줄 수 있을 뿐이다. 또한 병렬 또는 직렬로 구성된 저수지 시스템에서는 확률의 변화가 매우 복잡해 지므로 실용상 문제점을 내포하고 있을 뿐만아니라 해의 최적성에도 문제가 제기될 경우가 있다.

그밖에 單一貯水池의 管理나 設計를 위하여 Revelle[22,23]등이 개발한 線型決定律(Linear Decision Rule, LDR)이 있다. 최적방류량을 저류량과 r매개변수에 함수로 표시하였다.

$x=s-b$ ……………………………………………(65)

여기서 x는 기간 t중의 방류량이고, s는 t기간초(또는 전기간말)의 저류량이며 b는 선형계획 등으로 목적함수를 최적화하여 구한 결정매개변수이다. 이 방법 역시 복잡한 저수지계에서는 실용상 어려움이 많다.

5.4. 供給水量 模型(Yield Model)[24]

저수지의 計劃이나 管理문제를 해결하는 하나의 代案으로서 供給水量(yield) 모형이 있다. 여기서 "yield"라 함은 未來에 저수지 공급수량에 대한 매우 높은 신뢰도 또는 초과확률을 부여한 개념이다.

표 3은 實例를 간단히 하기 위하여 9년간의 유입량을 2季節(例 乾季 및 雨季)만으로 나누었다.

表 3. 저수지 유입량 기록

年	年中期間(within-year period)		年中流入量
	Q_{1Y}	Q_{2Y}	Q_Y
1	1.0	3.0	4.0
2	0.5	2.5	3.0
3	1.0	2.0	3.0
4	0.5	1.5	2.0
5	0.5	0.5	1.0
6	0.5	2.5	3.0
7	1.0	5.0	9.0
8	2.5	5.5	8.0
9	1.5	4.5	6.0
計	9.0	27.0	36.0
平均	1.0	3.0	4.0

1) 年間供給水量의 信賴度 및 소요저수용량

表3에서 最小의 年流入量은 第5年의 1.0이다. 따라서 이 지점에 댐(조절능력)이 없을 경우 초과확률을 $m/(n+1)$로 표시하면 0.90이다. 그리고 초과확률이 P인 연간유량을 Y_P로 표시하고 이때의 再起年을 T_P로

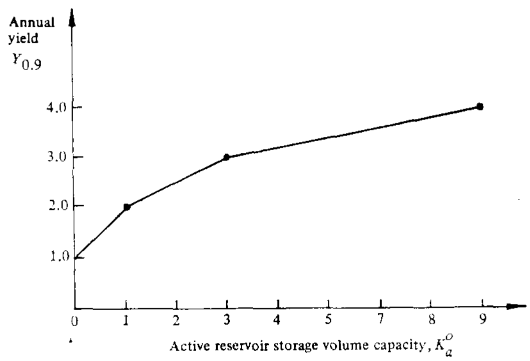

그림 14. 저수용량에 따른 공급수량

22) Revelle, C. et al, "The Linear Decision Rule in Reservior Management and Design. 1, Development of the Stochastic Model," WRR, 5(4), 767—777(1969).

23) Revelle, C. et al., "Linear Decision Rule in Reservior Management and Design. 4, A Rule that Minimize Output Variance," WRR, 11(2), 197—203(1975).

24) Loucks et al, 전게서 336—353.

나타내면,

$$\left.\begin{aligned} Y_{0\cdot 90} &= 1.0 \\ Y_P &= \frac{1}{1-P} \end{aligned}\right\}$$

그런데 이 지점에 저수지가 건설되면 經年的인 저류능력(overyear storage)은 특정의 연간공급량을 증가시키거나 그 신뢰도를 높여준다. 年中(within-year) 분배나 증발, 침투등을 무시할 때 활용저수용량 K_a (active conservation pool)에 따른 $Y_{0\cdot 9}$의 관계를 그림 14와 같다고 하자.

연속방적식과 제약조건을 구성하면,

$$S_y+Q_y-Y_{0\cdot 9}-R_y=S_{y+1} \cdots\cdots (66)$$

$$S_y \le K_0^a \cdots\cdots (67)$$

여기서 S : 期間初 저류량

R : 잉여방류량(excess release)

Y : 年度

K_0^a : 經年容量(overyear Capacity)

그리고 $y=9$일 때 즉 기록기간의 末期일 때 $(y+1)$은 1로 본다.

