

有限要素法에 의한 多点支持軸系の 聯成自由橫振動
計算에 관한 研究

劉 光 澤* · 全 孝 重**

A Theoretical Calculation of Coupled Free, Transverse Vibration
of the Multi-supported Shaft System by the Finite
Element Method.

K. T. Yu, H. J. Jeon

Abstract

With the trend towards higher propulsive level, increasing ship's dimensions and heavier shaft systems supported by the hull structure of relatively stiffness in modern ships, transverse vibrations of propulsion shaft system have become one of the problems that should be predicted in the early design stage.

Regarding transverse vibrations, coupling terms such as oilfilm, gyroscope and hydrodynamic effect of the propeller exist between the vertical and horizontal vibration, furthermore for the shaft system with strut and bossing its physical properties incorporated with hull structure must be considered.

In order to predict the transverse vibratory condition of the propulsion shaft and take some appropriate countermeasures, it is necessary to make a fairly strict estimation of the vibratory behaviours of it.

In this paper, theoretical approach using the finite element method is investigated to calculate natural frequencies and vibration modes for coupled free transverse vibrations of shaft system in two planes.

Based on the method investigated a digital computer program is developed and is applied to calculate the above-mentioned vibrations of an experimental model shaft system.

The results of the calculation are compared with those of the experimental measurements and they show an acceptable agreement.

* 正會員, 大韓造船公社, ** 正會員, 韓國海洋大學

記號解說

- F_y : Y軸方向 橫荷重
- F_z : Z軸方向 橫荷重
- M_y : Y軸 둘레 모멘트
- M_z : Z軸 둘레 모멘트
- x, y, z : 直線 變位
- φ, φ_x, ϕ : 傾斜角變位
- ℓ : 要素의 길이
- d : 要素의 直徑
- I : 要素의 斷面 2次 모멘트
- E : 要素의 縱彈性 係數
- m : 質量의 合
- J_y, J_z : Y軸, Z軸 둘레의 質量慣性 모멘트의 合
- $\{U\}, \{y\}$: 變位의 列벡터 매트릭스
- $\{F\}$: 힘의 列벡터 매트릭스
- $\{K\}$: 剛性 매트릭스
- $\{M\}$: 質量 매트릭스
- $\{f\}$: 힘과 모멘트의 벡터
- ω : 起振力의 角振動數
- ψ : 起振力의 位相
- ξ : 強制振動 應答의 位相

1. 序 論

第二次大戰後 船舶推進軸系의 橫振動에 關한 研究는 Panagopoulos⁵⁾, Jasper⁶⁾ 등에 의해 一聯의 研究가 있었으며, 이들은 많은 假定을 包含하는 簡略化된 軸系 모델에 對한 略算式이었다.

近來에 이르러 高出力船이 나타남에 따라 推進器의 重量과 翼數가 增加하는데 反하여 船尾構造의 剛性은 相對的으로 低下하게 되었으며, 多軸船의 軸系는 支持剛性이 작은 스트러트나 보싱으로 支持되고 船尾形狀 關係로 베어링의 支持間隔이 크게 되었다. 이러한 結果로 翼數次의 共振回轉數가 常用回轉數까지 내려오는 問題가 생기게 되었다.

橫振動의 問題는 推進器, 船尾管베어링, 船尾管시일 등의 損傷原因이 되며 船體의 垂直方向, 水平方向의 振動을 일으키는 原因이 되므로 大

型高出力船 및 多軸船의 경우, 正確히 解析할 必要가 있다. 또한 스트러트와 같이 構造的으로 非對稱支持台, 베어링油膜, 자이로스콥프效果 등에 의한 聯成이 垂直方向, 水平方向 橫振動間에 存在하며, 보싱構造를 갖는 軸系는 隣接한 船體構造와 連繫하여 計算할 必要가 있으므로 理論的으로 嚴密한 計算을 遂行하는데는 여러가지 어려움이 있다.

本 論文에서는 船舶推進軸系의 初期設計段階에서 聯成自由橫振動의 固有振動數 및 振動모드를 豫測할 수 있도록 有限要素法에 의한 理論的 解析을 行하고, 이 解析의 內容을 바탕으로 하여 電算프로그램을 開發하였으며, 模型軸에 對한 計算結果를 實驗計測結果와 比較·檢討하였다.

