論 文

大 韓 造 船 學 會 誌
第23卷 第4號 1986年 12月
Journal of the Society of
Naval Architects of Korea
Vol. 23, No. 4, December 1986

境界要素法에 의한 2次元 應力解析

張 昌 斗* · 李 成 薰**

Two-Dimensional Stress Analysis Using Boundary Element Method

by

Chang Doo Jang* · Sung Hoon Lee**

Abstract

The fundamental theory and application of boundary element method for two-dimensional problem are introduced in this paper.

Based on this boundary element procedure, several numerical calculations such as circular cavity problem, a thin plate with hole under tension and a long thick-walled cylinder under internal pressure are performed.

The numerical results show fairly good agreement with exact solutions or results of finite element method.

1. 서 언

구조물의 응력해석에는 크게 나누어 해석적인 방법과 수치적인 방법으로 대별할 수 있으며, 수치해석법으로 여러가지 방법이 있으나 현재 가장 널리 이용되고 있는 방법으로는 유한요소법(Finite Element Method: FEM)을 들 수 있다.

유한요소법은 소위 영역형 해법(domain type solution)으로서 물체의 전영역을 이산화(discretization)하여 해석하는 데 비하여, 경계요소법(Boundary Element Method: BEM)은 구조물의 경계만을 분할하여 경계상의 적분방정식을 이산화시켜 선형대수방정식의 해를 구하는 방법이다. 따라서 대상물체의 차원을 하나 만큼 감소시킬 수 있어, 영역형 해법에 비해 입력데이타나 계산기용량 및 계산시간을 현저히 감축할 수 있는 이점이 있다.

경계요소법은 종래 물리수학의 영역에서는 경계적분방정식법(Boundary Integral Equation Method), 특이점 해법(Singularity Method) 또는 Green함수법 등의 이름으로 사용되어 왔는데, 여기서는 주로 고체역학분야에의 지금까지의 응용을 보기로 한다. 선형탄성문제에 대한 경계요소법의 이론적 기초는 Love[1], Bergman과 Schiffer[2], Muskhelishvili[3], Mikhlin 및 Kupradze[4,5]등에서 볼 수 있다. 이 해법의 공학문제에의 응용은 1960년대 시작되었는데 적분방정식을 이산화 시켜 선형대수 방정식으로 귀착시켜 전산기를 사용하여 해를 구하는 방법은 Jaswon 및 Symm[6,7]등에 의해 포텐셜문제에 대해 간접법의 견지에서 시작되었다. 그후 Jaswon, Maiti[8]등에 의해 판굽힘문제에 대해 연구가 계속되었다.

한편 체적적분을 경계상의 면적분으로 변환하는

접수일자 : 1986년 9월 25일, 재접수일자 : 1986년 10월 23일
* 정회원, 서울대학교 공과대학
** 정회원, 대우조선(주)

Green의 공식에 근거한 직접법을 이용한 선구적 연구로는 비틂문제에 대해 Jaswon과 Ponter[9]에 의해 이루어 졌고, 그후 Rizzo, Watson, Brebbia, Walker[10]~[13]등에 의해 적극적으로 연구개발이 진행되었다. 최근에는 경계요소법에 대한 관심이 높아져 고정도(高精度)요소의 개발 및 해법의 효율화 등을 통하여 실제 공학문제에의 응용을 시도한 결과, 선형문제 뿐만아니라 비선형문제에도 많은 발전을 이루었으며, 열탄소성과 동탄성문제에 까지 확장되었고 전자기 문제와 유체분야등 비구조분야에 까지 많은 발전을 이루고 있다 [14]~[18].

한편 국내에서는 경계요소법을 이용한 연구는 아직 초기도입 단계에 있어 극히 드문 편이다. 따라서 여기에서는 경계요소법의 기본이론을 도입하여 몇가지 2차원 탄성모델의 응력을 계산하고 엄밀해나 유한요소법의 결과와 비교함으로써 경계요소법의 유효성을 검토하였다.

2. 경계적분방정식의 정식화

2.1. 일반관계식

Fig. 1과 같은 직각 좌표계에 관한 2차원 등방성 탄성 물체의 평형조건식은 다음과 같이 표시된다.

$$\sigma_{ij,j}+b_i=0 \qquad (i,j=1,2) \tag{1}$$

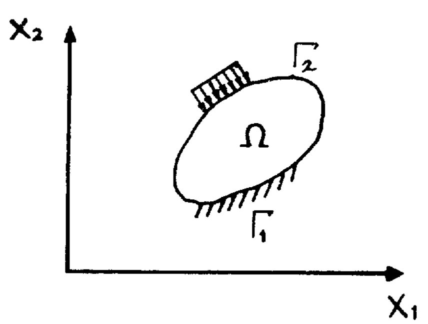
여기서 σ_{ij}는 응력성분, b_i는 body force이다.

