韓國經營科學會誌
第11券 第2號
1986年 10月

불명확한 목표계획법과 그 확장

On Solving the Fuzzy Goal Programming and Its Extension

鄭 忠 泳*

Abstract

This paper illustrates a new method to solve the fuzzy goal programming(FGP) problem. It is proved that the FGP proposed by Narasimhan can be solved on the basis of linear programming(LP) model.

Narasimhan formulated the FGP problem as a set of 2^KLP problems, each containing 3K constraints, where K is the number of fuzzy goals/constraints. Whereas Hannan formulated the FGP problem as a single LP problem with only 2K constraints and 2K+1 additional variables.

This paper presents that the FGP problem can be transformed with easy into a single LP model with 2K constraints and only one additional variables.

And we propose extended FGP: (1) FGP with weights associated with individual goals,(2) FGP with preemptive priorities.

The extended FGP has a framework that is identical to that of conventional goal programming(GP), such that the extended FGP can be applied with fuzzy concept to the all areas where GP can be applied.

1. 서 론

Zimmermann은 불명확집합(fuzzy subset)의 개념을 도입하여 다목표 상황에서의 벡타최대화(vector maximum)문제의 해법을 제시하였다. 한편 Narasimhan은 그의 논문에서 불명확 목표계획법(fuzzy goal programming : FGP)을 제안하고 선형계획법(linear programming : LP)을 이용하여 그 해를 구하였다. 즉 K개의 목표를 가진 FGP문제를 해결하기 위하여 3K개의 제약식으로 구성된 2^K조의 LP문제를 풀었다. 그러나 Hannan은 FGP문제를 보다 훨씬 간편한 방법으로 해결하였다. 그에 의하면 K개의 목표를 가진 FGP문제는 2K개의 제약식으로 구성된 단 하나의 LP 문제를 풀어 그 해를 구할 수 있게 된다. 이 때 새로이 추가되어야 할 변수는 2K+1개이다.

본 연구의 목적은 다음의 3가지로 요약될 수 있다.

(1) 일반화된 FGP를 정의하고 이의 해를 구한다.

(2) Narasimhan이 제시한 FGP 문제를 확장하여 개별목표에 가중치가 부여된 FGP와 선제 우선순위를 갖는 FGP 문제를 제안한다.

(3) 확장된 FGP와 전통적인 목표계획법(goal programming : GP) 사이의 관계를 밝힌다.

본서의 구성은 서론에 이어 2절에서는 FGP에 관한

* 경북대학교 경영학과

기존의 연구를 간단히 검토하고, 3절에서는 삼각형 멤버쉽 함수뿐 아니라 비탈진 멤버쉽 함수를 포함하는 일반화 FGP를 정의하고 해법을 제시한다. 4절에서는 FGP를 확장하여 개별목표를 중시하는 가중치 FGP 문제와 선제 우선순위 FGP 문제를 정의하고 해법을 제시한다. 확장된 FGP와 일반 목표계획법과의 관련성을 설명하며, 5절에서는 앞으로의 연구방향 등에 대해 설명한다.

2. FGP의 기존연구

2.1. Zimmermann의 벡타최대화

벡타최대화(vector maximum) 문제는 Kuhn과 Tucker에 의해 처음 제기되었으며[12], Zimmermann 은 벡타최대화의 문제를 해결하기 위하여 불명확집합의 개념을 도입하였다[20]. 그는 각각의 목표에 대해 열망수준(aspiration level)에 대한 허용오차(tolerance)를 주관적으로 설정하고 이를 바탕으로 멤버쉽함수(membership function)를 정의하고 이 함수의 값을 최대화함으로써 벡타최대화의 문제를 해결하였다. 이 방식은 후에 불명확 선형계획법(fuzzy linear programming)으로 발전하였다[21].

2.2. Narasimhan의 FGP

목표계획법(goal programming : GP)은 의사결정환경이 부여하는 여러 제약하에서 다목표의 최적화를 추구하는 수학모형이다. 이 때 여러 목표들은 명백히 기술되어야 하며 이에서 세워지는 식 자체도 엄격하게 작성되어야 한다. 그러나 Narasimhan은 엄격하거나 혹은 명확하지 않은 상황을 반영할 수 있도록 한 불명확 목표계획법을 제안하였다[15].