2. 基礎理論

船舶推進軸系 橫振動을 有限要素法에 의하여 數值的 解析을 遂行하는 過程은⁷⁾ 아래와 같이 要約될 수 있다.

첫째: 計算對象이 되는 振動系를 適切한 數의 幾何學的 單純構造(Finite element)로 分割한다.

둘째: 分割된 要素들에 對하여 應力과 變形 및 힘과 變位의 關係를 求한다.

셋째: 分割된 要素間의 隣接面에서 變位가 같으며, 힘이 平衡인 條件으로 부터 運動方程式을 誘導한다.

넷째: 誘導된 運動方程式의 解를 求한다.

誘導된 方程式數는 未知變位數와 같으며, 任意의 起振力에 對하여 그 解는 物理的 應答을 주게 된다.

2.1 要素의 剛性 매트릭스

質量이 없는 要素 1-2를 Euler-Bernoulli beam이라 假定하고 Fig. 1과 같이 座標系를 定한다.

힘과 變位間의 關係는 Castigliano의 定理과 Maxwell-Betti의 相反定理를 利用하여 式(1)⁸⁾과 같이 된다.

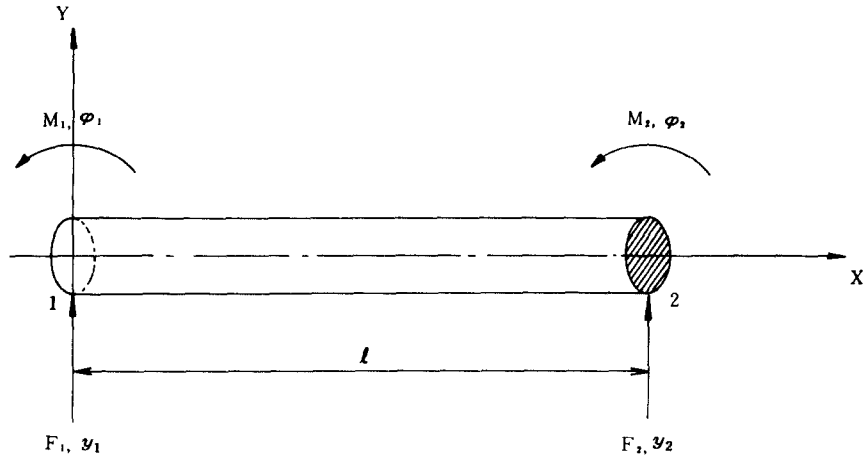


Fig.1 Forces and displacements in a beam element

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ \phi_1 \\ y_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

여기서, l : 보의 길이 E : 縱彈性係數
 I : 斷面 2次모멘트

式(1)은 要素의 軸方向에 對한 X-Y平面에서의 關係式이며 聯成이 存在하는 軸系 橫振動에 對해서는 Fig.2와 같이 軸方向에 對해서 서로

直交하는 X-Y, X-Z平面에서의 關係式을 求해야 한다.

이때 힘, 모멘트, 直線變位, 回轉變位는 벡터의 表示法이 適切하며 모멘트와 回轉變位의 方向은 오른손法則에 의한다.

Fig.2에서 軸方向變位와 橫方向變位間에는 聯成이 存在하지 않으므로 X-Y平面, X-Z平面에서 要素의 剛性要素는 式(1)을 두배로 擴張한 式(2)로^{7),11)} 된다.

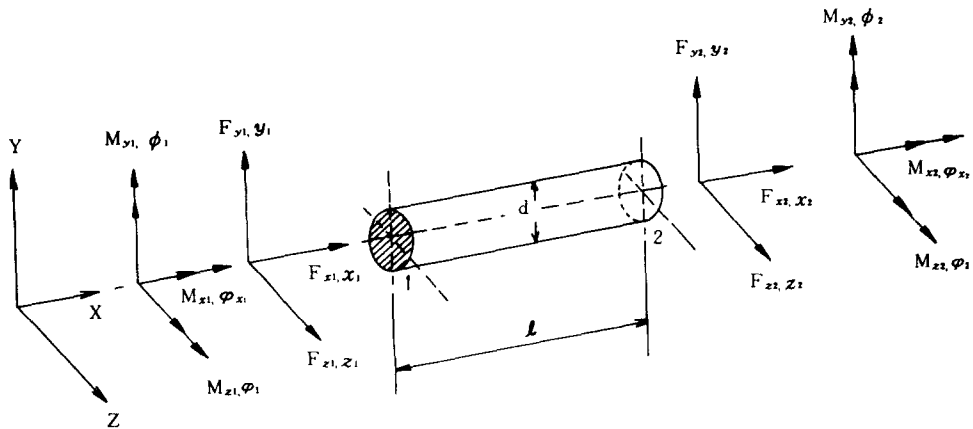


Fig.2 Beam element and vectorial nomenclature of its end forces, moments, displacements and rotations.