응력과 변형도의 관계식은

$$\sigma_{ij}=\frac{2\mu\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\ \varepsilon_{kk}+2\mu\varepsilon_{ij} \tag{2}$$

여기서 μ와 ν는 전단탄성계수 및 Poisson비 이고, δ_{ij}는 Kronecker delta를 나타낸다. 변형도와 변위의 관계는

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{3}$$



Fi~. 1 2-D Boundary value problem

물체는 내부영역 Ω를 갖고 boundary Γ(변위(u)가 지정되는 boundary Γ_1과 traction(p)이 지정되는 boundary Γ_2의 합)를 갖는다고 하자. 탄성평형상태(b_k, p_k, u_k)에 가상변위 u_k^*를 주고 u_k^*를 weighting function으로 생각하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\int_\Omega(\sigma_{k,j}+b_k)u_k^*\ d\Omega=\int_{\Gamma_2}(p_k-\bar{p}_k)u_k^*\ d\Gamma + \int_{\Gamma_1}(\bar{u}_k-u_k)p_k^*\ d\Gamma \tag{4}$$

여기서 $\bar{u}_k$와 $\bar{p}_k$는 각각 boundary Γ_1과 Γ_2에서 지정된 변위와 traction이고 p_k^*는 u_k^*계에 해당하는 traction으로 $p_k^*=\sigma_{jk}^*n_j$이다.

Green의 정리에 의해 (4)식은 다음과 같이 된다 (부록 참조).

$$\int_\Omega b_ku_k^*d\Omega+\int_\Omega\sigma_{jk,j}^*u_kd\Omega=-\int_{\Gamma_2}\bar{p}_ku_k^*d\Gamma -\int_{\Gamma_1}p_ku_k^*d\Gamma+\int_{\Gamma_1}\bar{u}_kp_k^*d\Gamma+\int_{\Gamma_2}u_kp_k^*d\Gamma \tag{5}$$

이제

$$\sigma_{jk}^*{}_{,j}+\Delta_l^p=0 \tag{6}$$

을 만족하는 해가 존재하면 Ω내에서 (5)식은 다음과 같이 된다.

$$u_l^p+\int_{\Gamma_1}\bar{u}_kp_k^*d\Gamma+\int_{\Gamma_2}u_kp_k^*d\Gamma=\int_\Omega b_ku_k^*d\Omega +\int_{\Gamma_1}p_ku_k^*d\Gamma+\int_{\Gamma_2}\bar{p}_ku_k^*d\Gamma \tag{7}$$

여기서 Δ_l^p과 u_l^p은 각각 p점에서의 l방향으로의 unit force(Dirac delta function)와 unit displacement이다.

$\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2$이므로 (7)식은 일반적으로 다음과 같다.

$$u_l^p+\int_\Gamma u_kp_k^*d\Gamma=\int_\Gamma p_ku_k^*d\Gamma+\int_\Omega b_ku_k^*d\Omega \tag{8}$$

이제 가상변위 u_k^*와 이에 대응하는 traction p_k^*를 unit force에 의한 변위와 traction으로 생각하면 unit force의 방향성을 고려하여 u_k^*와 p_k^*는 u_{lk}^*, p_{lk}^*로 쓸 수 있다. 이는 각각 l방향의 unit force에 의한 k방향으로의 변위와 traction을 나타낸다(Fig. 2 참조).

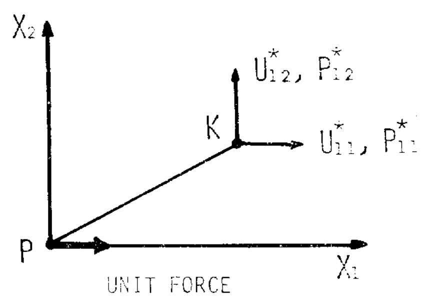


Fig. 2 Influence of unit force

방향성을 고려하면 (8)식은 다음식과 같다.

$$u_l^p+\int_\Gamma u_k p_{lk}^* d\Gamma=\int_\Gamma p_k u_{lk}^* d\Gamma+\int_\Omega b_k u_{lk}^* d\Omega \quad (9)$$

2.2. 기본해

평형방정식 (1)을 displacement로 표시하기 위해 (2)식과 (3)식을 (1)에 대입하면 다음과 같은 Navier방정식이 된다.

$$L_{ij}u_j+b_i=0 \quad (10)$$

여기서

$$[L_{ij}]=\mu\begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{2\partial x_2^2}, & \frac{1}{2(1-2\nu)}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2} \\ \frac{1}{2(1-2\nu)}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}, & \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{1-\nu}{1-2\nu}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\end{bmatrix},\quad u_j=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}$$

이제 Δ_l^p즉 l방향의 단위힘을 i방향의 body force로 생각하면 (6)식은 다음과 같이 된다.

$$L_{ik}u_{lk}^*+\delta_{li}\,\Delta_l^p=0 \quad (11)$$

여기서 δ_{li}는 Kronecker delta이다.

