

마이크로 프로세서를 이용한最適位置制御에 관한 研究

梁 注 鎬* · 河 注 植**

A Study on Optimal Position Control Using a Microprocessor

J. H. Yang, J. S. Ha

Abstract

Recently, being due to development of a small microprocessor, microprocessor have found increasing application as a digital controller in the control system.

In this paper, authors analyze theoretically the continuous PID controller of a position control system with servomotor, and program the microprocessor as digital PID controller by an assembly language, and search the optimal parameters of the digital PID controller which make the smallest integral square error criterion for a performance criterion, and take experiment the indicial responses with optimal parameter.

The results are following.

- 1) PD-behavior controller was better than P-behavior controller.
- 2) The smaller the sampling times of P-behavior controller and PD-behavior controller were, the better the indicial responses of the discrete system were.
- 3) Using a small microprocessor could replace the traditional continuous PID controller for good control.

(記號說明)

F : Motor의 粘性 摩擦係數
 R_a : 〃 電氣子 抵抗
 K_t : 〃 回轉力 상수
 K_b : 〃 逆起電力 상수
 K_A : 감쇄기 利得
 K_{PA} : 프리앰프리파이어 利得
 K_g : 감속기어의 比
 J : 慣性車의 慣性

K_c : 시스템의 이득
 T_c : 시스템의 時定數
 V_1 : 감쇄기 入力電壓
 θ_m : 인디케이터 出力
 K_P : 制御器의 利得
 T_D : 微分時間
 T : 샘플링 타임
 K_P : 制御器의 利得의 最適值
 \hat{T}_D : 微分時間의 最適值

* 正會員, 慶南專門大學

** 正會員, 韓國海洋大學

1. 序 論

最近 半導體工業의 눈부신 發展으로 저렴하던 서도 精度높은 소형 마이크로 컴퓨터가 널리 보급되었고, 이 마이크로 컴퓨터의 應用分野는 대단히 넓게 되었다. 特히 최근에 제측기 등에 연결하여 自動 計測을 行하는 計測分野와 各種 制御對象에 연결하여 制御器(controller)로 사용하는 制御分野에 있어서도 마이크로 컴퓨터의 活用度가 높아지고 있다.^{1), 2), 3)}

本 研究에서는 서어보모타를 利用하여 位置制御를 하는 制御系統에 있어서 먼저 制御器로서 連續 PID 制御器를 利用할 경우에 대하여 解析的인 方法으로 考察하고 다음 마이크로 프로세서를 제어기로 하여 制御를 行하는 경우에 대하여 그 制御特性和 제어기의 最適設計 問題에 대하여 考察하기로 한다. 마이크로 프로세서를 PID 制御器로 利用될 수 있도록 機械語(Assembly Language)로 프로그래밍 하고 制御系統의 性能 評價에 있어서는 誤差二乘面積을 評價函數로 도입하고³⁾ 最適 퍼래미터를 數值計算으로 추정한다. 또한 應答實驗을 통하여 最適 퍼래미터의 妥當性和 마이크로 프로세서에 의한 디지털 PID 制御器의 優秀性を 檢査한다.

서어보모타를 利用한 位置制御 系統에 있어서 제어기로서 PID 制御器를 利用할 경우 비례-미분동작(PD동작)이 양호하다고 하는 報告가 있으므로⁴⁾ 本 研究에서도 P동작, PD동작을 中心으로 실험을 行하기로 한다.

2. 制御系統의 傳達函數 및 블록선도

서어보모타와 마이크로 프로세서를 利用하여 位置制御를 하는 피드백(Feed-Back) 制御系統의 블록선도는 Fig. 1과 같이 表示할 수 있다.⁵⁾

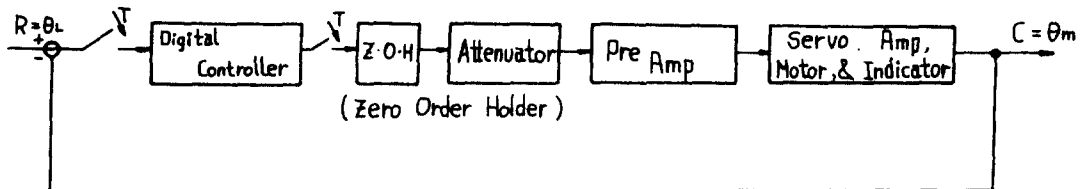


Fig. 1. Block diagram of position control system with digital controller

Fig. 1의 감쇄기(Attenuator), 프리앰프리파이어(Free Amplifier), 서어보모타(Servo-motor) 및 인디케이터(Indicator)의 傳達函數를 求하면 式(1)과 같이 된다.⁶⁾

$$\frac{\theta_m(S)}{V_1(S)} = \frac{K_C}{S(1+T_C S)} \quad (1)$$

$$\text{단, } \begin{cases} K_C = \frac{K_A \cdot K_{PA} \cdot K_i \cdot K_g}{F \cdot R_a + K_i \cdot K_b} \\ T_C = \frac{J \cdot R_a}{F \cdot R_a + K_i \cdot K_b} \end{cases}$$

그리고 디지털 制御器가 PID 動作을 한다고 하면 그 블록선도는 Fig. 2와 같이 表示할 수 있고, 傳達函數는 다음과 같다.^{10, 11)}

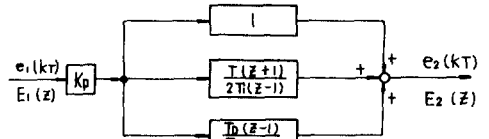


Fig. 2. Block diagram of digital PID controller.

$$\begin{aligned} G_{PID}(Z) &= \frac{E_2(Z)}{E_1(Z)} \\ &= K_p \left(1 + \frac{T(Z+1)}{2T_i(Z-1)} + \frac{T_D(Z-1)}{T_i \cdot Z} \right) \\ &= K_p \frac{A_1 Z^2 + A_2 Z + A_3}{Z(Z-1)} \quad (2) \end{aligned}$$

$$\text{단, } \begin{cases} A_1 = 1 + \frac{T}{2T_i} + \frac{T_D}{T} \\ A_2 = -\left(1 - \frac{T}{2T_i} + \frac{2T_D}{T} \right) \\ A_3 = \frac{T_D}{T} \end{cases}$$

또, Z. O. H.의 傳達函數는 다음과 같이 된다.⁷⁾

$$G_{ZOH}(S) = \frac{1 - e^{-ST}}{S} \quad (3)$$

이상과 같이 求한 전달函數를 利用하여 블록 선도를 그리면 Fig. 3과 같이 된다.