$$\begin{pmatrix} F_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{z1} \\ M_{y1} \\ F_{y2} \\ M_{z2} \\ F_{z2} \\ M_{y2} \end{pmatrix} = \frac{EI}{\ell^3} \begin{pmatrix} 12 & 6\ell & 0 & 0 & -12 & 6\ell & 0 & 0 \\ 6\ell & 4\ell^2 & 0 & 0 & -6\ell & 2\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & -6\ell & 0 & 0 & -12 & -6\ell \\ 0 & 0 & -6\ell & 4\ell^2 & 0 & 0 & 6\ell & 2\ell^2 \\ -12 & -6\ell & 0 & 0 & 12 & -6\ell & 0 & 0 \\ 6\ell & 2\ell^2 & 0 & 0 & -6\ell & 4\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 6\ell & 0 & 0 & 12 & 6\ell \\ 0 & 0 & -6\ell & 2\ell^2 & 0 & 0 & 6\ell & 4\ell^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \phi_1 \\ z_1 \\ \phi_1 \\ y_2 \\ \phi_2 \\ z_2 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

式(2)에서 보要素의 Y軸, Z軸 둘레의 斷面 2 次 모멘트는 $\frac{\pi d^4}{64}$ 로 같게 된다.

式(2)를 매트릭스 表示에 의해 簡略하게 쓰면

$$\{F\} = [K] \{U\} \quad (3)$$

式(3)에서 $\{F\}$ 는 힘의 列매트릭스, $[K]$ 는 剛性매트릭스, $\{U\}$ 는 變位の 列매트릭스이며, X-Y平面과 X-Z平面에서 보要素의 剛性매트릭스는 實對稱 (8×8)次 매트릭스로 됨을 알 수

2.2 剛性매트릭스를 利用한 運動方程式의 表示

要素의 端點에 質量中心이 그대로 維持되도록 要素의 質量이 集中된 集中質量에 의한 慣性力을 導入한다^{7), 11)}.

Fig. 3에서 두個의 보要素 i 와 $i+1$ 이 接하는 點 n 이 주어진다던

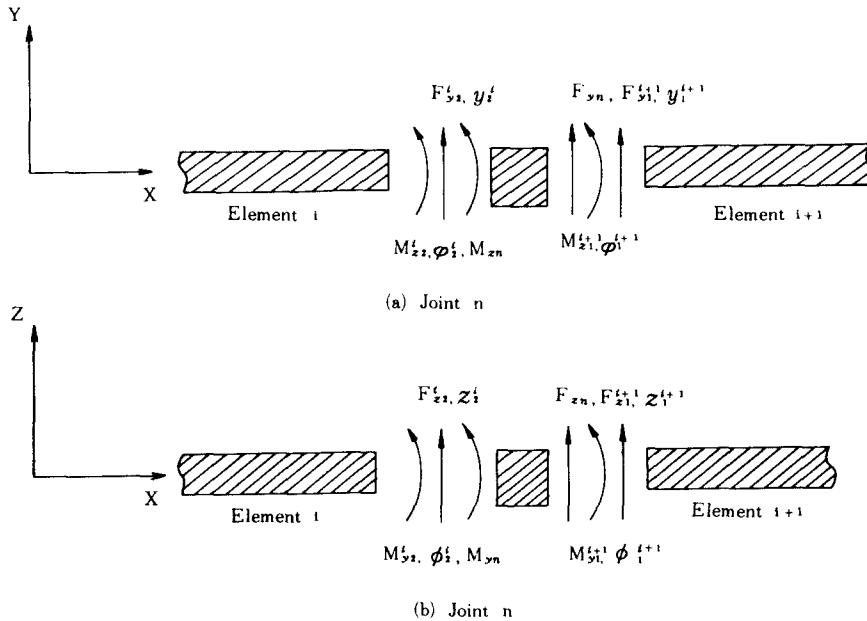


Fig. 3 Joint n with the adjacent elements.