(11)식을 만족하는 해 u_{lk}^*를 기본해라 하며 다음과 같이 표현된다.

$$u_{lk}^*=\frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)}\left[(3-4\nu)\ln\left(\frac{1}{r}\right)\delta_{lk}+\frac{\partial r}{\partial x_l}\cdot\frac{\partial r}{\partial x_k}\right] \quad (12)$$

여기서 $\frac{\partial r}{\partial x_i}=\frac{r_i}{r}$이다.

또

$$p_k^*=\sigma_{kj}^*n_j$$

$$\sigma_{kj}^*=\frac{2\mu\nu}{1-2\nu}\delta_{kj}\,\varepsilon_{mm}^*+2\mu\varepsilon_{kj}^*$$

$$\varepsilon_{kj}^*=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k^*}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j^*}{\partial x_k}\right)\text{이므로}$$

$$p_{lk}^*=\sigma_{jlk}^*n_j$$

$$\sigma_{lkj}^*=\frac{2\mu\nu}{1-2\nu}\delta_{kj}\varepsilon_{lmm}^*+2\mu\varepsilon_{lkj}^* \quad (13)$$

$$\varepsilon_{lkj}^*=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_{lk}^*}{\partial x_j}+\frac{\partial u_{lj}^*}{\partial x_k}\right)$$

여기서 σ_{lkj}^*와 ε_{lkj}^*는 p점에서 l방향으로 unit force가 작용했을 때 Γ에서 k점에서의 j방향으로의 응력과 변형도이다(Fig. 3 참조).

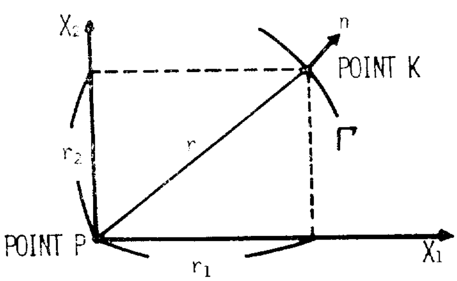


Fig. 3 Geometrical definitions

p_{lk}^*는 (12)식을 (13)식에 대입하면 다음과 같다.

$$p_{lk}^*=-\frac{1}{4\pi(1-\nu)r}\left[\frac{\partial r}{\partial n}\left\{(1-2\nu)\delta_{kl}+2\frac{\partial r}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial r}{\partial x_l}\right\}-(1-2\nu)\left(\frac{\partial r}{\partial x_l}n_k-\frac{\partial r}{\partial x_k}n_l\right)\right] \quad (14)$$

위의 u_{lk}^*와 p_{lk}^*는 plane strain의 경우이고 plane stress의 경우에는 ν대신 $\bar{\nu}=\frac{\nu}{1+\nu}$를 쓴다.

2.3. 경계점에서의 정식화

경계적분 방정식 (8)을 유도하는데는 unit force가 영역 Ω내에 있을 경우이다. unit force가 boundary상에 있을 경우에는 (8)식은 성립하지 않는다.

이제 unit force가 boundary상에 있을 경우에 경계적분 방정식은 어떻게 되는가를 살펴보자.

경계적분방정식 (9)식의 왼쪽 첫번째 항 u_l^p은 $\int_\Omega u_k \Delta_l^p d\Omega$에서 오는 결과이므로 Δ_l^p이 boundary상에 있을 경우에는 성립하지 않는다.

이제 unit force가 경계점상에 있을 경우에 경계적분 방정식은 다음과 같이 하여 구할 수 있다.

Fig. 4와 같이 boundary를 unit force가 있는 점에서 반경 ε만큼 증가시키면 Γ는 Γ_ε과 Γ_R의 합으로 생각할 수 있고 (9)식의 첫번째 적분항은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\int_\Gamma u_k p_{lk}^* d\Gamma=\int_{\Gamma_R} u_k p_{lk}^* d\Gamma+\int_{\Gamma_\varepsilon} u_k p_{lk}^* d\Gamma$$

