

그림 1. 공정의 S자 모양 계단 응답
Fig. 1. S-shaped step response of the process.

그림 1에서 샘플링 주기 2T인 이산시간 3 차 모형은 $t/2T=1, 2, 3$ 일 때를 샘플하고 나머지를 지수함수로 근사시킴으로써 (1) 식과 같이 나타낼 수 있다.⁵⁾ 이때 (1) 식으로 실제의 공정을 오차가 작게 잘 나타내려면 $g_1 + g_2 + g_3 \approx 0.6$ 이 되도록 샘플링 주기를 잡는 것이 좋다.

$$\begin{bmatrix} w_1(k+1) \\ w_2(k+1) \\ w_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(k) \\ w_2(k) \\ w_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = w_1(k)$$

$$\text{단 } p = \frac{1 - (g_1 + g_2 + g_3)}{1 - (g_1 + g_2)} \quad (1)$$

(1) 식의 공정을 샘플링 주파수를 2 배로 하여 샘플링 주기가 T 일 때에도 공정의 차수를 올리지 않고 3 차의 근사모형으로 나타내고자 한다. (1) 식의 이산공정은 원점에 극이 있으므로 샘플링주파수를 배증했을 때의 모형을 직접적인 방법으로 변환하여 구할 수는 없다. 3 차 모형을 가정하고 3 차 모형의 전달함수에 $y(0) = 0$ 과 $y(\infty) = 1$ 인 조건을 적용하면, 전달함수의 분자 및 분모의 계수 중에서 미지의 계수가 5 개 남으므로 5 개의 추가 조건이 있어야 한다. 공정모형을 만드는 데 필요한 정보를 최소로 하고 계산을 간단히 하기 위하여 계단응답 곡선으로부터 3 개의 조건만 추가한다면 2 개의 조건은 임의로 잡을 수 있다. 그런데 전달함수의 극을 알면 계산이 쉬우므로 극 2 개를 임의로 정하여 극을 $z = a, 1/3, 1/3$ 로 잡고, 가관측 표준형을 약간 변형하면, 공정모형을 다

음 (2) 식과 같은 형태로 나타낼 수 있다. 공정의 극 중에서 $z=1/3$ 은 샘플링 주기 2T 일 때의 원점을 쌍선형 변환하면 얻는 값이며, $z=a$ 는 지배극으로 \sqrt{p} 부근이다. $1-a$ 와 2/3는 정규화를 위하여 사용한 값이다. 이 모형을 블록도로 그리면 그림 2 와 같다.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= P x(k) + q u(k) \\ y(k) &= c x(k) \end{aligned} \quad (2)$$

단

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} a & 1-a & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$q = \begin{bmatrix} (1-a) b_1 \\ \frac{2}{3} b_2 \\ \frac{2}{3} b_3 \end{bmatrix} \quad c = [1 \ 0 \ 0]$$

$$b_1 + b_2 + b_3 = 1$$

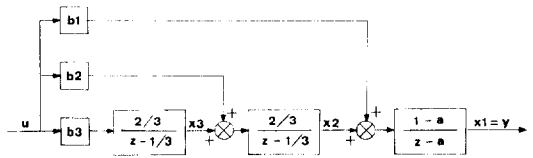


그림 2. 공정모형의 블록도
Fig. 2. Block diagram of the process model.

(2) 식의 이산공정은 극이 모두 0 과 1 사이에 있으므로 연속시간 모형으로도 표현되고, 연속시간 단위계단 응답을 구하면

$$y\left(\frac{t}{T}\right) = 1 - A a^{\frac{t}{T}} + (A - 1 + B t) \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{t}{T}} \quad (3)$$

의 형태가 될 것이다. 공정 모형을 정하기 위하여 (2) 식의 a 와 q를 구하는 대신 계단응답 곡선으로부터 (3) 식의 a, A, B를 구하기로 한다. a, A, B를 구하기 위하여 3 개의 조건이 필요한데, 실제 공정의 동특성과 근사 공정의 동특성이 비슷하도록 그림 1의 S1, S2, S3가 실제 공정과 근사 공정에서 되도록 서로 같게 a, A, B를 구하였다. (부록 참조) 이렇게 a, A, B를 구한 다음 (2) 식의 b_1, b_2, b_3 를 a, A, B로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{1}{1-a} \left\{ -A \left(a - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{3} B + \frac{2}{3} \right\} \\
 b_2 &= \frac{1}{1-a} \left\{ A \left(a - \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{2} B \left(a + \frac{1}{3} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \left(a - \frac{1}{3} \right) \right\} \\
 b_3 &= \frac{1}{1-a} \left\{ \frac{1}{2} B \left(a - \frac{1}{3} \right) \right\} \quad (4)
 \end{aligned}$$

상술한 방법으로 만든 근사 공정모형이 반드시 최소위상 공정이 되는 것은 아니지만, 제어 알고리즘 수립을 위한 근사모형으로는 충분하리라 생각된다. 이 방법의 특징은 3차의 공정모형이 갖는 3개의 극 중 2개를 임의로 잡아 계산을 간단히 한 것과 실제 공정의 단위계단 응답 곡선에서 단지 3점의 값만을 이용한 것이다. (그림 1에서 g_1, g_2, g_3 만 알면 됨).