X-Y平面, X-Z平面에서의 變位와 傾斜는 같아야 하므로

$$\begin{cases} y_2^i = y_1^{i+1} \equiv y_n \\ \phi_2^i = \phi_1^{i+1} \equiv \phi_n \end{cases} \quad (4)$$

$\left. \begin{aligned} z_2^i &= z_1^{i+1} \equiv z_n \\ \phi_2^i &= \phi_1^{i+1} \equiv \phi_n \end{aligned} \right\}$ 變位가 y_n, z_n , 傾斜가 ϕ_n, ϕ_n 인 點 n 에서 힘과 모멘트의 平衡으로 부터

$$\left. \begin{aligned} F_{y_n} - F_{y_2}^i - F_{y_1}^{i+1} - m_{y_n} \ddot{y}_n &= 0 \\ M_{z_n} - M_{z_2}^i - M_{z_1}^{i+1} - J_{z_n} \ddot{\phi}_n &= 0 \\ F_{z_n} - F_{z_2}^i - F_{z_1}^{i+1} - m_{z_n} \ddot{z}_n &= 0 \\ M_{y_n} - M_{y_2}^i - M_{y_1}^{i+1} - J_{y_n} \ddot{\phi}_n &= 0 \end{aligned} \right\} (5)$$

$$[M] = \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & m_{23} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m_{nn} \end{pmatrix} (8)$$

여기서, m_{y_n}, m_{z_n} : i 요소와 $i+1$ 요소의 質量의 切半의 合

J_{y_n}, J_{z_n} : Y軸, Z軸 둘레의 質量慣性 모멘트의 合

F_{y_n}, F_{z_n} : 外力

M_{y_n}, M_{z_n} : 外部 모멘트

위의 8個의 값이 點 n 에 集中되어 있으므로 點 n 의 運動方程式은

$$\left. \begin{aligned} m_{y_n} \ddot{y}_n + (F_{y_2}^i + F_{y_1}^{i+1}) &= F_{y_n} \\ J_{z_n} \ddot{\phi}_n + (M_{z_2}^i + M_{z_1}^{i+1}) &= M_{z_n} \\ m_{z_n} \ddot{z}_n + (F_{z_2}^i + F_{z_1}^{i+1}) &= F_{z_n} \\ J_{y_n} \ddot{\phi}_n + (M_{y_2}^i + M_{y_1}^{i+1}) &= M_{y_n} \end{aligned} \right\} (6)$$

式(6)에서 要素 端點의 힘과 모멘트는 式(2)에 의해 變位와 기울기로 表示할 수 있으며, 이들 變位는 隣接한 두 要素의 基本剛性 매트릭스로부터 求해진다.

모든 要素의 端點에 對한 運動方程式은

$$[M]\{\ddot{y}\} + [K]\{y\} = \{f\} (7)$$

여기서, $[M]$: 全體 質量 매트릭스

$[K]$: 全體 剛性 매트릭스

$\{y\}$: 各 端點의 變位 벡터

$\{f\}$: 各 端點에 作用하는 힘과 모멘트의 벡터

全體 剛性 매트릭스 $[K]$ 는 式(6), (7)로부터 各要素의 基本剛性 매트릭스를 合하여 求한다.

式(7)에는 全體系에 對하여 計算하여야 하는 未知數와 같은 數의 方程式이 包含된다.

2.3 質量 매트릭스

모든 質量은 各 要素의 質量重心을 그대로 維持하도록 要素의 端點에 分割, 集中하였기 때문에 質量 매트릭스는 主對角線에만 값을 갖는 對角 매트릭스로 된다.