이제 $\varepsilon\to 0$의 경우 Γ_ε에 대한 적분을 생각해 보면,

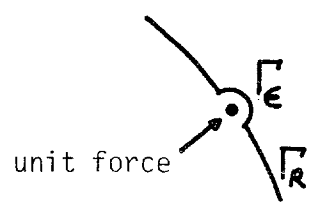


Fig. 4 Integration contour for unit force on the boundary

$$I_1=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{\Gamma\epsilon}u_k p_{lk}{}^* d\Gamma\right\}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{\Gamma\epsilon}-u_k\left[\frac{\partial r}{\partial n}\left\{(1-2\nu)\delta_{lk}+2\frac{\partial r}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial r}{\partial x_l}\right\}\right.\right.$$

$$-(1-2\nu)\left(\frac{\partial r}{\partial x_l}n_k\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{\partial r}{\partial x_k}n_l\right)\right]\frac{1}{4\pi(1-\nu)r}d\Gamma\right\} \tag{15}$$

윗식에서 $\varepsilon\equiv r$이고 $n_k=\frac{\partial x_k}{\partial r}$, $n_l=\frac{\partial x_l}{\partial r}$이므로 $\frac{\partial r}{\partial x_l}n_k-\frac{\partial r}{\partial x_k}n_l=0$, $\frac{\partial r}{\partial n}=1$이다. 그러므로 (15)식은 다음과 같다.

$$I_1=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\int_{\Gamma\epsilon}u_k\left\{(1-2\nu)\delta_{lk}\right.\right.$$

$$\left.\left.+2\frac{\partial r}{\partial x_k}\frac{\partial r}{\partial x_l}\right\}\cdot\frac{d\Gamma}{4\pi(1-\nu)r}\right] \tag{16}$$

$l=1$일때 I_1은 다음과 같다. 즉 Fig. 4에서 $d\Gamma=rd\theta$등을 고려하면,

$$I_1=-\int_0^\pi\left\{u_1^p(1-2\nu)+2u_1^p\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)^2\right.$$

$$\left.+u_2^p\frac{\partial r}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial r}{\partial x_2}\right\}\frac{d\theta}{4\pi(1-\nu)}$$

$$=-\int_0^\pi[u_1^p(1-2\nu)+2u_1^p\cos^2\theta$$

$$+u_2^p\cos\theta\sin\theta]\frac{d\theta}{4\pi(1-\nu)}$$

$$=-\frac{1}{4\pi(1-\nu)}\{\pi(1-2\nu)u_1^p+\pi u_1^p\}=-\frac{1}{2}u_1^p \tag{17}$$

$l=2$에 대해서 위와 같이 계산하면

$I_1=-\frac{1}{2}u_2^p$이다.

그러므로 일반적으로

$$I_1=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{\Gamma\epsilon}u_k p_{lk}{}^* d\Gamma\right\}=-\frac{u_l{}^p}{2}$$

(9)식의 두번째 적분항은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\int_\Gamma p_k u_{lk}{}^* d\Gamma=\int_{\Gamma_B}p_k u_{lk}{}^* d\Gamma+\int_{\Gamma\epsilon}p_k u_{lk}{}^* d\Gamma \tag{18}$$

Γ_ϵ에 대한 적분의 극한치 I_2는,

$$I_2=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma\epsilon}p_k u_{lk}{}^* d\Gamma$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma\epsilon}p_k\left\{(3-4\nu)\ln\left(\frac{1}{r}\right)\delta_{lk}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial r}{\partial x_l}\cdot\frac{\partial r}{\partial x_k}\right\}\frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\pi\left\{p_k(3-4\nu)\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\delta_{lk}\right.$$

$$\left.+\cos\theta\sin\theta\right\}\frac{\varepsilon d\theta}{8\pi\mu(1-\nu)}=0$$

이상으로부터 smooth boundary에 대해 (9)식은 다음식으로 변형된다.

$$\frac{1}{2}u_l^p+\int_\Gamma u_k p_{lk}{}^* d\Gamma=\int_\Gamma p_k u_{lk}{}^* d\Gamma+\int_\Omega b_k u_{lk}{}^* d\Omega \tag{19}$$

boundary가 smooth하지 않으면 일반적으로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$c^p u_l^p+\int_\Gamma u_k p_{lk}{}^* d\Gamma=\int_\Gamma p_k u_{lk}{}^* d\Gamma+\int_\Omega b_k u_{lk}{}^* d\Omega \tag{20}$$

변위와 traction과 body force는 각각 다음과 같이 vector로 표시할 수 있다.

$$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{p}=\begin{bmatrix}p_1\\p_2\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix} \tag{21}$$

또 singular solution $u_{lk}{}^*$와 $p_{lk}{}^*$는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\boldsymbol{u}^*=\begin{bmatrix}u_{11}{}^* & u_{12}{}^*\\u_{21}{}^* & u_{22}{}^*\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{p}^*=\begin{bmatrix}p_{11}{}^* & p_{12}{}^*\\p_{21}{}^* & p_{22}{}^*\end{bmatrix} \tag{22}$$

(21)과 (22)를 이용하여 (19)식을 변형하면 다음과 같이 matrix 형태로 쓸 수 있다.