FGP문제는 (P1)과 같이 제시된다.

$$(\mathrm{P1})\quad \max\ \min : \mu_i(AX) \tag{1}$$
$$\text{s.t} : (AX)_i \cong b_i \tag{2}$$
$$X \geq 0 \tag{3}$$

이때의 멤버쉽함수 $\mu_i(AX)$는 다음과 같이 정의된다.

$$\mu_i(AX) = \begin{cases} 1 & \text{if } (AX)_i = b_i \\ f((AX)_i, b_i) & \text{if } (AX)_i \neq b_i \end{cases} \tag{4}$$

FGP에서는 목표와 제약식 간에는 구분이 불필요하며[5] 양자가 모두 불명확결정(fuzzy decision) 영역 D에 들어가고 이 때 D는 불명확집합이므로 멤버쉽함수의 값이 최대가 되게하는 X를 최적의사결정대안으로 선정하게 된다.

이미 언급한 바와 같이 Narasimhan은 K개의 목표를 가진 FGP의 문제를 3개의 제약식으로 된 2^K조의 LP 문제로 바꾸어 최소값을 갖는 멤버쉽을 최대되게 하고 이 값이 최대가 되는 조의 해를 최적해로 선택하였다[16].

2.3. Hannan의 해법

Hannan은 Narasimhan이 제기한 FGP의 문제 (P1)을 (P2)의 LP문제로 변환시켜 해를 얻었다.

$$(\mathrm{P2})\quad \max : \lambda \tag{5}$$
$$\text{s.t} : \frac{(AX)_i}{\triangle_i} + d_i^- - d_i^+ = \frac{b_i}{\triangle_i} \tag{6}$$
$$\lambda + d_i^- - d_i^+ \leq 1 \tag{7}$$
$$d_i^-,\ d_i^+,\ X,\ \lambda \geq 0 \tag{8}$$

이 식에서 $\triangle_i$는 열망수준에 따른 허용오차를 의미한다. Hannan이 제안한 이 방식에 따르면 K개의 목표를 가진 FGP문제는 2K개의 제약식을 가진 하나의 LP문제로 풀려지게 된다. Narasimhan의 해법보다 휠씬 간편한 방법이다. 그러나 d_i^-, d_i^+, α, ($i=1, 2, \cdots K$) 즉 2K+1개의 변수가 추가되어야 한다.

3. FGP의 일반화와 그 해법

3.1. 멤버쉽함수의 정의

Narasimhan이 제시한 FGP에서는 불명확등식, 즉 $(AX) \cong b$ 형태만 포함되고 있으므로 Ignizio는 FGP에서 삼각형 멤버쉽함수(triangle membership function)만을 다루는 것은 문제의 성격상 의심스러우며 오히려 비탈진 멤버쉽함수(ramp membership function)이 바람직하다고 지적하였다[9]. 따라서 본 연구에서는 불명확 등식과 함께 불명확 부등식도 포함하는 FGP를 정의하기로 한다.

목표식의 형태는 다음의 3가지가 있을 수 있고 이들 각각에 대해 멤버쉽함수를 정의하기로 한다. 이 정의는 Zimmermann의 정의를 확장한 것이다.

$$(1)\quad (AX)_i \lesssim b_i \tag{9}$$
$$(2)\quad (AX)_j \gtrsim b_j \tag{10}$$
$$(3)\quad (AX)_k \cong b_k \tag{11}$$

정의 1. 목표식의 형태에 따라 이의 멤버쉽함수를 다음과 같이 정의한다.

(1) $(AX)_i \leq b_i$형태

$$\mu_i(AX)=\begin{cases}1 & \text{for } (AX)_i<b_i\\ 1-f_i(AX) & \text{for } b_i\leq (AX)_i\leq b_i+\triangle_i\\ 0 & \text{for } (AX)_i>b_i+\triangle_i\end{cases} \quad (12)$$

(2) $(AX)_j \geq b_j$형태

$$\mu_j(AX)=\begin{cases}1 & \text{for } (AX)_j>b_j\\ 1-g_j(AX) & \text{for } b_j-\triangle'_j\leq (AX)_j\leq b_j\\ 0 & \text{for } (AX)_j<b_j-\triangle'_j\end{cases} \quad (13)$$

(3) $(AX)_k \equiv b_k$형태

$$\mu_k(AX)=\begin{cases}0 & \text{for } (AX)_k>b_k+\triangle_k\\ 1-f_k(AX) & \text{for } b_k\leq (AX)_k\leq b_k+\triangle_k\\ 1-g_k(AX) & \text{for } b_k-\triangle'_k\leq (AX)_k<b_k\\ 0 & \text{for } (AX)_k<b_k-\triangle'_k\end{cases} \quad (14)$$

여기서

$$f_\ell(AX)=\frac{(AX)_\ell-b_\ell}{\triangle_\ell}$$

$$g_\ell(AX)=\frac{b_\ell-(AX)_\ell}{\triangle'_\ell}$$

이며 $\triangle_\ell$는 열망수준보다 큰 허용오차를, $\triangle'_\ell$는 작은 허용오차를 나타낸다.