2.4 振動方程式의 解法

起振力은 週期的이며 이 중에서 가장 重要한 翼數次(Blade-frequency)만 생각한다. 따라서 起振 벡터는

$$\{f\} = \begin{pmatrix} f_1 \cos(\omega t + \phi_1) \\ f_2 \cos(\omega t + \phi_2) \\ \vdots \\ f_n \cos(\omega t + \phi_n) \end{pmatrix} (9)$$

여기서, ϕ_i : i 번째 起振力의 位相

ω : 軸의 角振動數 \times 推進器 翼數

f_i : i 번째 質點에서의 起振力 振幅

이에 對한 應答은

$$\{y\} = \begin{pmatrix} y_1 \cos(\omega t + \xi_1) \\ y_2 \cos(\omega t + \xi_2) \\ \vdots \\ y_n \cos(\omega t + \xi_n) \end{pmatrix} (10)$$

여기서, y_i : i 번째 質點의 應答 振幅

ξ_i : i 번째 質點의 位相

$$\{\ddot{y}\} = \frac{d^2\{y\}}{dt^2} = -\omega^2\{y\} \text{ 이므로}$$

運動方程式은 結局

$$-\omega^2[M]\{y\} + [K]\{y\} = \{f\} (11)$$

自由振動만을 考慮하여 $\{f\} = 0$ 이라 놓으면

$$-\omega^2[M]\{y\} + [K]\{y\} = \{0\}$$

$$|[K] - \omega^2[M]| = 0 (12)$$

으로 되어 固有值 問題로 된다.

固有值의 計算에는 여러가지 方法이 있으며 本論文에서는 $[K]$ 와 $[M]$ 이 實對稱 매트릭스 일때 計算이 便利한 Jacobi法을^{10), 11)} 利用하였다.

3. 模型軸系에 對한 計算 및 實測值와의 比較檢討

앞서 檢討한 理論的 內容을 確認하기 위하여

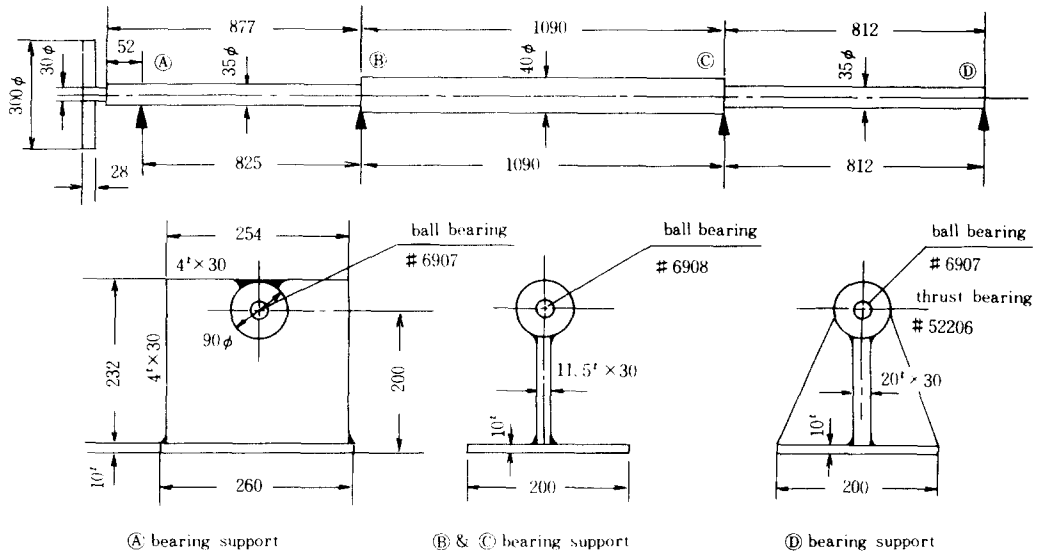


Fig. 4 Shaft arrangement for calculation model

模型軸에 대하여 計算을 行하였으며 計算結果와 實測結果를 比較, 考察하였다. 模型軸 및 實測結果는 參考文獻²⁾에서의 것을 引用하였다.

3.1 模型軸 및 計算資料²⁾

Fig. 4는 計算對象인 模型軸의 配置圖이며 軸系는 圓板, 軸, 분베어링, 스톨스트 베어링, 베

어링케이싱 및 베어링 支持臺로 되어있다.

軸은 軟鋼材로서 圓板과 支持臺는 軟鋼板으로, 베어링케이싱은 鍛鋼으로 되어 있으며 軸系裝置는 剛性이 높도록 設計된 鋼板製臺(두께 15mm)上에 設置되어 있다.

Fig. 4에서 베어링 支持部 (A, B, C, D)에서의 支持臺 스프링常數 K 는 Table. 1과 같다.

Table 1. Spring constant of bearing supports.