식(66),(66)은 年間流入量, 年間供給 및 經年貯水容量의 관계이며 年中의 물수급은 고려되지 않았다. 年間 供給所要量(Y_P)이 3 및 4일 경우의 年中의 供給은 表4와 같은 여러 조합이 가능하다. 여기서 K_0^a는 단지 년간 供給量만을 充足하기 위한 經年容量이며 총저수소요량(active) K_a와 K_0^a의 差인 K_w^a는 年中의 供給을 充當하는데 소요되는 저류용량이다. 表4에 표시된 소요저수용량은 表3의 자료로서 앞의 極限系列解法(Sequent peak algorithm)으로 구하거나 또는 식(68),(69) 模型의 解이다.

表 4. 여러가지 年中供給을 위한 저수량소요

年間供給量 $Y_{0.9}$	年中 供給 組合		所要 貯水容量		
	t=1	t=2	K_a^w	K_a^o	K_a
3	0	3	1.0	3.0	4.0
	1	2	0.5	3.0	3.5
	2	1	1.5	3.0	4.5
	3	0	2.5	3.0	5.5
4	0	4	1.0	8.0	9.0
	1	3	0.0	8.0	8.0
	2	2	1.0	8.0	9.0
	3	1	2.0	8.0	10.0
	4	0	3.0	8.0	11.0

$$O.F. \quad \text{minimize} \quad K_a \cdots\cdots (68)$$

$$\left.\begin{aligned} s.t. \quad & S_{ty}+Q_{ty}-Y_{0.9,t}-R_{ty}=S_{t+1,y} \\ & S_{ty} \le K_a \end{aligned}\right. \cdots\cdots (69)$$

위의 모든 변수의 下添字는 年中의 특별한 기간 ($t=1$, 또는 $t=2$)을 말한다. 이러한 계산은 여러개의 저수지가 있는 경우에는 매우 번잡하다. 그러나 안전공급량(firm, safe)의 계산시에는 극한 한발기를 선별하여 계산을 하게 된다.

表3의 9年間 유입량에 대하여 매년의 乾期($t=1$)에 요구되는 供給量 $Y_{0.T,1}=3$이라고 가정하고 雨期($t=2$)의 요구수량 $Y_{0.9,2}=0$이라고 할 때, 저수지의 모의조작은 그림 15와 같다.

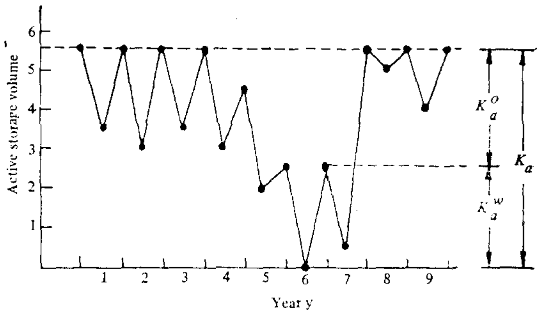

그림 15. 저수용량 계열

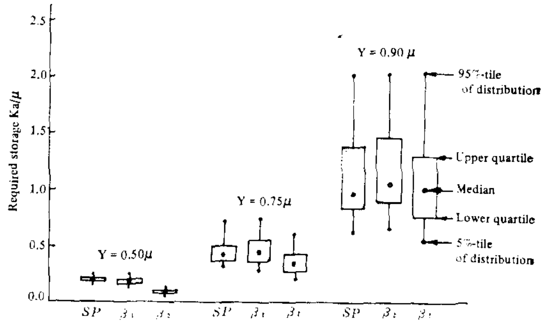

그림 16. 공급량대 저수용량

그림 16은 年平均 流入量 μ의 50,70 및 90%의 供給을 위한 저수용량을 나타낸다. 여기서 S_β는 식(68), (69) 모형에 의한 값이고, β는 갈수년의 유입량분포를 기준으로 한 것이며, β는 月平均 유입량에 대한 것이다.

2) 操作規程(operation rule)

저수지 조작에 대한 規程(rule curve)이란 댐관리자의 의사결정에 도움을 주는 참고자료이다. 따라서 이

러한 규정은 定常條件에서, 即 돌변적인 수요증감등이 없는 상태에서 적용되어야 한다.