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{I}\boldsymbol{u}^p+\int_\Gamma \boldsymbol{p}^*\boldsymbol{u}d\Gamma=\int_\Gamma \boldsymbol{u}^*\boldsymbol{p}d\Gamma+\int_\Omega \boldsymbol{u}^*\boldsymbol{b}d\Omega \tag{23}$$

여기서 $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$

boundary상의 element에서 변위와 traction, 영역내의 element에서의 body force가 일정하다고 하면 (23)식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{I}\boldsymbol{u}^p+\sum_{j=1}^n\left\{\int_{\Gamma_j}\boldsymbol{p}^*d\Gamma\right\}\boldsymbol{u}_j$$

$$=\sum_{j=1}^n\left\{\int_{\Gamma_j}\boldsymbol{u}^*d\Gamma\right\}\boldsymbol{p}_j+\sum_{l=1}^m\left\{\int_{\Omega_l}\boldsymbol{u}^*d\Omega\right\}\boldsymbol{b}_l \tag{24}$$

boundary상의 element내에서 변위와 traction, 영역내의 element에서의 body force가 선형적으로 변한다면 (23)식은 다음과 같이 쓸 수 있다

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{I}\boldsymbol{u}^p+\sum_{j=1}^n\left\{\int_{\Gamma_j}\boldsymbol{p}^*\phi^T d\Gamma\right\}\boldsymbol{u}_j$$

$$=\sum_{j=1}^n\left\{\int_{\Gamma_j}\boldsymbol{u}^*\phi^T d\Gamma\right\}\boldsymbol{p}_j+\sum_{l=1}^m\int_{\Omega_l}\{\boldsymbol{u}^*M^T d\Gamma\}\boldsymbol{b}_l \tag{25}$$

여기서 ϕ^T와 M^T는 Shape function이며 ϕ^T는 선형요소인 때 다음과 같다.

$$\phi^T=\begin{bmatrix}\phi_1 & \phi_2 & 0 & 0\\0 & 0 & \phi_1 & \phi_2\end{bmatrix}$$

$$\phi_1=-\frac{1}{2}(\xi-1),\qquad \phi_2=\frac{\xi+1}{2}$$

(24)식과 (25)식의 $\int_{\Gamma_j} p^* d\Gamma$와 $\int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma$는 절점 $p(=i)$에 unit force가 있을때 요소 j에서의 적분값이므로 이는 각각 H_{ij}, G_{ij}로 쓸 수 있고 (24), (25)식은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\frac{1}{2}Iu^i+\sum_{j=1}^{n}H_{ij}u_j=\sum_{j=1}^{n}G_{ij}p_j+b^i$$

(24), (25)식의 $\frac{1}{2}Iu^i$는 $\left[\int_{\Gamma_j} p^*\phi^T d\Gamma\right]u_j$에 포함될 수 있으므로 (24), (25)식을 matrix형식으로 쓰면 다음과 같다.

$$HU=GP+B \tag{26}$$

body force를 무시하고 강체변형을 생각하면 (26)식은 다음과 같다.

$$HU=0 \tag{27}$$

(20)식에서 boundary가 smooth하지 않을 때의 값 C^p는 H matrix의 diagonal term으로 들어가게 되는데 C^p의 값을 구하기가 어려우므로 (27)식에서 보는 바와 같이 diagonal term은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$HI=0$$

즉

$$H_{2i-1,2i-1}=-\sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{n}H_{2i-1,2j-1} \tag{28}$$

$$H_{2i,2i}=-\sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{n}H_{2i,2j}$$

I는 주어진 방향에서의 단위 변위 vector이다.

2.4. 내부점에서의 정식화

물체의 내부점에서의 변위와 응력은 다음과 같이 구할 수 있다.

(9)식은 unit force가 내부에 있을때의 정식이므로 그대로 내부점의 변위로 생각할 수 있다. 즉,

$$u_l^p=\int_\Gamma u_{lk}^* p_k d\Gamma-\int_\Gamma p_{lk}^* u_k d\Gamma+\int_\Omega b_k u_{lk}^* d\Omega \tag{29}$$

이것을 matrix형태로 쓰면

$$u^p=\int_\Gamma u^* p d\Gamma-\int_\Gamma p^* u d\Gamma+\int_\Omega b u^* d\Omega \tag{30}$$