(unit: Kgf/Cm)

Direction	Position Values	(A) part(K_1)		(B) part(K_2)		(C) part(K_3)		(D) part(K_4)	
		Theoretical	Measured	Theoretical	Measured	Theoretical	Measured	Theoretical	Measured
Horizontal		44.14	47.16	353.9	375.0	353.9	375.0	353.9	357.0
Vertical		404.9	425.5	455,700	476,200	455,700	476,200	455,700	476,200

Table 2. Concentrated mass and diametric moment of inertia.

Items	Concentrated mass (kgf. cm. ⁻¹ sec ²)	Moment of inertia (kgf. cm. sec ²)
(A) part casing	0.0012244	0
(B) part casing	0.0010714	0
(C) part casing	0.0010714	0
Disc	0.015612	0.87818

Fig. 4에서 隣接하는 두 支持臺 間의 部材는 3個의 要素로 分割하였으며 分割要素의 入力資料는 Table. 3과 같다.

스프링常數, 集中質量, 質量慣性모멘트의 값은 Table 1, 2에서의 값을 利用하였으며 軸材料의 縱彈性係數 E 는 2.1×10^6 (kgf/cm²), 軸의 單位體積當 質量 ρ 는 8.0102×10^{-6} (kgf·sec²/cm⁴)로 취하였다.

3.2 計算모델과 入力資料

數值計算을 위한 計算모델은 Fig. 5와 같다.

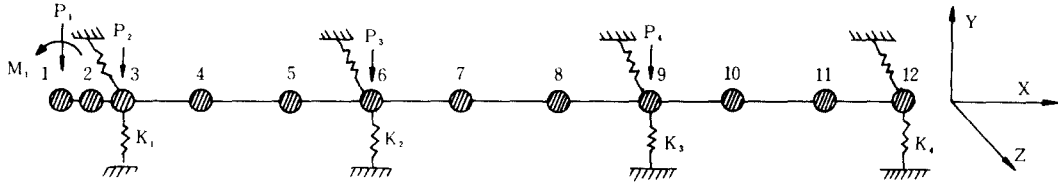


Fig. 5 Reduced model for calculation.

Table 3. Dimensions of each element.

No. of section	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Length(cm)	2.1	5.2	27.5	27.5	27.5	36.0	36.0	37.0	27.2	27.2	27.2
Out. dia(cm)	3.0	3.5	3.5	3.5	3.5	4.0	4.0	4.0	3.5	3.5	3.5

3.3 計算結果

Table. 4는 電子計算機의 計算結果로 얻어진 模型軸系의 垂直方向, 水平方向에서의 固有振動

數中 가장 낮은것 2個씩을 理論的으로 計算한 스프링常數 및 實測한 스프링常數에 對하여 보인 것이다.

Table 4. Calculated natural frequency.

(a). By theoretical K values

Natural frequency	Omega square	Circular frequency	frequency (Hz)	frequency (Cpm)
1	0.3237390E+04	56.90	9.06	543.34
2	0.3532784E+05	187.96	29.91	1794.86
3	0.1887686E+05	137.39	21.87	1312.01
4	0.2109179E+06	459.26	73.09	4385.59

(b). By measured K values

Natural frequency	Omega square	Circular frequency	frequency (Hz)	frequency (Cpm)
1	0.3354322E+04	57.92	9.22	553.06
2	0.3715002E+05	192.74	30.68	1840.57
3	0.1972081E+05	140.43	22.35	1341.02
4	0.2109784E+05	459.32	73.10	4366.22

Table. 5는 두 方向에서의 最低次 固有振動數에 對한 振動모오드를 나타내고 있다.

Table 5. Calculated vibration mode.

(a). By theoretical K values.

NO. 1 Vibration mode		NO. 3 Vibration mode	
0.1000000E+01	0.1222297E-01	0.1000000E+01	-0.1769179E-01
0.9743367E+00	0.1219937E-01	0.9629676E+00	-0.1753842E-01
0.9111199E+00	0.1210347E-01	0.8730405E+00	-0.1696458E-01
0.5930020E+00	0.1087282E-01	0.4654935E+00	-0.1276160E-01
0.3229293E+00	0.8576211E-02	0.1713638E+00	-0.8564550E-02
0.1324947E+00	0.5062863E-02	0.9525433E-04	-0.5770150E-02
0.1903043E-02	0.2350272E-02	-0.7232970E-01	-0.4870873E-03
-0.4803553E-01	0.5821639E-03	-0.5315911E-01	0.1277956E-02
-0.5131636E-01	-0.2330174E-03	-0.9881528E-04	0.1268737E-02
-0.4038725E-01	-0.5516405E-03	0.1935264E-01	0.2241181E-03
-0.2240274E-01	-0.7496683E-03	0.1565334E-01	-0.4273742E-03
-0.7916680E-03	-0.1704665E-03	0.2028043E-05	-0.5497938E-03

(b) By measured K values.