3. 제어 알고리즘

3.1 가제어성

제어 알고리즘을 만들기 전에 먼저 공정의 가제어성을 살펴 필요가 있다. (2)식 공정의 가제어성 행렬의 rank를 검사하여 보면, (3)식의 a, A, B 의 값이 $a \neq 1/3, A \neq 0, B \neq 0$ 이면 rank가 3이라는 결과를 얻을 수 있다. $a=1/3$ 또는 $A=0$ 인 경우는 공정의 지배극이 $z=1/3$ 이라는 것을 의미하는데, $g_1+g_2+g_3 \approx 0.6$ 이 되도록 샘플링 주기를 잡았다면 이것은 공정이 순수한 지연(delay)에 가깝다는 것을 나타내므로 이와같은 공정의 제어 문제는 고려하지 않기로 하고, $B=0$ 인 경우는 공정의 불감시간 (dead time)이 짧아 A 가 1에 가까우면 생길 수 있는 문제이다. 그런데 이 때는 공정모형이 2차가 되어 (2)식이나 그림 2에서 x_2 가 없으므로 이 논문의 알고리즘을 2차 모형에 대한 것으로 간략화시켜 적용하면 된다.

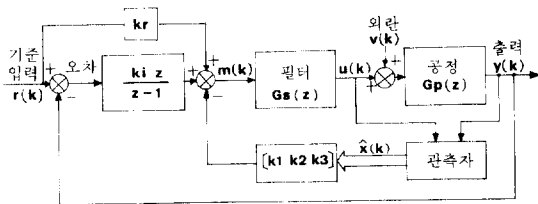


그림 3. 제어시스템의 구성

Fig. 3. Configuration of the control system.

3.2 제어시스템의 구성

제어시스템을 상태의 제환과 오차의 적분에 '앞먹임' (feed-forward)을 가미하여 그림 3과 같이 구성한다. 오차의 적분은 정상상태의 잔류편차를 없애기 위한 것이고, 앞먹임은 공정모형의 오차로 인한 불안정성을 줄이기 위한 것이며,¹⁰⁾ 제어기 출력의 진동을 줄이기 위하여 필터를 두었다.⁵⁾

공정의 전달함수 $G_p(z)$ 는 그림 2로부터

$$\begin{aligned}
 G_p(z) &= \frac{(1-a) B(z)}{(z-a)(z-1/3)^2} \quad (5) \\
 B(z) &= b_1 \left(z - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{2}{3} b_2 \left(z - \frac{1}{3} \right) \\
 &\quad + \frac{4}{9} b_3
 \end{aligned}$$

으로 구하여지며, 필터의 전달함수는

$$G_s(z) = \frac{\beta z + 1 - \beta}{z + \alpha} \quad (6)$$

로 한다. (6)식에서 $\beta=1$ 이면 필터를 사용하지 않는 것이고, (α 는 후기하는 식과 같이 β 의 값에 따라 다르게 조정되는 값인데 $\beta=1$ 이면 $\alpha=0$ 임) β 가 작을수록 u 의 진동이 작아진다.

3.3 제어기 이득

상태의 제환이 오차없이 되었다고 하면 상태제환과 필터 루우프만의 전달함수 $G_0(z)$ 는

$$G_0(z) = \frac{(z-a)(z-1/3)^2(\beta z + 1 - \beta)}{D(z)} \quad (7)$$

의 형태가 된다. $D(z)$ 는 4차항의 계수가 1인 4차식으로서 나머지 계수는 α, k_1, k_2, k_3 에 의하여 정하여진다. 제어시스템 전체의 폐루우프 전달함수 $G(z)$ 를 계산하면

$$\begin{aligned}
 G(z) &= \frac{k_1 z + k_2 (z-1)}{k_1 y} \times \frac{k_1 z G_0(z) G_p(z)}{z-1 + k_1 z G_0(z) G_p(z)} \\
 &= \frac{(1-a) \{ k_1 z + k_2 (z-1) \} (\beta z + 1 - \beta) B(z)}{(z-1) D(z) + (1-a) k_1 z (\beta z + 1 - \beta) B(z)} \quad (8)
 \end{aligned}$$