Fig. 3에서 開回路 전달函數 G(Z)는

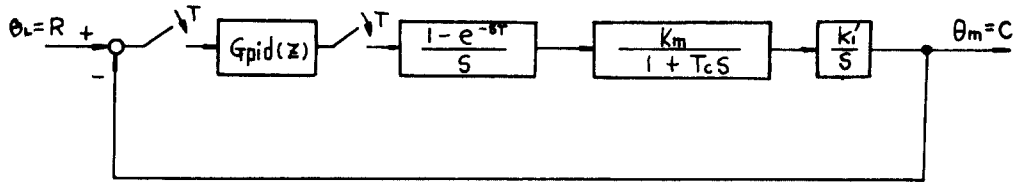


Fig. 3. Block diagram of control system

$$G(Z) = G_{PID}(Z) \cdot z \left[\frac{1 - e^{-sT}}{s} \cdot \frac{K_c}{s(1 + T_c s)} \right]$$

$$= G_{PID}(Z) \cdot (1 - Z^{-1}) \cdot \frac{K_c \{ [T + T_c(e^{-\frac{T}{T_c}} - 1)] Z^2 + [T_c - (T + T_c) \cdot e^{-\frac{T}{T_c}}] Z \}}{(Z - 1)^2 (Z - e^{-\frac{T}{T_c}})} \quad (4)$$

으로 되고 閉回路 전달함수 $F(Z)$ 는

$$F(Z) = \frac{C(Z)}{R(Z)} = \frac{G(Z)}{1 + G(Z)}$$

$$= \frac{G_{PID}(Z) \cdot (Z - 1) \cdot K_c \{ [T + T_c(e^{-\frac{T}{T_c}} - 1)] Z + [T_c - (T + T_c) \cdot e^{-\frac{T}{T_c}}] \}}{(Z - 1)^2 (Z - e^{-\frac{T}{T_c}}) + G_{PID}(Z) \cdot (Z - 1) K_c \{ [T + T_c(e^{-\frac{T}{T_c}} - 1)] Z + [T_c - (T + T_c) \cdot e^{-\frac{T}{T_c}}] \}} \quad (5)$$

으로 되고 誤差函數 $E_1(Z)$ 는

$$E_1(Z) = R(Z) - C(Z) = \frac{1}{1 + G(Z)} \cdot R(Z)$$

$$= \frac{Z(Z - 1)^2 (Z + B_3)}{Z(Z - 1)^2 (Z + B_3) + K_p(A_1 Z^2 + A_2 Z + A_3) \cdot K_c(B_4 Z + B_5)} \cdot R(Z) \quad (6)$$

$$\text{단, } \begin{cases} B_3 = -e^{-\frac{T}{T_c}} \\ B_4 = T + T_c(e^{-\frac{T}{T_c}} - 1) \\ B_5 = T_c - (T + T_c)e^{-\frac{T}{T_c}} \end{cases} \quad (6')$$

으로 된다.

單位階段 入力에 대한 오프셋(off-set)를 ϵ_p 라 하면 最終値定理에 의해

$$\epsilon_p = \lim_{Z \rightarrow 1} (1 - Z^{-1}) \cdot E_1(Z) = 0 \quad (7)$$

이 된다.

디지털 제어기의 出力 $E_2(Z)$ 는

$$E_2(Z) = E_1(Z) \cdot G_{PID}(Z)$$

$$= \frac{P_1 \cdot Z^4 + P_2 \cdot Z^3 + P_3 \cdot Z^2 + P_4 \cdot Z + P_5}{Z^4 + (B_1 + Q_1)Z^3 + (B_2 + Q_2)Z^2 + (B_3 + Q_3)Z + Q_4} \cdot R(Z) \quad (8)$$

$$\text{단, } \begin{cases} B_1 = -e^{-\frac{T}{T_c}} - 2 \\ B_2 = 2e^{-\frac{T}{T_c}} + 1 \\ B_3 = -e^{-\frac{T}{T_c}} \\ Q_1 = K_p \cdot K_c \cdot A_1 \cdot B_4 \\ Q_2 = K_p \cdot K_c \cdot (A_1 A_5 + A_2 B_4) \\ Q_3 = K_p \cdot K_c \cdot (A_2 A_5 + A_3 B_4) \\ Q_4 = K_p \cdot K_c \cdot A_3 \cdot A_5 \\ P_1 = K_p \cdot A_1 \\ P_2 = K_p \cdot (A_1 A_4 + A_2) \end{cases} \quad (8')$$

$$\begin{cases} P_3 = K_P(A_1A_5 + A_2A_4 + A_3) \\ P_4 = K_P(A_2A_5 + A_3A_4) \\ P_5 = K_P A_3 A_5 \\ A_4 = -(1 + e^{-\frac{T}{T_c}}) \\ A_5 = e^{-\frac{T}{T_c}} \end{cases}$$

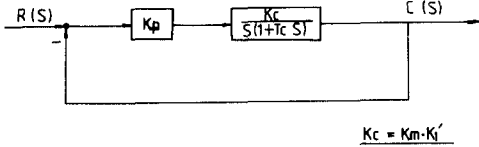
으로 된다.

3. 連續 시스템의 最適 퍼래미터

Fig. 1에서 디지털 PID 제어가 아니고 連續 PID 제어인 경우에 대하여 제어가 P동작, PD동작을 할 경우 最適 퍼래미터를 解析的으로 求해 보자.

(1) P動作인 경우

제어가 P동작을 할 경우 Fig. 3은 Fig. 4와 같이 된다. Fig. 4에서 閉回路 傳達函數 $F_1(S)$ 는



$$K_c = K_m \cdot K'_c$$

Fig. 4. Block diagram of continuous system with P-controller

$$\begin{aligned} F_1(S) &= \frac{K_c K_p / T_c}{S^2 + \left(\frac{1}{T_c}\right) S + \frac{K_c K_p}{T_c}} \\ &= \frac{K}{S^2 + \left(\frac{1}{T_c}\right) S + \frac{K}{T_c}} \end{aligned} \quad (9)$$

단, $K = K_c \cdot K_p$

으로 되고 誤差函數 $E_1(S)$ 는

$$E_1(S) = \frac{S^2 + \left(\frac{1}{T_c}\right) S}{S^2 + \left(\frac{1}{T_c}\right) S + \frac{K}{T_c}} \cdot R(S) \quad (10)$$

으로 되고 입력 $R(S)$ 를 單位階段 入力으로 하면 誤差函數는

$$E_1(S) = \frac{S + \frac{1}{T_c}}{S^2 + \left(\frac{1}{T_c}\right) S + \frac{K}{T_c}} \quad (10)'$$

으로 되고, 읍셋트(off-set) $\{\varepsilon_p$ 는 다음과 같이 0으로 된다.

$$\varepsilon_p = \lim_{S \rightarrow 0} S \cdot E_1(S) = 0$$

i) 安定判別

式(9)로부터 特性方程式은

$$S^2 + \left(\frac{1}{T_c}\right) S + \frac{K}{T_c} = 0$$

으로 되고, 홀비쯔 판별법(Hurwitz method)에 의하여

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_c} &> 0, \quad \frac{K}{T_c} < 0 \\ H_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 = \frac{K}{T_c^2} > 0 \end{aligned}$$

으로 되어 결국 $K > 0$ 이면 된다.

ii) 最適 퍼래미터

誤差二乘面積을 F_{21} 이라 하면

$$F_{21} = \int_{-\infty}^{\infty} e^2(t) dt$$

으로 되고 Parseval의 定理에 의하

$$\begin{aligned} F_{21} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |E(j\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} E(j\omega) E(-j\omega) d\omega \end{aligned}$$

($\because |E(j\omega)|^2$ 은 ω 에 대해 우함수 이므로)