본 논문에서는 편의상 멤버쉽함수 $\mu_\ell(AX)$를 μ_ℓ로 표시할 수 있는 것으로 한다.

3.2. 일반화 FGP와 그 해법

불명확 의사결정은 목표와 제약의 공통집합에서 결과되는 해의 불명확집합으로 정의된다. 즉 해집합 X에서의 불명확목표 G와 불명확제약 C에서의 의사결정 D는 $G\wedge C$로 정의된다. 따라서 불명확 의사결정의 멤버쉽함수는 $\mu_D=\mu_G\wedge\mu_C$이다[15]. 따라서 이는 소위 Dyson의 maxmin문제가 된다[2].

정의 1에서 정의된 3형태의 목표/제약식을 모두 갖춘 FGP를 다음과 같이 정의한다.

정의 2. 일반 FGP는 (P3)과 같이 정의된다.

(P3) $\max_X \min_\ell \mu_\ell(AX) \quad (\ell=i,j,k)$ (15)

s. t : $(AX)_i \leq b_i$ (16)

$(AX)_j \geq b_j$ (17)

$(AX)_k \equiv b_k$ (18)

$X \geq 0$ (19)

여기서 μ_i, μ_j, μ_k는 각각 (16), (17), (18)의 멤버쉽함수이다.

정리 1. 일반화 FGP문제 (P3)은 LP문제 (P4)와 동등하다.

(P4) min : α (20)

s. t : $(AX)_i-\triangle_i\alpha\leq b_i$ (21)

$(AX)_j+\triangle'_j\alpha\geq b_j$ (22)

$(AX)_k-\triangle_k\alpha\leq b_k$ (23)

$(AX)_k+\triangle'_k\alpha\geq b_k$ (24)

$\alpha,\ X\geq 0$ (25)

단 $\triangle_\ell$, $\triangle'_\ell$ $(\ell=i,j,k)$는 열망수준에 대한 허용오차(tolerance)이다.

증명. (P3)의 목적식 (15)에서

$$\max_X \min_\ell \mu_\ell(AX)$$
$$=\max\ \min(\mu_i,\ \mu_j,\ \mu_k)$$
$$=\max\ \mu$$
$$=\min(1-\mu)$$
$$=\min\ \alpha$$

그런데

$$\alpha=1-\mu\geq 1-\mu_i \quad (26)$$

이므로 $\alpha\geq f_i$이고 따라서

$$(AX)_i-\triangle_i\alpha\leq b_i \quad (27)$$

같은 방법으로

$\alpha\geq g_j$, $\alpha\geq f_k$, $\alpha\geq g_k$에서

$(AX)_j+\triangle_j\alpha\geq b_j$ (28)

$(AX)_k-\triangle'_k\alpha\leq b_k$ (29)

$(AX)+\triangle'_k\alpha\geq b_k$ (30)

(Q. E. D).

(P4)에서 $\alpha=1-\mu$이므로 그 해가 $\alpha=0$이면 $\mu=1$이 되어 열망수준이 모두 달성된 것을 의미하지만 $\alpha\geq 1$ 즉 $\mu\leq 0$이면 열망수준의 허용오차내에 달성되지 못하는 목표가 있음을 나타낸다. 실제의 문제에서는 이러한 상황이 빈번하므로 μ를 이용한 식에서는 불

가능 해를 얻게 되므로 μ 대신 α를 사용한 것이 (P4)이다. 이 경우에는 $\mu>1$인 경우에만 불가능 해가 된다.

3.3. 오목형 및 볼록형 멤버쉽함수 문제

양태용 등은 목표분할법에 의한 FGP의 해법을 제시하였다[23].

멤버쉽함수가 그림 1의 (가)와 (나)같이 오목함수(concave function)형으로 나타날 경우 이들 두가지 형태를 포함하는 FGP문제는

$$\max \min(\mu_i, \mu_j)$$

로 제시된다. 여기서

$$\mu_i = \min(1-f_i, 1-f_i') \quad (31)$$

$$\mu_j = \min(1-g_j, 1-g_j') \quad (32)$$

이고

$$f_i = \frac{(AX)_i - b_i}{\triangle_i}$$

$$f_i' = \frac{(AX)_i - b_i'}{\triangle_i'}$$

$$g_j = \frac{b_j - (AX)_j}{\triangle_j}$$

$$g_j' = \frac{b_j' - (AX)_j}{\triangle_j'}$$

이다.