를 얻는다. (8)식의 분모는 5차항의 계수가 1인 5차식인데, $G(z)$ 의 영점 중 $k_1 z + k_2 (z-1)$ 의 영점을 극 1개와 같게 하고 나머지 영점은 그대로 두어, 제어목표를

$$G(z) = \frac{(\beta z + 1 - \beta) (1 - \lambda) B(z)}{z^2 (z - \lambda) B(1)} \quad (9)$$

가 되기 하는 것으로 잡는다. λ 는 응답속도를 조정하기 위한 것으로 공정모형에 오차가 전혀 없으면 $\lambda=0$ 으로 하여 유한시간 정정이 되게 할 수 있으나, 오차가 클 때는 λ 가 작을 수록 불안정해진다. 앞먹임 이득 k_i 을

$$k_i = \frac{\gamma}{1-\gamma} k_r \quad (10)$$

$$0 < \gamma < 1$$

라 놓으면, 영점을 없애기 위하여 (8) 식의 분모에 $z-\gamma$ 의 인자가 있어야 하므로

$$(z-1)D(z) + (1-a)k_r z(\beta z + 1 - \beta)B(z) = z^2(z-\lambda)(z-\gamma)$$

가 성립하도록 제어가 이득을 정하여야 한다. (11) 식이 성립할 때 외란에 대한 응답은

$$\frac{Y(z)}{V(z)} = \frac{(1-a)(z-1)(z+\alpha)B(z)}{z^2(z-\lambda)(z-\gamma)} \quad (12)$$

로 계산되는데, 이 전달함수는 $z=\gamma$ 의 극을 가지고 있기 때문에 γ 가 1에 가까우면 외란에 대한 응답이 나쁘리라는 것을 알 수 있다. β, γ, λ 가 주어졌을 때 (11)식의 양변의 계수를 모두 맞추어 제어기 이득을

$$k_i = \frac{9}{4} \frac{(1-\lambda)(1-\gamma)}{1-a} \quad (13)$$

$$a = \frac{1-\beta}{\beta} \left\{ 1 - \frac{(1-\beta)^2(\lambda\beta+1-\beta)(\gamma\beta+1-\beta)}{(a\beta+1-\beta)(1-2\beta/3)^2} \right\} \quad (14)$$

$$(1-a)k_i = a \left\{ k_i - \frac{a^2(a-\lambda)(a-\gamma)}{(1-a)(a\beta+1-\beta)B(a)} \right\} \quad (15)$$

$$(a-\frac{1}{3})k_2 = (1-a)k_i - \frac{1}{2}(1-a)k_i + \frac{(\lambda-1/3)(\gamma-1/3)}{8b_i(1-2\beta/3)} \quad (16)$$

$$b_i k_3 = \frac{5}{2\beta} - \frac{3}{2\beta}(\alpha + \lambda + \gamma - a) - \frac{3b_i}{2} \left\{ (1-a)k_i + \frac{9}{4}(1-\lambda)(1-\gamma) \right\} - b_i k_2 \quad (17)$$

로 얻고 k_r 은 (10) 식이므로 제어 알고리즘을 만들 수 있다. β, γ, λ 는 현장에서 응답을 보아 가며 조정할 수 있는데, β 는 제어기 출력의 진동을 조정하는 것으로 0.6부근, γ 는 공정모형 오차에 의한 불안정성을 줄이고 기준입력과 외란에 대한 응답을 절충하기 위한 것으로 0.6부근, λ 는 응답속

도와 안정도를 절충하는 것으로 0.3 부근으로 하면 비교적 좋은 결과를 얻는다.

3.4 상태관측자

제어 알고리즘의 수행시간이 샘플링 주기보다 훨씬 짧아 무시할 수 있을 정도로 가정하여, $t=kT$ 에서의 사전추정치 오차를 $t=kT$ 에서의 추정치에 가미하면 상태의 추정치 $\hat{x}(k)$ 는 사전추정치 $\hat{x}^{\circ}(k)$ 와 오차로써

$$\hat{x}(k) = \hat{x}^{\circ}(k) + l\{y(k) - c\hat{x}^{\circ}(k)\} \quad (18)$$

$$l: \text{관측자 이득} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix}$$

로 나타낼 수 있으며, 사전추정치 $\hat{x}^{\circ}(k)$ 는 (2) 식으로부터

$$\hat{x}^{\circ}(k+1) = P\hat{x}^{\circ}(k) + qu(k) \quad (19)$$

$$\hat{x}^{\circ}(0) = 0$$

로 삼을 수 있다. 위 두 식과 (2)식에서 오차 $x-\hat{x}$ 을 구하면

$$x(k) - \hat{x}(k) = (I - lc)P\{x(k-1) - \hat{x}(k-1)\} \quad (20)$$

를 얻는데, x_i 은 오차없이 추정할 수 있으므로 $l_i = 1$ 로 하여 $\hat{x}_1 = x_1 = y$ 로 하고 \hat{x}_2, \hat{x}_3 의 오차만을 구하면

$$\begin{bmatrix} x_2(k) - \hat{x}_2(k) \\ x_3(k) - \hat{x}_3(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(1-a)l_2 + 1/3 & 2/3 \\ -(1-a)l_3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(k-1) - \hat{x}_2(k-1) \\ x_3(k-1) - \hat{x}_3(k-1) \end{bmatrix} \quad (21)$$