으로 된다. 또한 式(10)을 다음과 같이 두면

$$E_1(S) = \frac{N(S)}{D(S)} = \frac{S + \left(\frac{1}{T_c}\right)}{S^2 + \left(\frac{1}{T_c}\right) S + \frac{K}{T_c}}$$

$$D(S) = S^2 + \left(\frac{1}{T_c}\right) S + \frac{K}{T_c}$$

$$N(S)N(-S) = -S^2 + \left(\frac{1}{T_c}\right)^2$$

으로 되고, 여기서 $a_0 = 1, a_1 = \frac{1}{T_c}, a_2 = \frac{K}{T_c},$

$b_0 = -1, b_1 = \frac{1}{T_c^2}$ 로 둘 수 있고, 이 때 F_{21} 은 式(11)로 구할 수 있다.

$$F_{21} = (-1)^{n-1} \frac{B}{2a_0 H_n} \quad (11)$$

$$\therefore F_{21} = (-1)^1 \frac{B}{2H_2}$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \frac{K}{T_c^2}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 \\ a_0 & a_2 \end{bmatrix} = -\left(\frac{K}{T_c} + \frac{1}{T_c^2}\right)$$

$$\therefore F_{21} = \frac{K + \frac{1}{T_c}}{\frac{2}{T_c} \cdot K} \quad (11)'$$

評價函數 J_1 을 $J_1 = \frac{2}{T_c} \cdot F_{21}$ 라 두면

$$J_1(K) = \frac{K + \frac{1}{T_c}}{K}$$

$$J_1(x) = \frac{x+a}{x} = 1 + \frac{a}{x} \quad (12)$$

단, $\begin{cases} x=K > 0 \\ a = \frac{1}{T_c} > 0 \end{cases}$

이 되어 x 값이 크게 되면, 즉 K_p 값이 크게 되면 평가함수 J_1 의 값을 작게 할 수 있다. 式(12)를 그림으로 表示하면 Fig. 5와 같다.

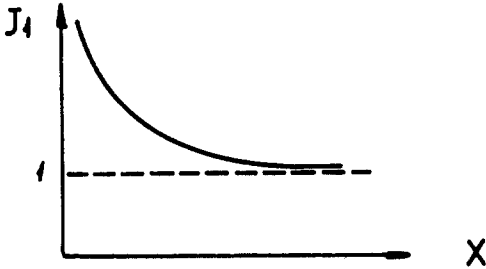


Fig. 5. Criterion function curve continuous control system with P-controller

(2) PD動作인 경우

制御器가 PD동작을 할 경우는 Fig. 6과 같이 表示할 수 있고, 閉回路 傳達函數 $F_2(S)$ 는 式(13)과 같이 된다.

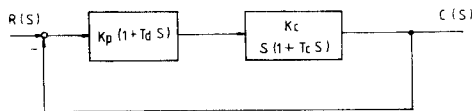


Fig. 6. Block diagram of continuous control system with PD-controller

$$F_2(S) = \frac{\frac{K}{T_c}(1+T_D S)}{S^2 + \left(\frac{1+K \cdot T_D}{T_c}\right)S + \frac{K}{T_c}} \quad (13)$$

단, $K = K_c \cdot K_p$

그리고 誤差函數 $E_2(S)$ 는

$$E_2(S) = \frac{S\left(\frac{1}{T_c} + S\right)}{S^2 + \left(\frac{1+K \cdot T_D}{T_c}\right)S + \frac{K}{T_c}} \cdot R(S)$$

으로 되고, 입력 $R(S)$ 가 單位階段 入力이 가해지면

$$E_2(S) = \frac{S + \frac{1}{T_c}}{S^2 + \left(\frac{1+K \cdot T_D}{T_c}\right)S + \frac{K}{T_c}} \quad (14)$$

으로 되고, 畵셋트 ϵ_P 는 다음과 같이 0으로 된다.

$$\epsilon_P = \lim_{S \rightarrow 0} S \cdot E(S) = 0$$

i) 安定判別

式(13)으로부터 特性方程式은

$$S^2 + \left(\frac{1+K \cdot T_D}{T_c}\right)S + \frac{K}{T_c} = 0 \quad (15)$$

으로 되고, 홀비쯔 安定判別로부터

$$1 + K \cdot T_D > 0, \quad K > 0 \quad (16)$$

$$\text{또, } H_2 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{bmatrix} = \frac{K(1+K \cdot T_D)}{T_c^2} > 0$$

$$K T_D > -1 \quad (17)$$

으로 되어 式(16), 式(17)로부터 $K > 000$ 이고 $T_P > -\frac{1}{K}$ 이어야 하지만 T_P 가 음의 값을 가질 수 없으므로 결국 $K > 0, T_D > 0$ 이면 安定하다.

ii) 最適 퍼라미터

式(14)를 $E_2(S) = N(S)/D(S)$ 라 두면

$$D(S) = S^2 + \left(\frac{1+K \cdot T_D}{T_c}\right)S + \frac{K}{T_c}$$

$$N(S)N(-S) = -S^2 + \frac{1}{T_c^2}$$

$$a_D = 1, \quad a_1 = \frac{1+K \cdot T_D}{T_c}, \quad a_2 = \frac{K}{T_c}$$

$$b_0 = -1, \quad b_1 = \frac{1}{T_c^2}$$

으로 되어 誤差二乘面積을 F_{22} 라 두면

$$F_{22} = (-1)^1 \frac{B}{2a_0 H_2}$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{bmatrix} = \frac{K(1+K \cdot T_D)}{T_c^2}$$

$$B = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = -\left(\frac{K}{T_c} + \frac{1}{T_c^2}\right)$$

$$\therefore F_{22} = \frac{K + \frac{1}{T_c}}{\frac{2}{T_c}(K(1 + K \cdot T_D))}$$

으로 되고, 이 때 評價函數 J_2 를 $J_2 = \frac{2}{T_c} \cdot F_{22}$ 라 두면

$$J_2(K, T_D) = \frac{K + \frac{1}{T_c}}{K(1 + K \cdot T_D)} \quad (18)$$

$$J_2(x, y) = \frac{x+a}{x(1+xy)}$$

단, $\begin{cases} x=K > 0 \\ y=T_D > 0 \\ a=\frac{1}{T_c} > 0 \end{cases}$

으로 정의된다.

式(18)을 x, y 에 대하여 偏微分하면

$$\frac{\partial J_2}{\partial x} = \frac{-yx^2 - 2axyx - a}{(x^2y+x)^2} < 0$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial y} = \frac{-x^2}{(x^2y+x)^2} < 0$$

으로 되어 항상 0보다 작은 값을 가지므로 x, y 값(즉 K_p, T_D 값)이 클수록 J_2 의 값은 작게 된다.

이것을 그림으로 살펴보자. 먼저 y 가 0으로 되면 Fig. 7의 (a)와 같이 P동작일 때와 같이 되어 비례동작 이득 K_p 가 크게 되면 J_2 가 1에 수렴함을 알 수 있고, y 가 임의의 값을 가질 때는 K_p 가 크게 되면 J_2 가 0에 수렴한다. 이 때 y 값(T_D 값)이 커지면 빠르게 J_2 가 0에 수렴함을 알 수 있다.