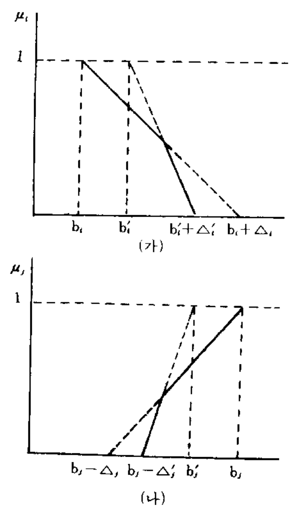

그림 1. 오목형태의 멤버쉽함수

따라서 목적함수는

$$\begin{aligned}
&\max \min(\min(1-f_i, 1-f_i'), \min(1-g_j, 1-g_j'))\\
&=\max \min(1-f_i, 1-f_i', 1-g_j, 1-g_j')\\
&=\max \mu\\
&=\min (1-\mu)\\
&=\min \alpha
\end{aligned}$$

이고 이 때

$\alpha \geq f_i$, $\alpha \geq f_i'$, $\alpha \geq g_j$, $\alpha \geq g_j'$에서 각각

$$(AX)_i - \triangle_i \alpha \leq b_i \quad (33)$$

$$(AX)_i - \triangle_i' \alpha \leq b_i' \quad (34)$$

$$(AX)_j + \triangle_j \alpha \geq b_j \quad (35)$$

$$(AX)_j + \triangle_j' \alpha \geq b_j' \quad (36)$$

을 제약식으로 하는 LP문제가 된다.

한편 그림 2와 같이 두가지 형태의 볼록함수(convex function)를 멤버쉽으로 갖는 FGP문제는

$$\begin{aligned}
&\max \min(\mu_i, \mu_j)\\
&=\max \min(\max(1-f_i, 1-f_i'), \max(1-g_j, 1-g_j'))\\
&=\max \min(\min(f_i, f_i'), \min(g_j, g_j'))\\
&=\max \min(f_i, f_i', g_j, g_j')\\
&=\max \alpha
\end{aligned}$$

을 목적식으로 하며 그 제약식이 다음과 같은 LP문제가 된다.

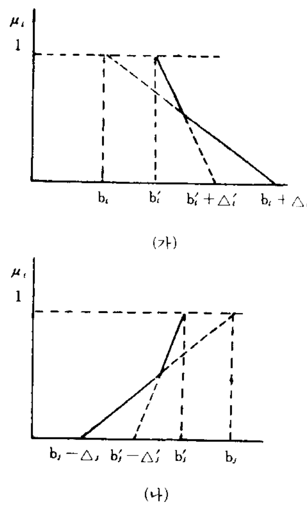

그림 2. 볼록형태의 멤버쉽함수

$$\alpha \leq f_i,\ \ \alpha \leq f_i',\ \ \alpha \leq g_j,\ \ \alpha \leq g_j' \tag{37}$$

이들의 각각에서

$$(AX)_i - \triangle_i \alpha \geq b_i \tag{38}$$
$$(AX)_j - \triangle_i' \alpha \geq b_i' \tag{39}$$
$$(AX)\ + \triangle_j \alpha \leq b_j \tag{40}$$
$$(AX) + \triangle_j' \alpha \leq b_j' \tag{41}$$

3.4. 해법의 적용 예

위의 정리를 Narasimhan의 문제 〔15〕에 적용하기로 한다.

$$\max_{X}\ \min : (\mu)$$
$$\begin{aligned} \text{s. t} : 80X_1 + 40X_2 &\cong 630\ (\triangle_1 = 10) \\ X_1 \qquad\quad &\cong 6\ \ (\triangle_2 = 2) \\ X_2 &\cong 4\ \ (\triangle_3 = 2) \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

정리 1을 적용하면 위의 문제는 다음의 LP 문제로 변형된다.

$$\min : \alpha$$
$$\begin{aligned} \text{s. t} : 80X_1 + 40X_2 + 10\alpha &\geq 630 \\ 80X_1 + 40X_2 - 10\alpha &\leq 630 \\ X_1 \qquad + 2\alpha &\geq 6 \\ X_1 \qquad - 2\alpha &\leq 6 \\ X_2 + 2\alpha &\geq 4 \\ X_2 - 2\alpha &\leq 4 \\ X_1, X_2, \alpha &\geq 0 \end{aligned}$$

이를 풀면

$$X_1 = 5.92,\ \ X_2 = 3.92,\ \ \alpha = 0.04$$

이고

$$\mu = 1 - \alpha = 0.96$$

으로서 Hannan 해와 일치한다. 그러나 Hannan은 이의 해를 얻기 위해 결정변수(decision variables) X_1, X_2 이외에 7(=2K+1)개의 변수를 추가하여야 하였으나 새로운 방법에서는 단 하나의 변수 α만 추가되었다. 물론 제약식의 수는 두 경우 모두 6(=2K) 개이다. 이에 관하여는 이미 언급한 바와 같다.

위의 설례에서 $\triangle_i$와 $\triangle_i'$가 함께 고려되는 비대칭 멤버쉽함수의 경우 Hannan의 식으로는 해를 구할 수 없으나 (P5)에 의해 용이하게 해결된다.