이 된다. 추정치 오차가 유한시간 정정되도록

$$l_2 = \frac{2}{3(1-a)} \quad (22)$$

$$l_3 = \frac{1}{6(1-a)}$$

로 한다.

3.5 컴퓨터 알고리즘

이상을 컴퓨터 알고리즘으로 정리하면 다음과 같다. 먼저 A/D변환기에서 읽은 공정의 출력값으로부터 추정치의 증분을 계산한다.

$$\left. \begin{aligned} \Delta \hat{x}_1(k) &= y(k) - y(k-1) \\ \Delta \hat{x}_2(k) &= f_2(k) + l_2\{y(k) - \hat{x}_1^{\circ}(k)\} \\ \Delta \hat{x}_3(k) &= f_3(k) + l_3\{y(k) - \hat{x}_1^{\circ}(k)\} \end{aligned} \right\} k \geq 1 \quad (23)$$

$$\Delta \hat{x}_i(0) = \Delta \hat{x}_i^{\circ}(0) = \Delta \hat{x}_i^{\circ}(0) = 0 \quad k = 0$$

$f_2(k), f_3(k)$ 는 후기하는 식과 같이 추정치 증분의 사전 예측 값이다. 제어기 부분은 제어기 필터로 의 입력 증분을

$$\Delta m(k) = k_r \Delta r(k) + k_i \{r(k) - y(k)\} - k_1 \Delta \hat{x}_1(k) + k_2 \Delta \hat{x}_2(k) + k_3 \Delta \hat{x}_3(k) \quad (24)$$

로 계산하고, 필터 뒤의 제어기 출력을

$$u(k) = \begin{cases} \beta \Delta m(k) + m(k-1) - \alpha u(k-1) & k \geq 1 \\ \beta \Delta m(k) & k = 0 \end{cases} \quad (25)$$

로 계산하여 D/A 변환기로 출력함으로써 공정의 입력이 되게 한다. 공정이 $u(k)$ 에 의하여 변하는 동안 추정치와 필터입력을

$$\left. \begin{aligned} \hat{x}_2(k) &= \hat{x}_2(k-1) + \Delta \hat{x}_2(k) \\ \hat{x}_1(k) &= \hat{x}_1(k-1) + \Delta \hat{x}_1(k) \\ m(k) &= m(k-1) + \Delta m(k) \end{aligned} \right\} k \geq 1$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{x}_2(0) &= \hat{x}_2(0) = 0 \\ m(0) &= \Delta m(0) \end{aligned} \right\} k = 0 \quad (26)$$

로 교정한 다음, 다음 주기의 계산을 위하여

$$\hat{x}_1^o(k+1) = ay(k) + (1-a)\hat{x}_1(k) + b_1 u(k)$$

$$f_1(k+1) \triangleq \hat{x}_1^o(k+1) - \hat{x}_1(k)$$

$$= \frac{2}{3} \{-\hat{x}_1(k) + \hat{x}_1(k) + b_1 u(k)\}$$

$$f_2(k+1) \triangleq \hat{x}_2^o(k+1) - \hat{x}_2(k)$$

$$= \frac{2}{3} \{-\hat{x}_2(k) + b_2 u(k)\} \quad (27)$$

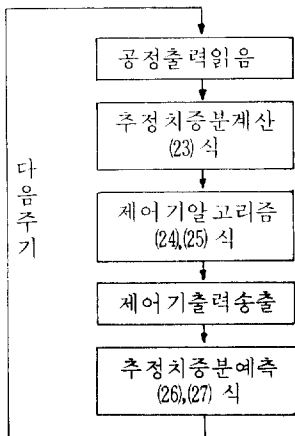


그림 4. 제어알고리즘의 순서도
Fig. 4. Flow chart of the control algorithm.

를 계산하면 된다. 그림 4는 이것을 순서도로 그린 것이다.

4. 시뮬레이션 결과

상술한 공정모형과 제어 알고리즘을 시험하기 위하여 연속시간 전달함수가 다음과 같은 3개의 공정을 대상으로 컴퓨터 시뮬레이션 하였다.