NO. 1 Vibration mode		NO. 3 Vibration mode	
0.1000000E+01	0.1234373E-01	0.1000000E+01	-0.1788188E-01
0.9740806E+00	0.1231928E-01	0.9626161E+00	-0.1770101E-01
0.9102527E+00	0.1221913E-01	0.6719027E+00	-0.1710069E-01
0.5894403E+00	0.1095237E-01	0.4628959E+00	-0.1275130E-01
0.3177605E+00	0.8611865E-02	0.1699119E+00	-0.8505151E-02
0.1270850E+00	0.5042639E-02	0.8704995E-04	-0.3736223E-02
-0.2066621E-02	0.2294830E-02	-0.7177925E-01	-0.4856787E-03
-0.4976876E-01	0.5179415E-03	-0.5280629E-01	0.1268372E-02
-0.5096314E-01	-0.2763008E-03	-0.9394699E-04	0.1261270E-02
-0.3941364E-01	-0.5565407E-03	0.1925431E-01	0.2232807E-03
-0.2164273E-01	-0.7316167E-03	0.1557969E-01	-0.4252056E-03
-0.6621138E-03	-0.7913108E-03	0.1933216E-05	-0.6468338E-03

Fig. 6은 Table. 5의 振動모오드를 그림으로 나타낸 것이다.

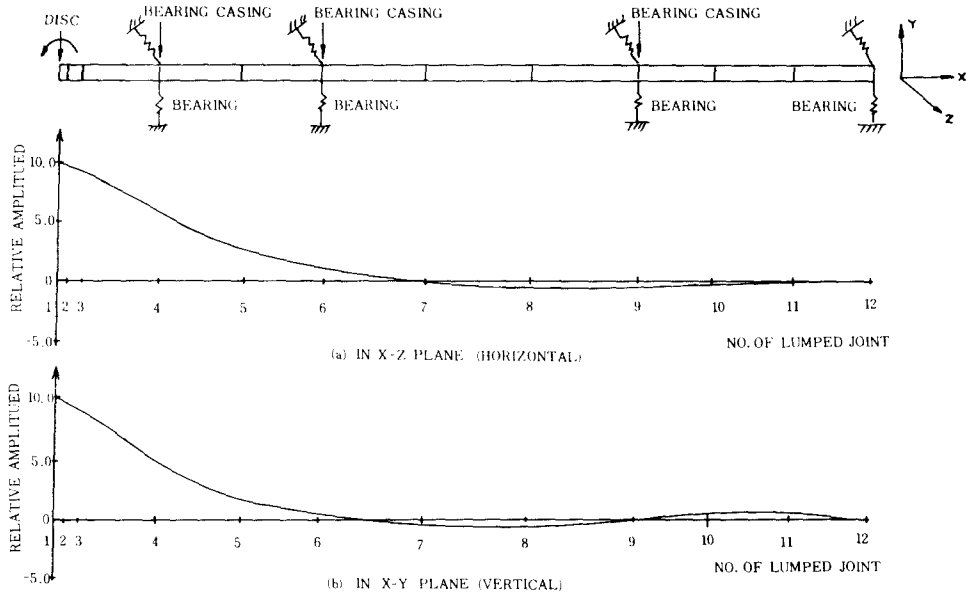


Fig. 6 Vibration modes of the lowest natural frequency.

3-4 計算結果와 實測値의 比較檢計

Table. 4의 計算結果와 實測値의 比較結果는 Table. 6과 같다.

Table 6. Compared result of natural frequency.

Calculation method	Vibration Frequency	Horizontal Vibration			Vertical vibration		
		Circular frequency (rad/sec)	Frequency (cpm)	Difference to A (%)	Circular frequency (rad/sec)	Frequency (cpm)	Difference to A (%)
Experimentally measured values	A	58.4	558		138.2	1320	
By theoretical K value	B	56.9	543	-2.57	137.4	1312	-0.58
By measured K value	C	57.9	553	-0.86	140.4	1341	+1.45

Table. 6은 水平方向, 垂直方向 橫振動의 最低次 固有振動數를 各各 比較하였다.