4. FGP의 확장

Narasimhan과 Hannan이 다룬 FGP는 개별적인 목표를 중시하지 아니하고 최소의 멤버쉽함수의 값을 최대화함으로써 다른 여러 목표의 달성을 향상시키려 시도한다. 따라서 그 목적식은

$$\max_{X}\ \min_{i} : \mu_i(AX) \tag{42}$$

의 형태를 취한다.

본절에서는 FGP문제에 개별목표를 반영할 수 있도록 확장된 FGP :

(1) 가중치를 갖는 FGP

(2) 선제 우선순위를 갖는 FGP

를 다음과 같이 제안한다.

4.1. 가중치 FGP

개별목표에 가중치가 부여된 경우에 이들이 결합된 전반목표를 최대되게 하는 불명확 목표계획 문제를 가중치 FGP라 하면 이는 다음과 같이 정의될 수 있다.

정의 3. w를 목표의 가중치라 하면 가중치 FGP는 다음과 같이 정의된다.

$$\text{(P5)}\ \ \max : (w_i\mu_i + w_j\mu_j + w_k\mu_k) \tag{43}$$
$$\text{s. t} : (AX)_i \lesssim b_i \tag{44}$$
$$(AX)_j \gtrsim b_j \tag{45}$$
$$(AX)_k \cong b_k \tag{46}$$
$$X \geq 0 \tag{47}$$

정리 2. 가중치 FGP문제 (P5)는 (P6)와 같은 LP 문제와 동등하다.

$$\text{(P6)}\ \ \min : w_i\alpha_i + w_j\alpha_j + w_k(\alpha_k + \beta_k) \tag{48}$$
$$\text{s. t} : (AX)_i - \triangle_i\alpha_i = b_i \tag{49}$$
$$(AX)\ + \triangle_j\alpha_j = b_j \tag{50}$$
$$(AX)\ + \triangle_k\alpha_k - \triangle_k'\beta_k = b_k \tag{51}$$
$$\alpha,\ \beta,\ \ X \geq 0 \tag{52}$$

증명. $\mu_i = 1 - f_i$, $\mu_j = 1 - g_j$, $\mu_k = 1 - g_k (= \mu_k')$ or $1 - f_k (= \mu_k'')$에서

$$(AX)_i - (1 - \mu_i)\triangle_i = b_i \tag{53}$$
$$(AX)_j + (1 - \mu_j)\triangle_j' = b_j \tag{54}$$

$$(AX)_k-(1-\mu'_k)\triangle_k=b_k \quad (55)$$
$$(AX)_k+(1-\mu''_k)\triangle'_k=b_k \quad (56)$$

그런데 (55)와 (56)은 어느 한 식만 성립하므로 이 2 식을 하나의 식 (57)로 표시할 수 있다.

$$(AX)_k-(1-\mu'_k)\triangle_k+(1-\mu''_k)\triangle'_k=b_k \quad (57)$$

만약

$$\alpha_i=1-\mu_i,\ \ \alpha_j=1-\mu_j,\ \ \alpha_k=1-\mu''_k,\ \ \beta_k=1-\mu'_k$$

라 두면

$$0\le\alpha_i,\ \ \alpha_k,\ \ \beta_k\le 1$$

이 되고 (53), (54) 및 (57)은 (P6)의 제약식이 된다.

한편 (P5)의 목적함수는

$$\max(w_i\mu_i+w_j\mu_j+w_k\mu_k)$$
$$=\max(w_i(1-\alpha_i)+w_j(1-\alpha_j)+w_k((1-\alpha_k)+(1-\beta_k)))$$
$$=\min(w_i\alpha_i+w_j\alpha_j+w_k(\alpha_k+\beta_k)) \quad (58)$$

(Q. E. D).

위의 정리 2를 설례에 적용하기로 한다.

3가지 목표 G1, G2, 및 G3가 다음 식과 같이 제시되었다.

$$G1: 2X_1+X_2\le 6$$
$$G2: X_1+X_2 \cong 5\ (\triangle_2=3)$$
$$G3: 5X_1+X_2 \gtrsim 32\ (\triangle_3=4)$$

G1는 명확목표이며 G2와 G3는 불명확 목표로서 그 가중치가 각각 0.4와 0.6이라 하자.