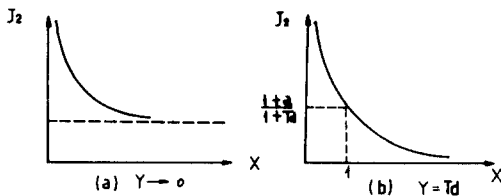


Fig. 7. Criterion function curve continuous control system with PD-controller

4. 디지털 PID제어기의 最適設計

制御偏差 e_1 의 2乘面積을 評價函數로 하고 이를 最小로 하는 PID 제어기의 最適 퍼래미터를 時間領域에서 求하자. 우선 評價函數 J 는,

$$J = \int_0^{\infty} \{e_1(t)\}^2 dt = \int_0^{\infty} (r(t) - c(t))^2 dt \quad (19)$$

으로 되고, 本 研究에 이용된 서어보모타를 포함하는 전달함수 식(1)을 狀態方程式으로 풀면,

$$G'(S) = \frac{\theta_m(S)}{V_1(S)} = \frac{K_c}{S(1+T_c S)}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{T_c} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{K_c}{T_c} \\ 0 \end{pmatrix} U$$

$$C = [0, 1] \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ C = DX \end{cases} \quad (21)$$

으로 되고, 식(21)를 이산치형으로 풀면

$$X(KT+t) = e^{At} \cdot X(KT) + \int_{KT}^{KT+t} e^{A(KT+t-\tau)} \cdot B \cdot e_2(KT) \cdot d\tau \quad (22)$$

단, $\begin{cases} 0 \leq \tau \leq t \leq T \\ e_2(KT) = Z^{-1}[E_2(Z)]; \text{ holder circuit의 input signal} \\ K=0, 1, 2, 3 \dots \end{cases}$

$$\therefore \begin{pmatrix} X_1(KT+t) \\ X_2(KT+t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{t}{T_c}}, & 0 \\ T_c(1 - e^{-\frac{t}{T_c}}), & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(KT) \\ X_2(KT) \end{pmatrix} + K_c e_2(KT) \begin{pmatrix} 1 - e^{-\frac{T}{T_c}} \\ t - T_c(1 - e^{-\frac{t}{T_c}}) \end{pmatrix} \quad (23)$$

단, $e_2(KT) = 0; K < 0$

으로 되고 식(23)에서 $X_2 = C(\text{출력})$ 이므로 評價函數 J 는

$$J = \sum_{K=0}^{\infty} \int_0^T \{1 - X_2(KT-t)\}^2 dt$$

$$= \sum_{K=0}^{\infty} \int_0^T \{1 - C(KT+t)\}^2 dt \quad (24)$$

으로 된다. 評價函數式(24)를 구하기 위해 먼저 出力 $C(KT+t)$ 를 구하면, 식(23)에서 $t=T$ 일 때 $X_1(KT)$ 는

$$X_1(KT) = \frac{X_2(KT+T) - X_2(KT) - K_c e_2(KT) \{T - T_c(1 - e^{-\frac{T}{T_c}})\}}{T_c(1 - e^{-\frac{T}{T_c}})} \quad (25)$$

으로 되고 식(25)을 식(24)에 代入하여 出力을 구하면

$$C(KT+t) = X_2(KT+t) = \frac{1 - e^{-\frac{t}{T_c}}}{1 - e^{-\frac{T}{T_c}}} \cdot [X_2(KT+T) - X_2(KT) - K_c e_2(KT) \{T - T_c(1 - e^{-\frac{T}{T_c}})\}] \\ + X_2(KT) + K_c e_2(KT) \{t - T_c(1 - e^{-\frac{t}{T_c}})\} \quad (26)$$

으로 되고 應答의 速度方程式은

$$C(KT+t) = X_1(KT+t) \\ = \frac{e^{-\frac{t}{T_c}}}{T_c(1 - e^{-\frac{T}{T_c}})} \cdot [X_2(KT+T) - X_2(KT) - K_c e_2(KT) \{T - T_c(1 - e^{-\frac{T}{T_c}})\}] \\ + K_c e_2(KT) (1 - e^{-\frac{t}{T_c}}) \quad (27)$$

으로 된다.

식(26), 식(27) 속에 포함되어 있는 $e_2(KT)$, 즉 $e_2(K)$ 는 식(8)을 Z-역변환하면

$$e_2(K) = -\{(B_1 + Q_1) \cdot e_2(K-1) + (B_2 + Q_2) \cdot e_2(K-2) + (B_3 + Q_3) \cdot e_2(K-3) + Q_4 \cdot e_2(K-4)\} \\ + P_1 \cdot r(K) + P_2 \cdot r(K-1) + P_3 \cdot r(K-2) + P_4 \cdot r(K-3) + P_5 \cdot r(K-4) \quad (28)$$

으로 되고 식(2), 식(6)', 식(8)' 및 식(28)로부터 평가함수를 나타내는 식(24)는,

i) P 동작인 경우

$$J_P(T, K_P) = \sum_{K=0}^{\infty} \int_0^T \{e_1(KT+t, K_P)\}^2 dt \quad (29)$$

ii) PD 동작인 경우

$$J_{PD}(T, K_P, T_D) = \sum_{K=0}^{\infty} \int_0^T \{e_1(KT+t, K_P, T_D)\}^2 dt \quad (30)$$

iii) PI 동작인 경우

$$J_{PI}(T, K_P, T_i) = \sum_{K=0}^{\infty} \int_0^T \{e_1(KT+t, K_P, T_i)\}^2 dt \quad (31)$$

iv) PID 동작인 경우

$$J_{PID}(T, K_P, T_D, T_i) = \sum_{K=0}^{\infty} \int_0^T \{e_1(KT+t, K_P, T_D, T_i)\}^2 dt \quad (32)$$

으로 되고, 식(29)~식(32)을 各各 최소로 하기 위해서 解析的으로는 다음과 같은 조건을 만족하는 最適 퍼래미터를 구해야 한다.

i) P 동작인 경우

$$\left. \begin{aligned} \frac{eJ_P}{dP} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial J_P}{\partial T} \\ \frac{\partial J_P}{\partial K_P} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{d^2 J_P}{dP^2} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 J_P}{\partial T^2} & \frac{\partial^2 J_P}{\partial T \partial K_P} \\ \frac{\partial^2 J_P}{\partial K_P \partial T} & \frac{\partial^2 J_P}{\partial K_P^2} \end{vmatrix} : \text{positive definite} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

ii) PD 동작인 경우

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{dJ_{PD}}{dP} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial J_{PD}}{\partial T} \\ \frac{\partial J_{PD}}{\partial K_P} \\ \frac{\partial J_{PD}}{\partial T_D} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \\
 \frac{d^2J_{PD}}{dP^2} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 J_{PD}}{\partial T^2} & \frac{\partial^2 J_{PD}}{\partial T \partial K_P} & \frac{\partial^2 J_{PD}}{\partial T \partial T_D} \\ \frac{\partial^2 J_{PD}}{\partial K_P \partial T} & \frac{\partial^2 J_{PD}}{\partial K_P^2} & \frac{\partial^2 J_{PD}}{\partial K_P \partial T_D} \\ \frac{\partial^2 J_{PD}}{\partial T_D \partial T} & \frac{\partial^2 J_{PD}}{\partial T_D \partial K_P} & \frac{\partial^2 J_{PD}}{\partial T_D^2} \end{vmatrix} : \text{positive definite}
 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