1 공정 $G_p(s) = \frac{e^{-0.3s}}{(1+1.2s)(1+1.5s)}$

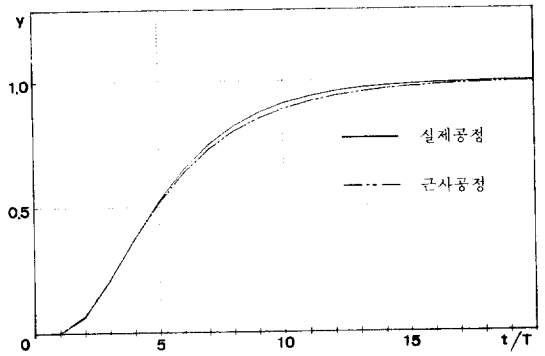
샘플링 주기 0.5

2 공정 $G_p(s) = \frac{1}{(1+0.5s)(1+s)^2(1+2s)}$

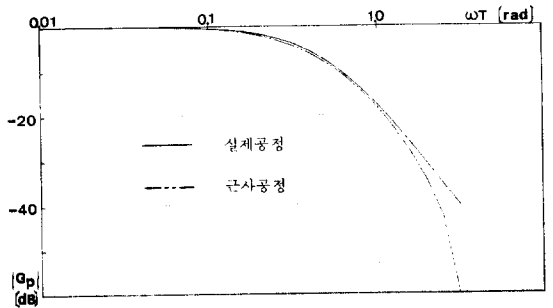
샘플링 주기 0.75

3 공정 $G_p(s) = \frac{(1+2s)e^{-4s}}{(1+3s)(1+7s)(1+10s)}$

샘플링 주기 4



(a) 단위 계단 응답



(b) 주파수 특성

그림 5. 공정모형의 비교
Fig. 5. Comparison of the process models.

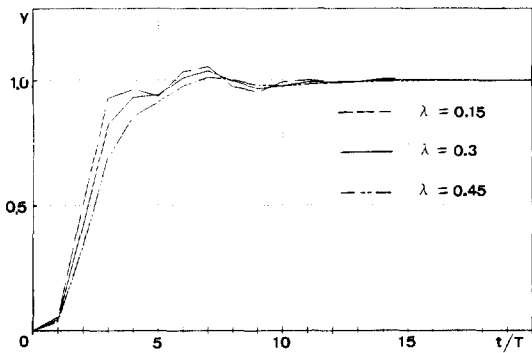
#1 공정은 Takahashi⁵⁾가 예로써 사용한 공정이며 #2, #3는 각각 Smith와 Isermann의 책^{2),3)}에서 예로 사용한 공정모형의 하나이다. 시뮬레이션 결과 3개의 공정 모두에 대하여 매우 유사한 특성을 얻을 수 있었기 때문에 3개 중 형태가 제일 복잡한 편인 #3 공정에 대한 결과만을 검토하고자 한다.

먼저 공정모형의 오차를 알아보기 위하여 (2)식의 근사공정과 실제공정의 단위계단응답 및 전달함수의 주파수 특성을 비교하였다. 그림 5가 이 결과로서 단위계단응답이 $t/T = 6$ 일 때까지는 별 오차가 없는 것을 볼 수 있다. $t/T > 6$ 일 때 오차가 커진 것은 공정을 근사시킬 때 이 부분의 정보를 사용하지 않았기 때문이다. 전달함수의 주파수특성도 $\omega T < 1$ rad인 저주파 영역에서 잘 맞는

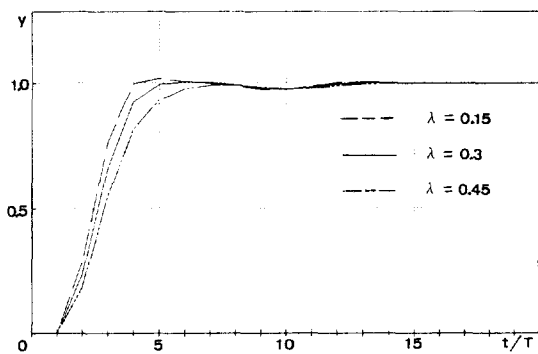
것을 볼 수 있다. 고주파 영역에서의 오차는 모형의 차수가 제한된 것과 극을 임의로 정한 데서 오는 것이다.

제어 알고리즘을 적용하였을 때 단위계단 기준 입력에 대한 응답은 그림 6과 같다. 제어기의 조정은 $\beta = \gamma = 0.6$ 으로 고정하고 λ 를 변화 시키면서 하여 보았다. λ 를 작게 잡을 수록 점점 오버슈우트(over shoot)가 커지고 불안정해 지는 것을 볼 수 있는데, 공정모형의 오차가 작게 된 경우에는 λ 를 작게 잡아도 안정한 상태가 유지되므로 오차가 큰 경우보다 응답을 빠르게 조정할 수 있다. 제어기 출력은 $\beta = 0.6$ 일 때 진동(ringing)이 별로 없었다.