이 문제의 해는 정리2에 따라 다음과 같은 동등한 LP문제로 변형되어 진다.

$$\min: 0.4(\alpha_1+\beta_1)+0.6\alpha_2$$
$$\text{s. t}: 2X_1+X_2\le 6$$
$$X_1+X_2+3\alpha_1-3\beta_1=5$$
$$5X_1+6X_2+4\alpha_2\ge 32$$
$$X_1,\ X_2,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1\ge 0$$

이의 해는

$$X_1=0,\ X_2=5.33,\ \alpha_1=0.11$$

이고 그 외의 변수는 0의 값을 갖는다. 따라서

$$\mu_1=1-(\alpha_1+\beta_1)=0.89$$
$$\mu_2=1-\alpha_2=1$$

이다.

4.2. 선제 FGP

전통적인 GP는 목표의 선제 우선순위(preemptive priorities)라는 중요한 특성을 갖고 있으므로 FGP도 이러한 특성을 갖도록 확장하기로 한다.

정의 4. p를 목표의 선달성 우선순위라고 하면 선제 FGP(fuzzy goal programming with preemptive priorities)는 (P7)와 같이 정의된다.

$$(P7)\ \ \max: p_i(\mu_i)+p_j(\mu_j)+p_k(\mu_k) \quad (59)$$
$$\text{s. t}: (AX)_i\lesssim b_i \quad (60)$$
$$(AX)_j\gtrsim b_j \quad (61)$$
$$(AX)_k\cong b_k \quad (62)$$
$$X\ge 0 \quad (63)$$

정리 3. 선제 FGP문제 (P7)은 (P8)의 LP문제와 동등하다.

$$(P8)\ \ \min: p_i(\alpha_i)+p_j(\beta_j)+P_k(\alpha_k+\beta_k) \quad (64)$$
$$\text{s. t}: (AX)_i-\triangle_i\alpha_i+\triangle'_i\beta_i=b_i \quad (65)$$
$$(AX)_j-\triangle_j\alpha_j+\triangle'_j\beta_j=b_j \quad (66)$$
$$(AX)-\triangle_k\alpha_k+\triangle'_k\beta_k=b_k \quad (67)$$
$$\alpha,\ \beta,\ X\ge 0 \quad (68)$$

증명. (P7)의 제약식은 (P8)의 제약식으로 표시될 수 있고 (P7)의 목적식은 정리 2의 증명에서와 같이

$$\mu'_k\cdot\mu''_k=0$$

이므로

$$\mu_k=\mu'_k+\mu''_k$$

로 표시될 수 있다. 따라서 (P7)의 목적식은

$$\max\ p_i(\mu_i)+p_j(\mu_j)+p_k(\mu_k)$$
$$=\max\ p_i(1-\alpha_i)+p_j(1-\beta_j)+p_k((1-\alpha_k)+(1-\beta_k)) \quad (69)$$
$$=\min\ p_i(\alpha_i)+p_j(\beta_j)+p_k(\alpha_k+\beta_k)$$

(Q. E. D).

정리 3을 더욱 일반화하여 다음 정리를 얻는다.

정리 4. w을 개별목표의 가중치라 하면 가중치 FGP는 (P9)과 동등하다.

$$(P9)\ \ \min: w_ip_i(\alpha_i)+w_jp_j(\beta_j)+w_kp_k(\alpha_k+\beta_k) \quad (70)$$
$$\text{s. t}: (AX)_i-\triangle_i\alpha_i+\triangle'_i\beta_i=b_i \quad (71)$$

$$(AX)_j - \triangle_j\alpha_j + \triangle'_j\beta_j = b_j \tag{72}$$
$$(AX)_K - \triangle_K\alpha_K + \triangle'_K\beta_K = b_K \tag{73}$$
$$\alpha,\ \beta,\ X \geq 0 \tag{74}$$

위의 정리를 이상문의 예[13]에 적용하기 위해 허용오차를 임의로 지정하고 불명확하여 다음과 같은 설례를 만들어 풀기로 한다.

G1, G2, G3 및 G4를 우선순위 목표라 하고 이때의 허용오차와 가중치를 각각 $\triangle_\ell$, w_ℓ라 하자.

$$\begin{aligned}
&G1: X_1+X_2 \geq 80, && (\triangle_1=16,\ w_1=1)\\
&G2: X_1+X_2 \leq 90, && (\triangle_2=7,\ w_2=1)\\
&G3: X_1 \geq 70, && (\triangle_3=5,\ w_3=5)\\
&\quad\ \ X_2 \geq 45, && (\triangle_4=5,\ w_4=3)\\
&G4: X_1+X_2 \leq 80, && (\triangle_5=10,\ w_5=1)\\
&\quad\ X_1,\ X_2 \geq 0
\end{aligned}$$

위의 선제 FGP는 앞의 정리에서 다음의 문제와 동등하게 된다.

$$\begin{aligned}
\min: &\ p_1(\alpha_1)+p_2(\beta_4)+5p_3(\alpha_2)+3p_3(\alpha_3)+\\
&+p_4(\beta_1)\\
s.t: &\ X_1+X_2+16\alpha_1-16\beta_1=80\\
&\ X_1 \quad +25\alpha_2-25\beta_2=70\\
&\ X_2+5\alpha_3-5\beta_3=45\\
&\ X_1+X_2+5\alpha_4-5\beta_4=90\\
&\ X_1,\ X_2,\ \alpha,\ \beta \geq 0
\end{aligned}$$

이의 해는

$X_1=70,\ X_2=20,\ \beta_1=0.625,\ \alpha_3=5$

그 외의 변수는 0의 값을 갖는다.