물체 내부에서의 응력은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\sigma_{ij}=\frac{2\mu\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\varepsilon_{ll}+2\mu\varepsilon_{ij}\text{이므로} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}=&\int_\Gamma\left\{\frac{2\mu\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\frac{\partial u_{lk}^*}{\partial x_l}+\mu\left(\frac{\partial u_{ik}^*}{\partial x_j}+\frac{\partial u_{jk}^*}{\partial x_i}\right)\right\}p_k d\Gamma\\&-\int_\Gamma\left\{\frac{2\mu\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\frac{\partial p_{lk}^*}{\partial x_l}+\mu\left(\frac{\partial p_{ik}^*}{\partial x_j}+\frac{\partial p_{jk}^*}{\partial x_i}\right)\right\}u_k d\Gamma\\&+\int_\Omega\left\{\frac{2\mu\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\frac{2u_{lk}^*}{\partial x_l}+\mu\left(\frac{\partial u_{ik}^*}{\partial x_j}+\frac{\partial u_{jk}^*}{\partial x_i}\right)\right\}b_k d\Omega\end{aligned} \tag{32}$$

(32)식을 정리하면 다음과 같다.

$$\sigma_{ij}=\int_\Gamma D_{kij}p_k d\Gamma-\int_\Gamma S_{kij}u_k d\Gamma+\int_\Omega D_{kij}b_k d\Omega \tag{33}$$

여기서

$$D_{kij}=\frac{1}{r}\left[(1-2\nu)(\delta_{ki}r_{,j}+\delta_{kj}r_{,i}-\delta_{ij}r_{,k})+2r_{,i}r_{,j}r_{,k}\right]\cdot\frac{1}{4\pi(1-\nu)}$$

$$\begin{aligned}S_{kij}=\frac{2\mu}{r^2}\Big\{&2\frac{\partial r}{\partial n}\left[(1-2\nu)\delta_{ij}r_{,k}+\nu(\delta_{ik}r_{,j}+\delta_{jk}r_{,i})-4r_{,i}r_{,j}r_{,k}\right]+2\nu(n_i r_{,j}r_{,k}+n_j r_{,i}r_{,k})\\&+(1-2\nu)(2n_k r_{,i}r_{,j}+n_j\delta_{ik}+n_i\delta_{jk})-(1-4\nu)n_k\delta_{ij}\Big\}\frac{1}{4\pi(1-\nu)}\end{aligned} \tag{34}$$

$r_{,i}=\frac{\partial r}{\partial x_i}=\frac{r_i}{r}$이고 plane stress의 경우에 ν대신 $\bar{\nu}=\frac{\nu}{1+\nu}$를 쓴다.

3. 수치계산 및 고찰

먼저 경계요소법의 타당성을 보이기 위해 다음과 같은 세가지 모델을 택하여 계산하였다.

(1) model 1. circular cavity

Fig. 5와 같이 무한영역에 반경 3인 circular cavity [12]에 압력 $p(=100)$를 가했을때 내부에서 radial방향의 stress를 exact solution[20]과 비교한 결과 거의 일치함을 보였다(Table 1).

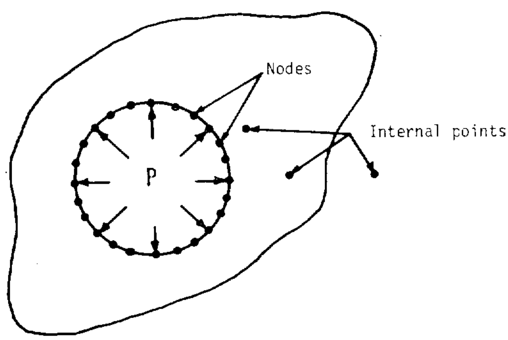


Fig. 5 Circular cavity under internal pressure

Table 1 Radial stress at internal points

cavity 중앙점부터의 거리	B.E.M	exact solution
4	−57.235	−56.250
6	−25.295	−25.000
10	− 9.107	− 9.000
20	− 2.277	− 2.250
50	− 0.364	− 0.360
200	− 0.228×10^{-1}	− 0.225×10^{-1}
1,000	− 0.924×10^{-2}	− 0.900×10^{-1}

(2) **model 2. 인장력을 받는 유공평판**

Fig. 6의 (a)와 같이 중앙에 구멍을 갖는 정방형 판에 x_1방향으로 σ_0의 인장력을 가했을 때, $x_1=0$ 단면상의 응력분포를 (c)에 표시하였다. 그림에서 곡선은 무한평판에 구멍이 있는 경우의 exact solution[20]이고, 유한평판에 대해서는 FEM으로 계산한 결과와 비교하였다. 판의 대칭성을 고려하여 판을 $\frac{1}{4}$ 분할하여 해석하였으며 FEM은 314개의 절점자유도의 2차요소로,