iii) PI 동작인 경우

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{dJ_{PI}}{dP} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial J_{PI}}{\partial T} \\ \frac{\partial J_{PI}}{\partial K_P} \\ \frac{\partial J_{PI}}{\partial T_i} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \\
 \frac{d^2J_{PI}}{dP^2} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 J_{PI}}{\partial T^2} & \frac{\partial^2 J_{PI}}{\partial T \partial K_P} & \frac{\partial^2 J_{PI}}{\partial T \partial T_i} \\ \frac{\partial^2 J_{PI}}{\partial K_P \partial T} & \frac{\partial^2 J_{PI}}{\partial K_P^2} & \frac{\partial^2 J_{PI}}{\partial K_P \partial T_i} \\ \frac{\partial^2 J_{PI}}{\partial T_i \partial T} & \frac{\partial^2 J_{PI}}{\partial T_i \partial K_P} & \frac{\partial^2 J_{PI}}{\partial T_i^2} \end{vmatrix} : \text{positive definite}
 \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

iv) PID 동작인 경우

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{dJ_{PID}}{dP} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial J_{PID}}{\partial T} \\ \frac{\partial J_{PID}}{\partial K_P} \\ \frac{\partial J_{PID}}{\partial T_D} \\ \frac{\partial J_{PID}}{\partial T_i} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \\
 \frac{d^2J_{PID}}{dP^2} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 J_{PID}}{\partial T^2} & \frac{\partial^2 J_{PID}}{\partial T \partial K_P} & \frac{\partial^2 J_{PID}}{\partial T \partial T_D} & \frac{\partial^2 J_{PID}}{\partial T \partial T_i} \\ \frac{\partial^2 J_{PID}}{\partial K_P \partial T} & \frac{\partial^2 J_{PID}}{\partial K_P^2} & \frac{\partial^2 J_{PID}}{\partial K_P \partial T_D} & \frac{\partial^2 J_{PID}}{\partial K_P \partial T_i} \\ \frac{\partial^2 J_{PID}}{\partial T_D \partial T} & \frac{\partial^2 J_{PID}}{\partial T_D \partial K_P} & \frac{\partial^2 J_{PID}}{\partial T_D^2} & \frac{\partial^2 J_{PID}}{\partial T_D \partial T_i} \\ \frac{\partial^2 J_{PID}}{\partial T_i \partial T} & \frac{\partial^2 J_{PID}}{\partial T_i \partial K_P} & \frac{\partial^2 J_{PID}}{\partial T_i \partial T_D} & \frac{\partial^2 J_{PID}}{\partial T_i^2} \end{vmatrix} : \text{positive definite}
 \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

식(33)~(36)을 해석적으로 구하기 困難하므로 數值計算으로 求하기로 한다.

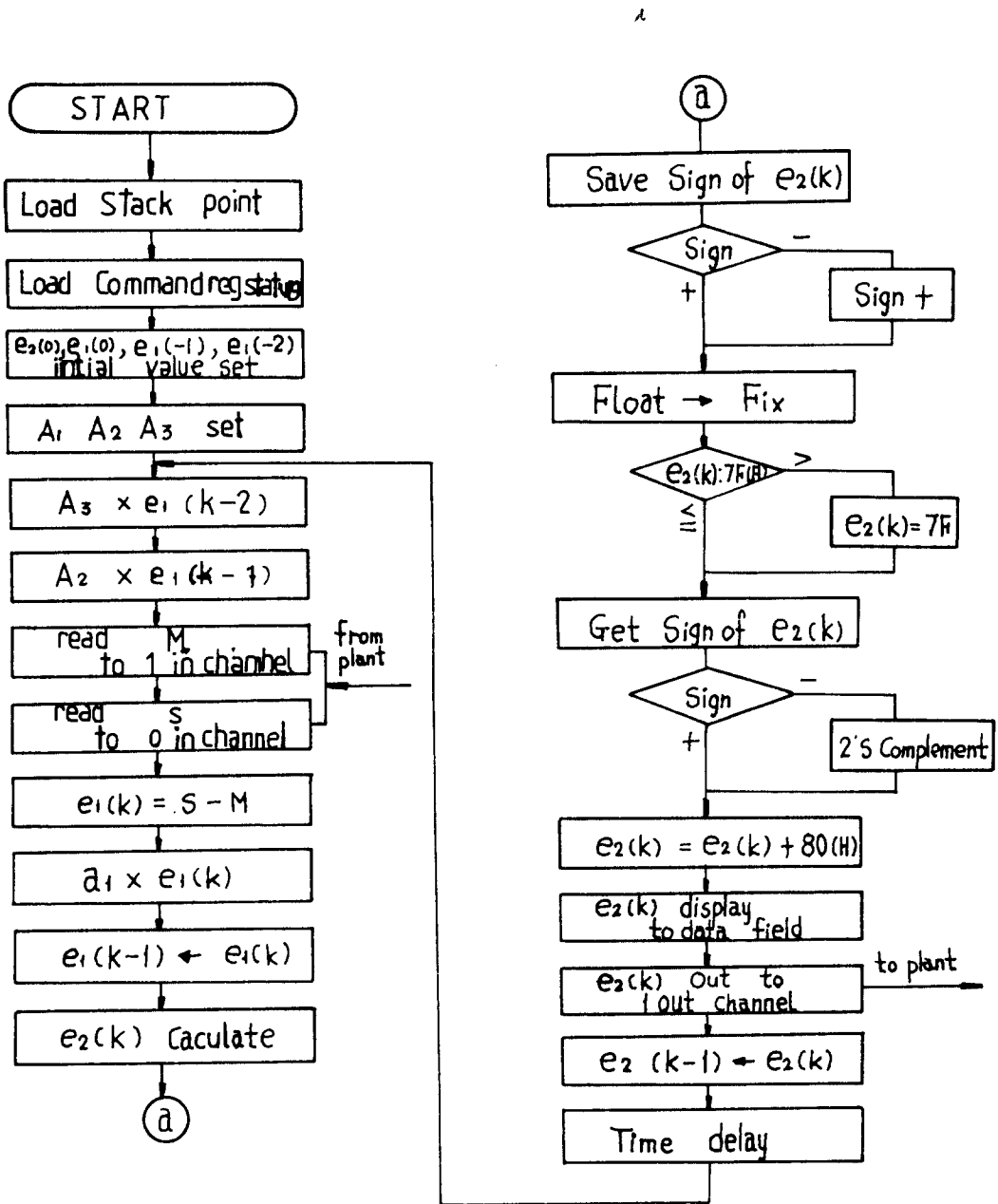


Fig. 8. Flow chart of micro computer programming

5. 마이크로 컴퓨터의 프로그래밍

디지털 제어기로 利用된 마이크로 컴퓨터가 PID 동작을 하도록 프로그래밍하기 위하여 식 (2)를 Z역변환 하면

$$\rho_2(k) = \rho_2(k-1) + A_1\rho_1(k) + A_2\rho_1(k-1) + A_3\rho_1(k-2) \quad (37)$$

으로 되고, 이 식을 만족하도록 프로그래밍한 플로우 차트는 Fig. 8과 같이 된다.⁸⁾

6. 數值計算 및 實驗結果

(1) 定數 推定實驗

Fig. 1의 블록선도에서 감쇄기로부터 서어보모타까지 本 實驗에 使用된 制御對象의 傳達函數 $K_c/(1+T_cS)$ 의 利得 K_c 와 時定數 T_c 를 推定하기 위하여 감쇄기 入力段에 階段入力を 가하여 그 出力으로부터 利得과 時定數를 推定한 結果 $K_c=0.34$, $T_c=0.468$ 을 얻었다.