정리 5. p와 w를 각각 선달성 우선순위 및 그 가중치라 하면 확장된 일반 비선형 FGP문제 (P10)은 (P11)과 동등하다.

$$(P10)\quad \min: w_ip_i(\alpha_i)+w_jp_j(\beta_j)+w_kp_k(\alpha_k+\beta_k) \tag{75}$$
$$s.t: f_i(X) \leq b_i \tag{76}$$
$$f_j(X) \leq b_j \tag{77}$$
$$f_k(X) \cong b_K \tag{78}$$
$$X \geq 0 \tag{79}$$

$$(P11)\quad \min: w_ip_i(\alpha_i)+w_jp_j(\beta_j)+w_kp_k(\alpha_k+\beta_k) \tag{80}$$
$$s.t: f_i(X)-\triangle_i\alpha_i+\triangle'_i\beta_i=b_i \tag{81}$$
$$f_j(X)-\triangle_j\alpha_j+\triangle'_j\beta_j=b_j \tag{82}$$
$$f_k(X)-\triangle_k\alpha_k+\triangle'_k\beta_k=b_k \tag{83}$$
$$\alpha,\ \beta,\ X \geq 0 \tag{84}$$

위의 증명은 선형의 경우와 동일하게 증명될 수 있으므로 증명을 생략한다.

4.3. 일반 GP와의 관련성

앞에서는 확장된 FGP 즉 가중치 FGP와 선제 FGP를 제안하고 그 해법을 제시하였다. 그런데 확장된 FGP는 기존의 일반 GP와 동일한 구조를 갖는다. (P8)에서

$\triangle_\ell\alpha_\ell=d^+_\ell,\ \triangle'_\ell\beta_\ell=d^-_\ell\ \ (\ell=i,j,k)$

라 두면 (P11)과 같은 일반 GP가 된다.

$$(P11)\quad \min: p_i\left(\frac{d^+_i}{\triangle_i}\right)+p_j\left(\frac{d^-_j}{\triangle'_j}\right)+p_k\left(\frac{d^+_K}{\triangle_k}+\frac{d^-_K}{\triangle'_k}\right) \tag{84}$$
$$s.t: (AX)_i-d^+_i+d^-_i=b_i \tag{85}$$
$$(AX)_j-d^+_j+d^-_j=b_j \tag{86}$$
$$(AX)_k-d^+_k+d^-_k=b_k \tag{87}$$
$$X \geq 0 \tag{88}$$

바꾸어 말하면 (P9)에서 얻어지는 해 α_ℓ와 β_ℓ은

$$\alpha_\ell=\frac{d^+_\ell}{\triangle'_\ell}\ \text{또는}\ \beta_\ell=\frac{d^-_\ell}{\triangle_\ell}\quad(\ell=i,j,k)$$

이므로 목표의 열망수준의 미달성 정도를 허용오차에 대한 비로 나타낸 것이다. 그러나 이에 반하여 일반 GP에서는 미달성의 정도인 편차를 의미한다. 또 (P9)의 목적식 (84)가 보여주는 바와 같이 일반 GP가 목표와의 편차를 최소화하는데 목적을 두고 있음에 반해, FGP에서는 허용오차에 대한 편차의 상대적 비값을 최소화하는데 그 목적을 두고 있다. 예컨데 위 설례의 해에서 제1목표와 제3목표의 미달성이 허용오차에 대한 상대적 비율인 0.625(=10/16)및 5(=25/5)로 나타난다. 이는 다목표 의사결정기준 (multi-criteria decision making)의 목표 설정에 필요한 정보로 이용될 수 있음을 뜻한다.

(P11)에서 $\triangle_\ell=\triangle'_\ell=1$이면 GP와 목적식마저 동일하게 된다. 즉 GP는 허용오차가 1인 FGP이다.

5. 결 론

Zimmermann의 LP에 의한 벡타최대화문제의 해법은 FLP를 가능하게 하였고 이는 다시 Narasimhan에

의해 FGP모형을 구축할 수 있게 하였다. 그러나 이 모형은 Hannan에 의한 합리적인 해법의 개발로써 실제적인 이용이 가능하게 되었다고 볼 수 있다.