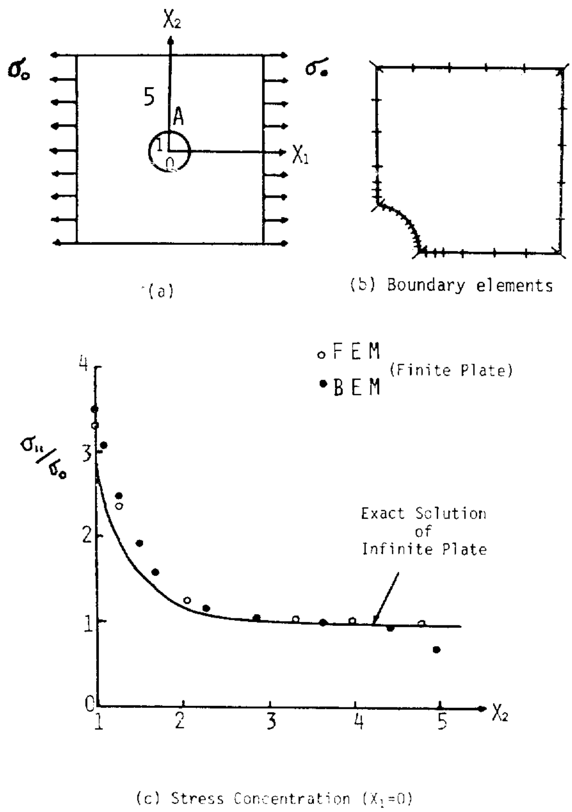


Fig. 6 Stress concentration factor of finite plate with a hole

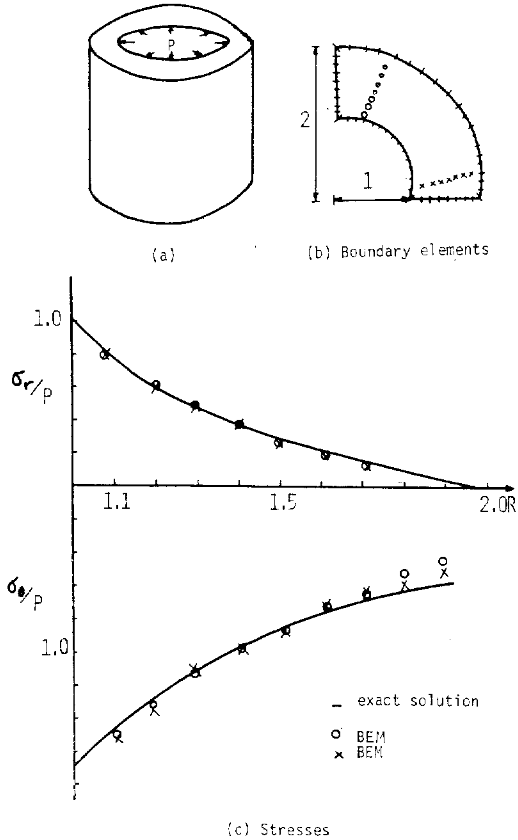


Fig. 7 Stress analysis of thick cylinder under internal pressure

BEM은 82개의 선형요소로 해석하였다.

FEM의 결과는 응력집중계수가 3.3정도이고 BEM의 경우는 3.55인데 이는 Roark와 Young[21]의 결과 3.93의 값과 비교하면 BEM이 비교적 잘 맞는다는 것을 알 수 있다.

(3) **model 3. thick cylinder**

Fig. 7의 (a)와 같이 내압 p를 받는 무한히 긴 thick cylinder의 내부점에서의 radial stress와 hoop stress를 경계요소법으로 구한 결과를 exact solution[19]과 비교하였다. 계산의 편의상 Fig. 3의 (b)와 같이 cylinder의 $\frac{1}{4}$을 분할하여 해석하였으며 그 결과를 (c)에 도시하였다. 경계요소법으로 구한 실린더 내부의 응력분포는 엄밀해와 거의 일치함을 알수있다.

4. 결　　언

경계요소법의 기초이론을 2차원 탄성문제에 도입하

여 기본정식화 과정과 수치계산을 위한 기법등을 기술하고, 이를 2차원 탄성문제해석에 적용하였다. 즉 무한판의 가운데에 원공이 있고, 여기에 내압이 작용하는 경우의 응력해석, 1축 인장을 받는 유공판의 응력집중 해석 및 내압을 받는 두꺼운 실린더 내부의 응력해석 등을 행한 결과, 엄밀해나 유한요소법의 결과와 거의 일치하였다. 따라서 2차원 탄성문제를 경계요소법으로 해석하면 유한요소법에 비해 상당히 적은 자유도로도 정도 높은 해를 효율적으로 구할 수 있음이 확인되었다.

참 고 문 헌

〔1〕 Love, A.E.H., A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Cambridge Univ. Press, 4 th ed., 1927.

〔2〕 Bergman, S. and Schiffer, M., Kernel Functions and Elliptic Differential Equations in Mathematical Physics, Academic Press, New York, 1953.