(2) 數值計算

評價擬數를 表示하는 式(24)를 解析的으로 求하기 困難하여 수치계산에 의해 最適 퍼래미터를 各 샘플링타임에 대해 求하기로 한다. 디지털 제어기가 P 동작, PD 동작을 할 경우, 入力を 2.5V(인디케이터 $\approx 1rad$)의 階段入력으로 하여 샘플링타임 $T=0.05$, $T=0.1$, $T=0.5$, $T=1.0$ (sec)에 대하여 수렴구간인 實際時間 16sec까지 數值計算한 結果는 各各 Table 1. 및 Table 2.와 같다.

Table 1. Calculated values of criterion function of control system with P-controller

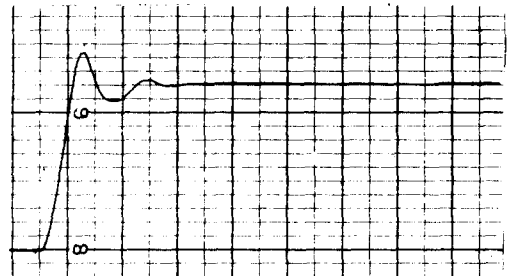
T(sec)	0.05			0.1			0.5			1.0		
K_P	20.0	60.0	100.0	3.0	6.0	9.0	2.0	4.0	6.0	2.0	3.0	5.0
J	3.543	3.541	3.551	4.454	3.584	3.608	5.700	3.923	4.265	5.615	4.967	6.111

Table 2. Calculated values of criterion function of control system with PD-controller

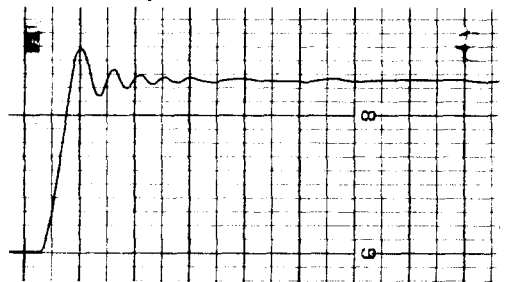
T	0.05			0.1			0.5			1.0		
\hat{K}_P	60.0			9.0			7.0			3.0		
T_D	0.01	0.1	0.05	0.01	0.1	0.5	0.01	0.4	0.9	0.01	0.5	0.9
J	3.513	3.407	3.443	3.588	3.476	3.724	4.278	3.560	4.342	4.913	3.668	3.838

(3) 應答實驗 結果

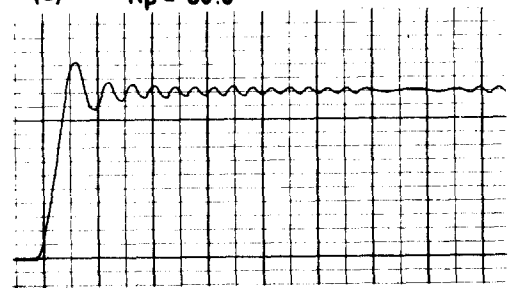
各 샘플링타임에서 數值計算에 의해 求하여진



(a) $K_P = 20.0$



(b) $\hat{K}_P = 60.0$



(c) $K_P = 100.0$

Fig. 9. Response of control system with P-controller at $T=0.05$

最適 퍼라미터 \hat{K}_P 및 \hat{T}_D 와 最適이 아닌 다른 퍼라미터 K_P 및 T_D 로 應答實驗을 하였다.

P 동작일 때 入力を 2.5V(인디케이터는 1rad)의 階段入력으로 하여, 샘플링타임 $T=0.05$, $T=0.1$, $T=0.5$, $T=1.0$ (sec)에 대한 應答曲線은 Fig.9~Fig.12와 같고, PD 동작일 때의 應答曲線을 Fig.13~Fig.16과 같다.

7. 考 察

(1) P動作에 대한 考察

Fig.9~Fig.12의 (b)인 경우가 샘플링타임 $T=0.05$, $T=0.1$, $T=0.5$, $T=1.0$ (sec)일 때 各 各 最適인 경우를 나타내고 있으며, 制御器의

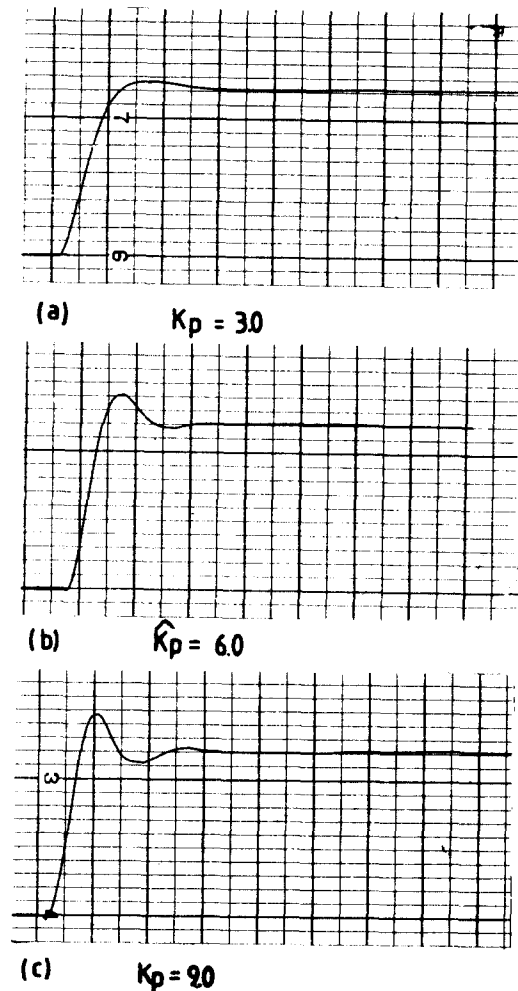


Fig. 10. Response of control system with P-controller at $T=0.1$

利得을 $\hat{K}_P=60, 0$, $\hat{K}_P=6.0$, $\hat{K}_P=4.0$, $\hat{K}_P=3.0$ 정도이다. Table 1. 및 Fig.9~Fig.12.에서 보는 바와 같이 K_P 의 값이 크게 됨에 따라 應答時間이 짧게 되나, 오버슈트(over shoot)가 커지고 整定時間(settling time)이 길게 되고 評價函數의 값이 크게 되는 短點이 있어 連續시스템과는 달리 K_P 의 最適值가 存在한다.

그런데 評價函數를 最小로 하는 \hat{K}_P 로 했을 경우는 應答時間도 상당히 빠르면서 整定時間도 짧게 되어 좋은 應答特性을 나타냄을 알 수 있다.