본 연구에서는 Narasimhan이 제시한 FGP 문제를 일반화하여 그 해법을 제시하고 이를 확장하여 개별 목표의 중요성을 반영할 수 있도록 가중치 및 선제 FGP를 제안하였다.

특히 최근에 다목표 의사결정(multi-criteria decision making)에 대한 관심의 증대와 이의 해법에 관한 노력에 확장된 FGP문제가 이용될 수 있을 것이며 기존의 GP에 불명확의 개념이 도입될 수 있으므로 이의 응용에 관한 연구는 중요한 의미를 지닌다고 보여진다.

참 고 문 헌

1. Bellman, R.E., and Zadeh, L.A., *Decision-Making in a Fuzzy Environment*, Vol. 4, No. 4, pp. 141-164, 1970.
2. Dyson, R.G., Maximin Programming, Fuzzy Linear Programming and Multicriteria Decison Making, *J. of Operational Research Society*, Vol. 31, No. 3, pp. 263-267, 1980.
3. Hannan, Edward L., On Fuzzy Goal Programming, *Decision Science*, Vol. 12, No. 3, pp. 522-531, 1981.
4. Hannan, Edward L., Some Further Comments on Fuzzy Priorities, *Decision Science*, Vol. 12, No. 3, pp. 539-541, 1981.
5. Hannan, Edward L., *Contrasting Fuzzy Goal Programming and Multicriteria Programming, Decision Science*, Vol. 13, No. 2, pp. 337-339, 1982.
6. Hipel, Keith W., *Fuzzy Set Methodologies in Multicrjteria Modelling, Fuzzy Information and Decision Processes*, ed. by M.M. Gupta and E. Sanchez, North-Holland Publishing Co., pp. 231-237, 1982.
7. Holzman, Albert G., *Operational Research Support Methodologies*, (ed.), pp. 569-606, Marcel Dekker Inc., New York, 1979.
8. Ignizio, James P., *Goal Programming and Extensions*, Lexington Books, Lexington, 1976.
9. Ignizio, James P., On the (Re)Discovery of Fuzzy Goal Programming, *Decision Science*, Vol. 13, No. 2 pp. 331-335, 1982.
10. Kaufmann, A., *Introduction to the Theory of Fuzzy Subsets*, Academic Press, New York, 1975.
11. Kickert, Walter J.M., *Fuzzy Theories on Decision Making: a Critical Review*, Martinus Nijhoff Social Science Division, Leiden, 1978.
12. Kuhn, H.W and Tucker, A.W., *Nonlinear Programming Introduction*, ed by J. Neymand., Proc. of 2nd Berkley Symp. on Mathematical Statistics and Probabilities, 1951.
13. Lee, Sang M., *Introduction to Management Science*, The Dryden Press, 1983.
14. Lee, Sang M., *Linear Optimization for Management*, Petrocelli, New York, 1976.
15. Narasimhan, Ram, Goal Programming in a Fuzzy Environment, *Decision Science*, Vol. 11, No. 2, pp. 325-336, 1980.
16. Narasimhan, Ram, On Fuzzy Goal Programming - Some Comments, *Decision Science* Vol. 12, No. 3, pp. 532-538, 1981.
17. Verdegay, J.L., *Fuzzy Mathematical Programming, Fuzzy Information and Decision Processes*, ed. by M.M. Gupta and E. Sanchez, pp. 231-237, North-Holland Publishing Co., 1982.
18. Yager, Ronald R., A New Methodology for Ordinal Multiobjective Decisions Based on Fuzzy Sets, *Decision Science*, Vol. 12, No. 4, pp. 589-600, 1981.
19. Zadeh, L.A., *Fuzzy Sets, Information and Control*, Vol. 8, pp. 338-353, 1965.
20. Zimmermann, Hans-J., Description and Optimization of Fuzzy Systems, *J. General Systems*, Vol. 2, pp. 209-215, 1976.
21. Zimmermann, Hans-J., *Fuzzy Programming and LP with Several Objective Functions*, North-

Holland Publishing Co., 1978.

22. Zimmermann, Hans-J., Using Fuzzy Sets in O. R., ***European*** *J. of O. R.* Vol. 13, pp. 201-216. 1983.

23. 양태용, 김현준, Fuzzy계획법의 일반화에 관한 연구, 한국경영과학회지, 제11권 제 1 호, pp. 36-43, 1986.

24. 김종순, 황규승, 공차를 이용한 불명확 목표계획 모형, 경영학 연구, 제15권, 제 2 호, pp. 139-156, 한국경영학회, 1985.

25. 정충영, 불명확 목표계획모형의 해법, 경제경영 연구, 제 2 권, pp. 175-197, 경북대 경제경영연구소, 1986.