외란에 대한 응답의 변화를 $\lambda = 0.3, \beta = 0.6$ 으로 고정하고 γ 를 변화시키면서 살펴본 것이 그림 7이다. (12)식을 보아 알 수 있듯이 γ 를 작게할 수록 외란의 영향이 빨리 없어진다. 그러나 γ 를 너무 줄이면 앞먹임(feed-forward)의 효과가 없어져서, 공정모형의 오차가 큰 경우 쉽게 불안정해지기 때문에 λ 를 작게할 수 없고 따라서 기준 입력에 대한 응답이 느려진다.



(a) #1 공정



(b) #3 공정

그림 6. 폐 루우프 시스템의 단위계단 응답
Fig. 6. Unit step response of the closed-loop system.

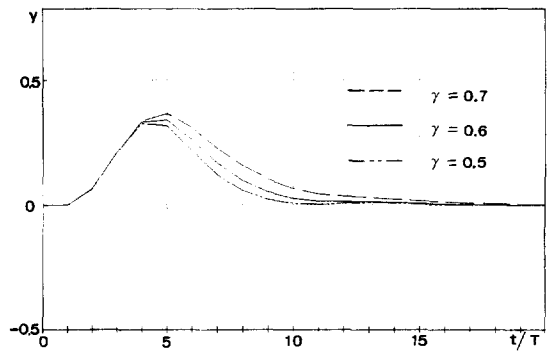


그림 7. 단위계단 외란에 대한 응답
Fig. 7. Response for unit step disturbance.

마지막으로 Takahashi의 유한시간정정 제어 (FTSC) 알고리즘과 이 논문의 알고리즘을 비교하였다. 상태관측자를 사용한 Takahashi의 알고리즘은 응답시간에 대한 샘플링시간의 비율이 큰 경우 이산형 PID 알고리즘보다 응답특성이 좋으며 공정모형의 오차도 큰 문제가 없기 때문에¹⁾ 비교 대상으로 Takahashi의 알고리즘을 택하였다. 비교한 결과는 그림 8과 같아서 이 논문의 알고

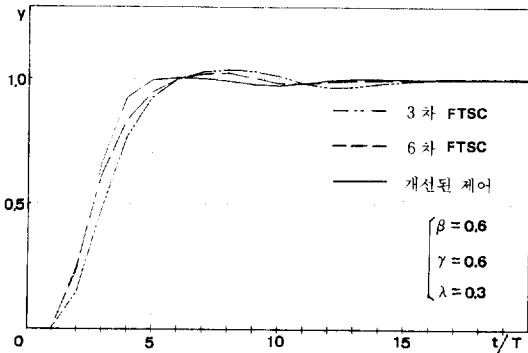


그림 8. 제어기의 성능비교
Fig. 8. Comparison between controller performances.

리즘이 샘플링 주기 2T의 3차 모형 유한시간 정정 제어보다 우수한 것을 보여주고 있으며, 샘플링 주기 T의 6차 모형을 사용한 유한시간 정정 제어보다도 좋은 것을 알 수 있다.

5. 결 론

단위계단 응답이 S자 모양을 갖는 단일 입출력, 시불변, 최소위상 공정에 대하여 샘플링 주파수를 배증하면서도 차수가 3으로 유지된 이산시간 모형을 비교적 간단한 계산으로 만드는 방법을 제시하였고, 이 모형의 제어를 위한 DDC 알고리즘을 수립하였다.

이 DDC 알고리즘은 불감시간이 길지 않은 대부분 공정의 제어에 응용할 수 있을 것으로 보이며, 현장에서의 적절한 조정이 가능한 장점을 가지고 있다. 시뮬레이션 결과 공정모형에 오차가 별로 없었으며 제어성능도 Takahashi의 유한시간 정정제어보다 개선된 것을 보여 주었는데, 샘플링 주기를 더 줄이지 않고서는 더 이상의 개선은 어려울 것 같다.

앞으로 샘플링 주기를 더 짧게 하였을 때 유사한 방법의 적용 가능성과 불감시간이 긴 공정에서의 문제에 대하여 연구가 필요하다고 생각된다.

감사의 글

이 연구는 아주대학교 1983년도 교내연구비 지원에 의하여 수행된 바 이에 감사를 드립니다.