(2) PD動作에 대한 考察

Fig.13~Fig.16의 (b)가 샘플링타임 $T=0.05$,

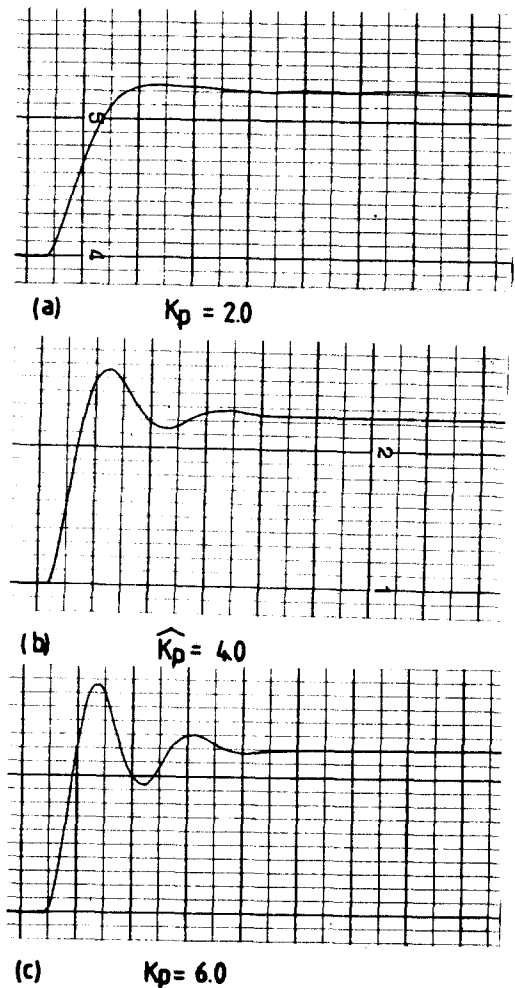


Fig. 11. Response of control system with P-controller at $T=0.5$

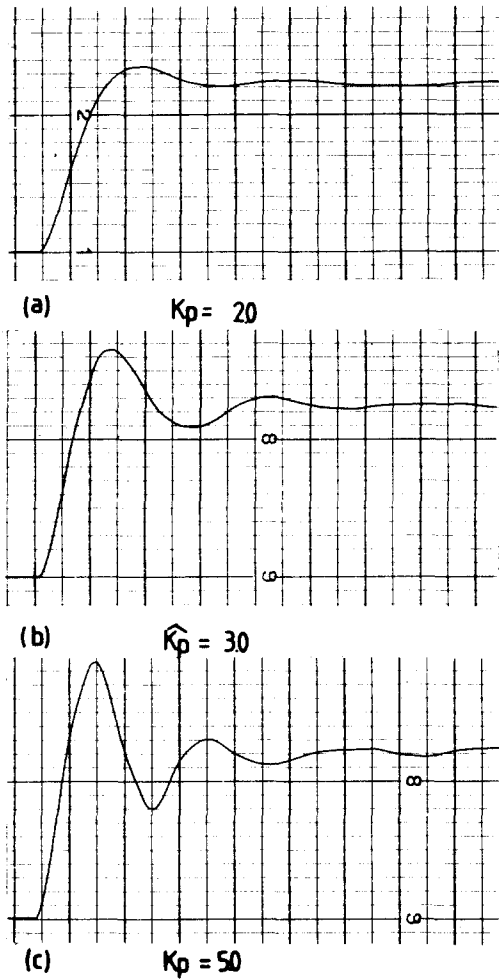


Fig. 12. Response of control system with P controller at $T=1.0$

$T=0.1$, $T=0.5$, $T=1.0$ (sec)일 때 各各 最適인 경우를 나타내고 있으며, 그 때 制御器의 利得과 微分時間은 各各 $\hat{K}_P=60.0$ 과 $\hat{T}_D=0.1$, $\hat{K}_P=9.0$ 과 $\hat{T}_D=0.1$, $\hat{K}_P=7.0$ 과 $\hat{T}_D=0.4$, $\hat{K}_P=3.0$ 과 $\hat{T}_D=0.5$ 이다.

우선 샘플링타임 $T=0.1$ (sec)인 경우를 살펴 보면, 같은 \hat{K}_P 의 값에서 微分時間 T_D 를 0.05 sec로 작게 하는 것은 微分動作의 영향이 적은 結果로서 比例動作과 類似한 應答特性을 얻을 수 있음을 알 수 있다. T_D 값이 크게 되면 오버슈트는 크게 일으키지 않으나 應答時間이 길게 되고 평가함수의 값도 크게 됨을 알 수 있다. 評價函數를 最小로 하는 \hat{K}_P 및 \hat{T}_D , 즉 最適 퍼

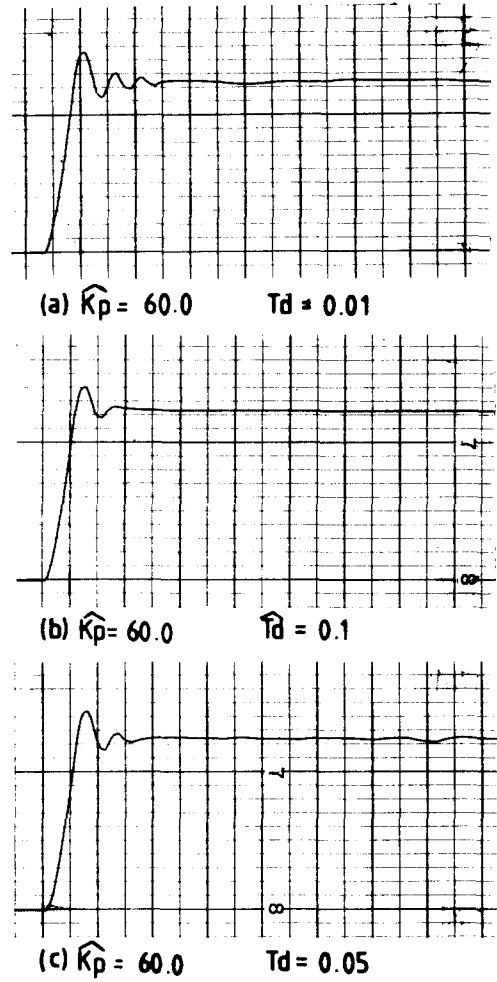


Fig. 13. Response of control system with PD-controller at $T=0.05$

미터에 대하여 應答實驗을 한 경우는 이들 양쪽을 補充하면서 양호한 應答特性을 나타내고 있음을 알 수 있고, 다른 샘플링타임에서도 같은 樣象을 나타내고 있다.

Table 1과 Table 2를 比較해 보면, P 동작이나 PD 동작 共히 샘플링타임을 작게 할수록 평가함수의 값이 작게 됨을 알 수 있다. 즉, 양호한 應答를 얻기 위해서는 可能한 한 샘플링타임을 작게 하는 것이 바람직하다.

그리고 Fig. 9~Fig. 12와 Fig. 13~Fig. 16을 比較해 보면 비례동작에 미분동작을 添加함으로써 비례동작 하나로 制御를 行할 때보다 우수한 應答를 얻을 수 있음을 아울러 알 수 있다.