〔3〕 Muskhelishvili, N.I., Singularity Integral Equations, P. Noordhoff, Groningen, 1953.

〔4〕 Mikhlin, S.G., Multidimensional Singular Integrals and Integral Equations, Pergamon Press, London, 1965.

〔5〕 Kupradze, V.D., Potential Methods in the Theory of Elasticity, I.P.S.T., Jerusalem, 1965.

〔6〕 Jaswon, M.A., "Integral Equation Methods in Potential Theory I", *Proc., Roy, Soc.*, Ser. A, 275, 1963.

〔7〕 Symm, G.T., "Integral Equation Methods in Potential Theory II", *Proc., Roy, Soc.*, Ser. A, 275, 1963.

〔8〕 Jaswon, M.A. and Maiti, M., "An Integral Equation Formulation of Plate Bending Problems", *Jour. Eng. Math.*, 2, 1968.

〔9〕 Jaswon, M.A. and Ponter, A.R., "An Integral Equation Solution of the Torsion Problem", *Proc. Roy. Soc.*, Ser. A, 273, 1963.

〔10〕 Rizzo, F.J., "An Integral Equation Approach to Boundary Value Problem of Classical Elastostatics", Quart. Appl. Math., 25-1, 1967.

〔11〕 Alarcon, E., Brebbia, A.C. and Dominquez, J., "The Boundary Element Method in Elasticity", *Int. Jour. Mech.* Sci., 20, 1978.

〔12〕 Brebbia, C.A., The Boundary Element Method for Engineers, Pentech Press, London, 1978.

〔13〕 Brebbia, C.A. and Walker, S., Boundary Element Techniques in Engineering, NewnesButterworths, 1980.

〔14〕 Brebbia, C.A. ed., New Development in Boundary Element Methods, CML Publications, Southampton, 1980.

〔15〕 Banerjee, P.K. and Butterfield, R., "Boundary Element Method in Engineering Science", McGraw-Hill, 1981.

〔16〕 Tanaka, M. and Tanaka, K., "On a New Boundary Element Solution Scheme for Elasto-plasticity", Ing.-Arch., 50, 1981.

〔17〕 Morjaria, M. and Mukherjee, S., "Inelastic Analysis of Transverse Deflection of Plates by Boundary Element Method", *ASME Jour. Appl. Mech.*, 47-2, 1980.

〔18〕 田中正隆, 田中喜久昭, 境界要素法一基礎と應用, 丸善株式會社

〔19〕 Rockey, K.C., Evans, H.R., Griffiths, D.W. and Nethercot, D.A., The Finite Element Method, Crosby Lockwood Staples, London, 1975.

〔20〕 Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N., Theory of Elasticity, 3rd ed., 1970.

〔21〕 Roark, R.J. and Young, W.C., Formulas for Stress and Strain, McGraw-Hill, 5th ed., 1975.

〔22〕 Washizu, K., Variational Methods in Elasticity and Plasticity, 2nd ed., 1975.

〔23〕 Sokolonikoff, I.S., Mathematical Theory of Elasticity, McGraw-Hill.

부 록

Green의 정리를 이용하면

$$\int_{\Omega} -\sigma_{jk,j} u_k d\Omega = \int_{\Omega} u_{k,j}\sigma_{jk} d\Omega - \int_{\Gamma_1} n_j \sigma_{jk} u_k d\Gamma - \int_{\Gamma_2} n_j \sigma_{jk} u_k d\Gamma$$

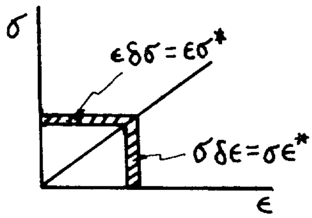


Fig. A1

또 $\varepsilon_{jk}=\frac{1}{2}(u_{j,k}+u_{k,j})$, $p_k=\sigma_{jk}n_j$를 고려하면

$$\int_{\Omega}(\sigma_{jk,j}+b_k)u_k^* d\Omega = \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega - \int_{\Omega} \varepsilon_{jk}^* \sigma_{jk} d\Omega + \int_{\Gamma_1} p_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u_k^* p_k d\Gamma$$

u_k^*가 가상 변위이므로 선형탄성체에 대해 $\sigma_{jk}\varepsilon_{jk}^*=\sigma_{jk}^*\varepsilon_{jk}$이다(Fig. A1참조).

$$\int \sigma_{jk}^* \varepsilon_{jk} d\Omega = -\int_{\Omega} \sigma_{jk}^*{}_{,j} u_k d\Omega + \int_{\Gamma_1+\Gamma_2} n_j \sigma_{jk}^* u_k d\Gamma$$

이상의 식으로부터 본문중의 (4)식은 (5)식과 같이 된다.