부 록

단위계단 응답 곡선의 근사 방법

그림 1에서 실제공정의 경우 S1, S2, S3를 구하기 위하여 응답 곡선을 1차 도함수가 t/T=4에서 연속인 다음 식으로 가정한다.

$$y(x) = \begin{cases} x^N (c_0 x^2 + c_1 x + c_2) & 0 \leq x \leq 2 \\ 1 - \frac{g_1}{1-p} p^{x-2} & x \geq 2 \end{cases} \quad (A1)$$

$$x = \frac{t}{2T}, \quad N \text{은 } c_2 > 0 \text{ 이 되게 하는 최}$$

소의 자연수

$c_2 > 0$ 인 것은 최소위상 공정의 조건이고 N을 되도록 작게 잡아 곡선의 차수를 낮게 하였다. 대개의 경우 해당될 것으로 보이는 $N=2,3$ 일 때를 풀면

$$C_0 = \begin{cases} \frac{1}{2} g_1 - \frac{1}{2} g_2 + \frac{1}{4} \frac{g_3}{1-p} \ln \frac{1}{p} & N=2 \\ \frac{11}{16} g_1 - \frac{5}{16} g_2 + \frac{1}{8} \frac{g_3}{1-p} \ln \frac{1}{p} & N=3 \end{cases}$$

$$C_1 = \begin{cases} -\frac{9}{4} g_1 + \frac{7}{4} g_2 - \frac{3}{4} \frac{g_3}{1-p} \ln \frac{1}{p} & N=2 \\ -\frac{47}{16} g_1 + \frac{17}{16} g_2 - \frac{3}{8} \frac{g_3}{1-p} \ln \frac{1}{p} & N=3 \end{cases}$$

$$C_2 = \begin{cases} \frac{11}{4} g_1 - \frac{5}{4} g_2 + \frac{1}{2} \frac{g_3}{1-p} \ln \frac{1}{p} & N=2 \\ \frac{13}{4} g_1 - \frac{3}{4} g_2 + \frac{1}{4} \frac{g_3}{1-p} \ln \frac{1}{p} & N=3 \end{cases} \quad (A2)$$

을 얻는다. (A1) 식과 (A2) 식으로부터 실제공정의 S_1, S_2, S_3 는 다음과 같이 구하여 진다.

$$S_1 = 2 \int_0^1 (1-y) dx = \begin{cases} 2 - \frac{1}{120} (109g_1 - 19g_2 + 7 \frac{g_3}{1-p} \ln \frac{1}{p}) & N=2 \\ 2 - \frac{1}{240} (163g_1 - 13g_2 + 4 \frac{g_3}{1-p} \ln \frac{1}{p}) & N=3 \end{cases}$$

$$S_2 = 2 \int_1^2 (1-y) dx = \begin{cases} 2 - \frac{1}{120} (259g_1 + 131g_2 - 23 \frac{g_3}{1-p} \ln \frac{1}{p}) \\ + 2g_1 / \ln \frac{1}{p} & N=2 \\ 2 - \frac{1}{80} (191g_1 + 79g_2 - 12 \frac{g_3}{1-p} \ln \frac{1}{p}) \\ + 2g_1 / \ln \frac{1}{p} & N=3 \end{cases} \quad (14)$$

$$S_1 = 2 \int_0^1 (1-y) dx$$

$$= \frac{2 p g_1}{1-p} / \ln \frac{1}{p} \quad (A3)$$

한편 근사공정의 단위계단 응답은 (3) 식으로 표현되므로 (3) 식을 이용하여 근사공정의 S_1, S_2, S_3 를 구하면

$$S_1 = f_{11}(a)A - f_{12}B + \frac{8}{9 \ln 3}$$

$$S_2 = f_{21}(a)A - f_{22}B + \frac{80}{729 \ln 3}$$

$$S_3 = f_{31}(a)A - f_{32}B + \frac{1}{729 \ln 3} \quad (A4)$$

단 $f_{11}(a) = -\frac{8}{9 \ln 3} + (1-a^3) / \ln \frac{1}{a}$

$$f_{12}(a) = -\frac{80}{729 \ln 3} a^2(1-a^4) / \ln \frac{1}{a}$$

$$f_{21}(a) = -\frac{1}{729 \ln 3} + a^6 / \ln \frac{1}{a}$$

$$f_{22} = \frac{2}{9 \ln 3} \left(\frac{4}{\ln 3} - 1 \right)$$

$$f_{31} = \frac{4}{729 \ln 3} \left(\frac{20}{\ln 3} + 39 \right)$$

$$f_{32} = \frac{1}{729 \ln 3} \left(\frac{1}{\ln 3} + 6 \right)$$

이 얻어 진다. (A3) 식과 (A4) 식이 같다고 놓음으로써 (3) 식의 a, A, B를 구하는 방정식은 다음 식이 된다.