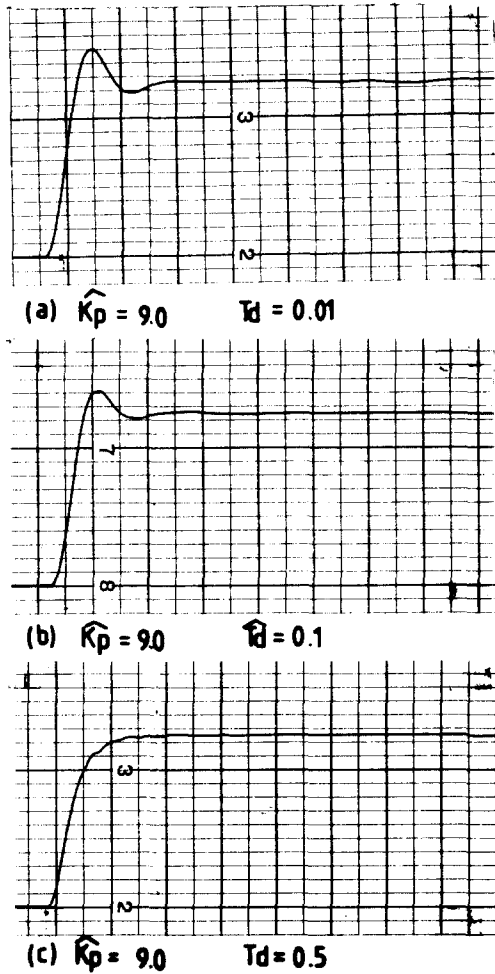


Fig. 14. Response of control system with PD-controller at $T=0.1$

연속 시스템인 경우는 3節에서 고찰한 바와 같이 비례동작인 경우 K_P 의 값이 클수록 評價函數의 값이 작게 되고, PD동작인 경우도 K_P 값이 크고 T_D 값도 크게 됨에 따라서 評價函數의 값이 작아져서 양호한 應答特性이 나타날 것으로 생각되지만, 離散型 시스템에서는 變數로서 샘플링타임 T 가 作用하게 됨으로 連續 시스템과는 달리 K_P 및 T_D 의 最適値가 存在함을 알 수 있다.

또한 終來의 連續的인 PID 制御器 대신에 소형 마이크로 프로세서를 이용하여 機械語 프로그래밍함으로써 連續 PID 制御器를 대신하여 優秀한 制御를 할 수 있음을 알게 되었으며, 16bit

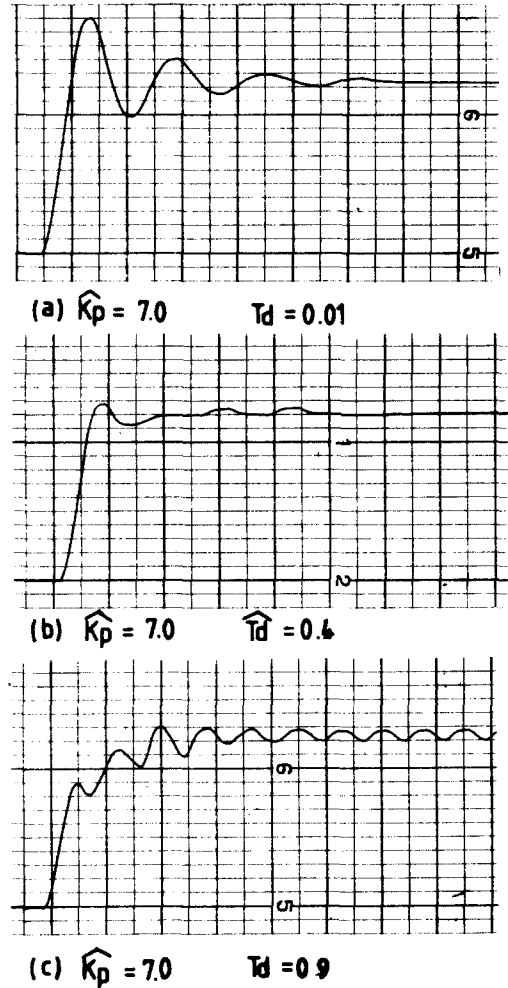


Fig. 15. Response of control system with PD-controller at $T=0.5$

또는 그 이상의 마이크로 프로세서를 이용하면 더욱 精度 높은 制御를 할 수 있을 것으로 생각된다.

8. 結 論

以上과 같이 서어보모타를 이용하여 位置制御를 하는 制御系統에 대하여 連續 PID 制御器에 대해 理論的인 考察을 行하고, 마이크로 프로세서를 디지털 PID 制御器로서 作動할 수 있게 프로그래밍하여 數值計算에 의해 最適 퍼래미터를 求한 다음 그 最適 퍼래미터로 應答實驗을 한 結果 다음과 같은 結論을 얻게 되었다.

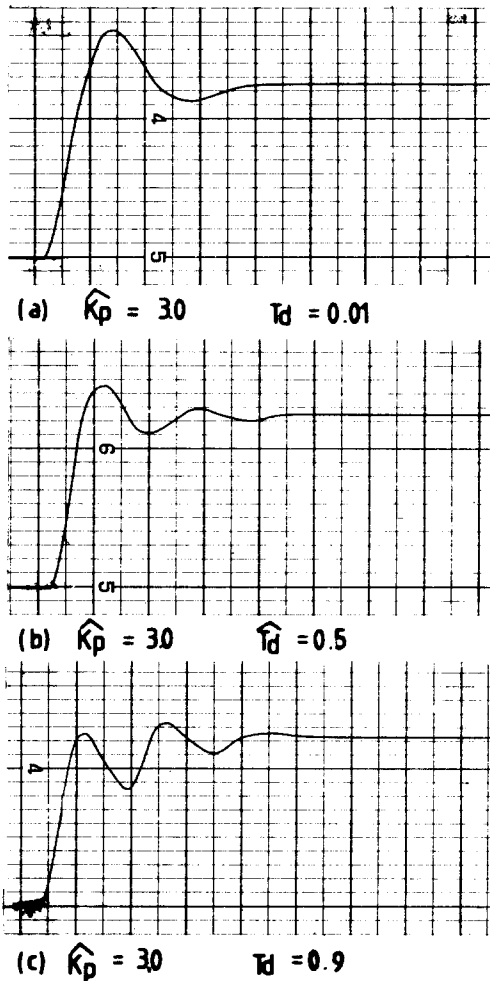


Fig. 16. Response of control system with PD-controller at $T=1.0$

- 1) 比例動作보다 比例-微分動作의 優秀性を 確認하였고,
- 2) 比例動作이나 比例-微分動作 共히 샘플링 타임을 작게할수록 좋은 應答을 얻을 수 있었으며,
- 3) 小型 마이크로 프로세서를 利用하여 機械

語로 프로그래밍함으로써 終來의 連續 PID 制御器를 대신하여 양호한 制御를 할 수 있었다.

또한 16bit 또는 그 이상의 마이크로 프로세서를 利用하면 더욱 精度 높은 制御를 할 수 있을 것으로 생각된다.

參 考 文 獻

- 1) 西野 聰, 마이콘制御入門, 日刊工業新聞社, p. 1~2, p. 213~219.
- 2) 成田誠之助, 디지털시스템制御, 昭晃堂, (1984), p. 3~14.
- 3) 河注植, 自動制御工學, 海事圖書出版部, (1984), p. 110.
- 4) 廣田實船, 船制御システム工學, 成山堂書店, (1982), p. 235.
- 5) Benjamin C. Kuo, Digital Control System, Holt Rinehart and Winston Inc., (1982), p. 5~9.
- 6) 見城高志, 小形モタのとマイコン制御, 総合電子出版社(1985), p. 23~29.
- 7) James, Cadzow & Hinrich R. Martens, Discrete Time and Computer Control System, Prentice-Hall, Inc., (1984), p. 22-26.
- 8) Feed Back Co., MAT 385 Manual Vol. 1, Vol. 2, Vol. 3(1984).
- 9) Richard C. Dorf, Modern control System, 3rd Edition, Addison-Wesely Publishing Co., (1967), p. 421~445.
- 10) M. T. Jong, Method of Discrete Signal and System Analysis, McGraw-Hill Book Co., (1982), p. 31~43, p. 211~212.
- 11) Rolf Isermann, Digital Control System, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, (1981), p. 42-43, p. 72-89.