水平方向 橫振動에 對해서는 實測値와 比較하여 理論値 K 에 의한 計算結果는 2.57% 낮게, 實測値 K 에 의한 計算結果는 0.86% 낮게 나타났으며, 垂直方向 橫振動에 對해서는 實測値와 比較하여 理論値 K 및 實測値 K 에 의한 計算結果는 各各 0.58% 낮게, 1.45% 높게 나타났다. 따라서 理論的 計算結果는 實測値와 一致하고 있음을 確認할 수 있었다.

4. 結 論

本 研究에서는 船舶의 推進軸系와 關聯하여 多點支持軸系の 聯成自由橫振動의 動的舉動을 有限要素法에 의하여 理論的으로 解析하고, 이 理論的 內容을 바탕으로 電算프로그램을 開發하였다.

또한, 開發된 電算프로그램의 有用性을 確認하기 위하여 模型軸에 對한 計算을 行하였으며 計算結果를 實測結果와 比較檢討 하였다.

以上の 內容을 다음과 같이 要約할 수 있다.

1) 多點支持軸系の 振動解析을 有限要素法에 의하여 行하였으며 이것을 바탕으로 電算프로그램을 開發하였다.

2) 模型軸系에 對한 計算結果는 實測結果와 一致하였으므로 上記의 電算프로그램은 多點支持軸系の 聯成自由橫振動 解析에 도움이 될 것으로 생각된다.

3) 船舶의 實際 推進軸系 橫振動에 關해서는, 여기서 具體的으로 다루지 못한 보싱, 스트럿트 등의 非對稱 剛性, 推進器의 流體力學的 聯成, 자이로스코프 効果等外에 油膜의 剛性, 推進器의 起振力, 系の 各種 減衰等 定量的으로 計算할 수 없는 要素들이 많이 存在하므로 그 動的 舉動을 確認 하는데 어려움이 있다.

따라서 理論的 計算과 正確한 實測을 並行하여 이들 要素들의 特性을 밝혀가야 할 것이다.

向後, 이러한 努力에 本 論文의 內容이 도움이 될 것으로 期待한다.

參 考 文 獻

1. 全孝重·金喜澈, “船舶推進軸系の 橫振動 計算에 관한 研究”, 韓國舶用機關學會誌 第3卷 1號, 1979, p. 2~18.
2. 全孝重·安時榮, “傳達매트릭스法에 의한 多點支持軸系の 聯成振動計算에 관한 研究”, 韓國舶用機關學會誌 第7卷 1號, 1983, p. 46~93.
3. 全孝重·趙鏞守, “變化하는 斷面의 門型構造物의 振動計算에 관한 研究”, 韓國舶用機關學會誌 第9卷 3號, 1985, p. 214~224.
4. Jasper N.H. and Rupp L.A., An Experimental and Theoretical Investigation of Propeller Shaft Failures, SNAME, Vol.60, 1952, p. 314~381.
5. Panagopoulos E., Design Stage Calculation of Torsional, Axial and Lateral Vibration of Marine Shafting, SNAME, Vol. 58, 1952, p. 329~384.
6. Vassilopoulos L and Bradshaw R., Coupled Transverse Shaft Vibrations of Modern Ships, ISP, Vol. 21, No. 239, 1974 p. 193~219.
7. Hylarides S., Transverse Vibration of Ship's Propulsion System, ISP, Vol. 22, No. 252, 1975, p. 275~288
8. Wevers Jr. L.J., Transverse Vibrations of Ship's Propulsion System, ISP, Vol. 22, 1975, p. 375~384.
9. Rockey K.C., Evans H.R., Griffiths D. W. and Nethercot D.A, The Finite Element Method, Crosby Lockwood Staples in London, 1975.
10. Bathe K.J. and Wilson E.L., Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice-Hall, Inc., 1976.
11. Mario Paz, Structural Dynamics, Litton Education Publishing, Inc., 1980.
12. Tse F.S., Morse I.E, and Hinkle R.T., Mechanical Vibrations, Allyn and Bacon Inc., 1978.