저수지 조작규정은 여러가지로 작성될 수 있으나 흔히 目標貯溜量을 시기별로 정하여 이를 유지토록 하거나 선별한 放流法則에 따른 저수지 구역(Zone)을 설정하여 관리하기도 한다.

6. 맺는 말

저수지 조작문제는 그 자체의 물리적인 여러 관계도 복잡할 뿐만 아니라 이에 관계되는 最適化理論도 실로 광범위하다.

이제까지의 설명은 走馬看山格으로, 冒頭에서 이미 밝힌바와 같이 여기서는 綜合的인 理論의 전개나 方法論을 제시하는데 목적을 두지 않았으며, 다만 貯水池의 操作問題와 最適化의 연계에 촛점을 두고 단편적일지라도 直觀的인 이해와 흥미유발에 도움을 주고자 노력했다. 또한 이에 관련되는 여러 기법을 참고자료와 더불어 소개하려는 의도에서 기술된 것이므로 內容展開의 切斷이나 비약을 곳곳에서 발견할 수 있었을 것이다.

저수지 조작을 크게 나누면 計劃을 목적으로 하는 確定論的 模型과 管理를 목적으로 하는 推計學的 模型이 있다.

單一貯水池가 아닌 저수지계를 대상으로 할때 확정론적 모형은 그 實用性이 충분히 입증되고 있지만, 추계학적 접근법은 특히 천이확률(transition probability)의 복잡성 때문에 實用이 거의 불가능한 편이다. 따라서 저수지군의 관리문제는 長期間(100년 이상)의 流入量資料를 생산하여 이를 확정론적으로 취급하는 implicit stochastic process가 권장되며 이에 따른 선형계획률이나 rule curve를 작성하는 것이 實務的으로는 바람직하다는 것이 筆者의 所見이다.

REFERENCES

1) Anderson, B.D.O., and Moore, J.B., *Optimal Filtering*, Prentice-Hall, 1979.
2) Avriel, M., *Nonlinear Programming, Analysis and Methods*, Prentice-Hall, 1976.
3) Becker, L., and Yeh, W.W.-G., "*Optimization of Real Time Operation of Multiple Reservoir Systems*," Water Resourcess Research, Vol. 10, No. 6, 1974, 1107—1112.
4) Bellman, R.E., and Dreyfus, S.E., *Applied Dynamic Programming*, Princeton University Press, 1962.
5) Dempster, M.A., *Stochastic Programming*, Academic Press, 1980.
6) Fleming, G.' *Computer Simulation Techniques in Hydrology*, American Elsevier Publishing Co., Inc., N.Y., 1975.
7) Goldfarb, D., "*Extension of Davidon's Variable Matrix Method to Maximization under Linear Inequality and Equality Constraints*, "J. of SIAM, Vol. 17, No. 4, 1969, 739—764.
8) Gottfried, B.S., and Weisman, J., *Introduction to Optimization Theory*, 1973, Copy.
9) Jenkins, B., *Time Series Analysis, Frecarsting and Control*, Holden-Day, 1970.
10) Kirk, D.E., *Optimal Control, Theory, An Introduction*, Prentice-Hall, 1970.
11) Larson, R.E., *State Increment Dynamic Programming*, American Elsevier Pub. Co., Inc., N,Y., 1998.
12) Lotkin, M., and Remage, R., "*Scaling and Error Analysis for Matrix Inversion by Partitioning*," Ann. Math. Statistics, 24, 1953, 428—439.
13) Loucks, D.P., et als, *Water Resource Systems Planning and Analysis*, Prentice-Hall, New Jersey, 1981.
14) Lueeberger, D.G., *Optimization by Vector Space Methods*, John Wiley and Sons, Inc., N.Y., 1969.
15) Meditch, J.S., *Stochastic Optimal Linear Estimation and Control*, M-G-H, 1969.
16) Revelle, C.E., and Kirby, W., "*The Linear Decision Rule in Reservoir Management and Design, Part 1. Development of the Stochastic Model*," Water Resources Research, Vol. 5, No. 4, 1969, 767—777.
17) Rosen, J.B., "*The Gradient Praojection Method for Nonlinear Programming, Part 1, Linear Constraints*," J. of SIAM, 1960, 181—217.
18) Young, G.G., "*Finding Reservoir Operating Rules*," J. of Hydraulic ASCE Vol. 93, No. HY6, 1967.