$$f_{11}(a)A - f_{12}B = d_1$$

$$f_{21}(a)A - f_{22}B = d_2$$

$$f_{31}(a)A - f_{32}B = d_3 \quad (A5)$$

단 $d_1 = S_1 - \frac{8}{9 \ln 3}$

$$d_2 = S_2 - \frac{80}{729 \ln 3}$$

$$d_3 = S_3 - \frac{1}{729 \ln 3}$$

S_1, S_2, S_3 는 (A3) 식의 값

(A5) 식에서 a를 구하는 방정식을 만들면

$$F(a) = \begin{vmatrix} f_{11}(a) & -f_{12} & d_1 \\ f_{21}(a) & -f_{22} & d_2 \\ f_{31}(a) & -f_{32} & d_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (A6)$$

이 된다. (A6) 식은 해석적으로는 풀리지 않으므로 $a = \sqrt{p}$ 부근에서 Newton 근사법을 1회만 적용하여

$$a = \begin{cases} \sqrt{p} & F'(\sqrt{p}) = 0 \\ \sqrt{p} - \frac{F(\sqrt{p})}{F'(\sqrt{p})} & F'(\sqrt{p}) \neq 0 \end{cases} \quad (A7)$$

$$\text{단 } F'(\sqrt{p}) = \begin{vmatrix} f_{11}'(\sqrt{p}) & -f_{12} & d_1 \\ f_{21}'(\sqrt{p}) & -f_{22} & d_2 \\ f_{31}'(\sqrt{p}) & -f_{32} & d_3 \end{vmatrix}$$

로 정한다. 근사공정이 지닌 다른 오차들을 감안할 때 (A6) 식을 정확히 푸는 것은 의미가 없다. (A7) 식의 $f_{11}'(\sqrt{p}), f_{21}'(\sqrt{p}), f_{31}'(\sqrt{p})$ 는 (A4) 식으로부터

$$f_{11}'(\sqrt{p}) = \frac{4}{\sqrt{p} (\ln p)^2} \{1 - p(1 - \ln p)\}$$

$$f_{21}'(\sqrt{p}) = \frac{4}{\sqrt{p} (\ln p)^2} \{p(1 - \ln p) - p^3(1 - 3 \ln p)\}$$

$$f_{31}'(\sqrt{p}) = \frac{4 p^3}{\sqrt{p} (\ln p)^2} (1 - 3 \ln p) \quad (A8)$$

로 계산된다. (A7) 식으로 정한 a를 (A5) 식 중 위의 두 식에 대입하여 A, B를 구하면

$$A = \frac{f_{22} d_1 - f_{12} d_2}{f_{22} f_{11}(a) - f_{12} f_{21}(a)}$$

$$B = \frac{f_{21}(a) d_1 - f_{11}(a) d_2}{f_{22} f_{11}(a) - f_{12} f_{21}(a)} \quad (A9)$$

를 얻는다. $0.5 < a < 1$ 의 범위에서 (A9) 식의 분모는 0보다 크다. 결국 (A5) 식의 해를 근사적으로 (A7) 식과 (A9) 식으로 얻었다.

參考文獻

- 1) 허옥렬, "공정제어를 위한 DDC 알고리즘", 전기학회지, 33(4), 11-15, 1984.
- 2) Smith, C.L., Digital Computer Process Control, Intext Educational Publishers, 1972.
- 3) Isermann, R., Digital Control Systems, Springer-Verlag, 1981.
- 4) Dahlin, E.B., "Designing and tuning digital controllers," Instruments and Control Systems, 41(6), 77-83, 1968.
- 5) Auslander, D.M., Takahashi, Y., Tomijuka, M.,

"Direct digital process control: Practice and algorithms for microprocessor application," Proc. of IEEE, 66(2) 199-208, 1978.

6) Chen, C.F., Shieh, L.S., "A novel approach to linear model simplification," Int. J. Control, 8 (6), 561-570, 1968.

7) Insermann, R., "Results on the simplification of dynamic process models," Int. J. Control, 19(1), 149-159, 1973.

8) Hwang, C., "Transformation of state space model to Cauer I and II CFE canonical forms" Int. J. Systems Sci., 15(7), 797-804, 1984.

9) Wilson, R.G., Fisher, D.G., Seborg, D.E., "Model reduction for discrete-time dynamic systems" Int. J. Control, 16(3), 549-558, 1972.

10) Aström, K.J., Wittenmark, B., Computer Controlled Systems, Prentice-Hall, 1984.

11) Takahashi, Y., Tomijuka, M., Auslander, D.M., "Simple discrete control of industrial processes (finite-time settling control algorithm for single-loop digital controller)," Trans. ASME, Series G, J. Dyn. Sys., Meas. and Contr., 97(4), 354-361, 1975