

<論 文>

# 구속이 없는 축대칭 피어싱 공정의 유한요소해석

양 동 열\* · 유 요 한\*\* · 이 종 수\*\*

(1986년 7월 23일 접수)

## Finite Element Analysis of Unconstrained Axisymmetric Piercing

Dong-Yol Yang, Yo-Han Yoo and Jong-Soo Lee

**Key Words:** Unconstrained Axisymmetric Piercing(구속이 없는 축대칭 피어싱), Rigid-plastic Finite Element Method(강소성 유한요소법), Initial Velocity Field(초기속도장), Strain-Hardening Effect(가공경화효과), Fracture Criterion(파단판별방법)

### Abstract

The Study is concerned with the analysis of unconstrained axisymmetric piercing as a nonsteady forging process by the rigid-plastic finite element method. In the numerical analysis of axisymmetric piercing, the initial velocity field is generated by assuming the material as a linear viscous material to begin with in order to facilitate the input handling and to ensure better convergency. The strain-hardening effect for nonsteady deformation and the friction of the die-material interial interface are considered in the formulation. Rigid body treatment is also incorporated in the developed program. The experiments are carried out for aluminum alloy specimens (A12024) with different specimen heights. It is shown that the experimental results are in excellent agreement with the finite element simulations is deformed configuration. For load prediction the theoretical prediction shows excellent agreement with the experimental load in the initial stage of loading before fracture of the specimen is not initiated.

Distribution of stresses, strains and strain rates has been found for the given cases in computation. On this basis several fracture criteria are introduced in order to check the fracture initiation. It is found that maximum shear criterion is capable of good fracture prediction.

### 기 호 설 명

- $B$  : 속도벡터와 변형도율 벡터를 연결하는 행렬
- $C$  : 체적 변형도율과 변형도율 벡터를 연결하는 벡터

- $D_0$  : 피어싱 시편의 최초 지름
- $d_p$  : 펀치의 지름
- $e$  : 강체부분의 연속적 처리법에 쓰이는 상수
- $e_i$  : 초기속도장 발생 방법의 수렴 판정에 쓰이는 상수
- $e_u$  : 주 프로그램(main program)의 수렴 판정에 쓰

\* 정회원, 한국과학기술원생산공학과  
\*\* 정회원, 대전기계창

- 이 는 상수
- $f$  : 외부 접촉력 (traction)
- $f'$  : 금형과 소재간의 마찰응력
- $H_0$  : 피어싱 시편의 최초 높이
- $H'$  : 가공 경화율 (work-hardening rate)
- $k$  : 전단 항복 응력 (Shear yield stress)
- $m$  : 마찰 상수 (friction factor)
- $N$  : 형상 함수 (shape function)
- $U$  : 절점에서의 속도 벡터
- $u$  : 속도장
- $u^*$  : 임의의 가용속도장
- $v_r$  : 소재와 금형간의 상대속도
- $Y_0$  : 항복 응력 (yield stress)
- $\alpha$  : 비정상 상태의 가공경화 효과를 고려한 수식화에 쓰이는 상수
- $\beta$  : 감속 계수 (deceleration coefficient)
- $\Delta t$  : 비정상 상태의 단계당 시간간격 (unsteady state time step length)
- $\bar{\epsilon}$  : 유효 변형도 (effective strain)
- $\dot{\bar{\epsilon}}$  : 유효 변형도율 (effective strain rate)
- $\dot{\epsilon}_v$  : 체적 변형도율 (volumetric strain rate)
- $\dot{\epsilon}_{ij}$  : 변형도율 텐서 (strain rate tensor)
- $\lambda$  : 라그랑주 승수 (Lagrange multiplier)
- $\mu$  : 점도 (viscosity)
- $\mu'$  : 쿨롱 마찰 계수 (Coulomb friction coefficient)
- $\bar{\sigma}$  : 유효 응력 (effective stress)
- $\sigma_{ij}$  : 응력 텐서 (stress tensor)
- $\sigma'_{ij}$  : 편차 응력 텐서 (deviatoric stress tensor)

### 1. 서 론

피어싱 공정은 여러가지 금속 성형공정의 예비 성형 (preforming)에 널리 이용되고 있으며, 한 공정안에 압축 상태 (compression mode)와 인장 상태 (tensile mode)가 공존하는 시편의 상당히 많은 부분이 강체 (rigid body)로 존재하는 보기드문 특이한 역학적 의미를 지닌 공정이다.

피어싱 공정은 가장 기본적인 금속 성형 공정이므로 오래전부터 여러가지 방법으로 연구되어 왔다. 즉 상계해법 (Upper bound method), 하계해법 (Lower bound method), 미끄럼 선장 방법 (Ship-line field method), 슬랩방법 (Slab method), 균일 변형 에너지 방법 (Uniform deformation energy method) 등에 의하여 피어싱 해석이 시도되어 왔다. 이와같은 방법에 의한 해석 결과에

서는 소성변형의 비선형적 (nonlinear)이고, 변형 경로에 의존하는 복잡함 때문에 근사적 해밖에 주지 못한다. 또한 문제를 단순화 또는 이상화 시켜서 제한된 정보 밖에 얻을 수 없는 단점들을 가지며 해석할 수 있는 문제의 범위가 제한되는 경우가 많으므로 보다 정확하고 유용한 정보를 구할 수 있는 수치적 방법들이 최근에 많이 연구되고 있다. 이들 중 대표적인 방법이 유한 차분법 (finite difference method)과 유한요소법 (finite element method)<sup>(1-5)</sup>인데 특히 유한요소법은 종래 방법들에 비해 적용의 용통성, 다양하고 자세한 정보제공 능력등의 면에서 우수하다는 것이 입증되었다.

유한 요소법을 금속성형 공정해석에 적용했을 때 얻어지는 장점은 응력 (stress) 및 변형도 (strain)의 정확한 계산결과를 얻을 수 있고, 소재 및 금형의 복잡한 기하학적 모양 및 경계조건, 물성 (material property) 등을 효과적으로 고려할 수 있으며, 비정상 상태 (non-steady state) 및 3차원 변형을 해석할 수 있다는 것이다. 유한 요소법을 이용한 금속성형 방법에는 탄소성 해석 (elastic-plastic analysis), 강소성 해석 (rigid-plastic analysis), 유효 변형도율을 고려하여 열간 가공 해석에 이용할 수 있는 점소성 해석<sup>(6)</sup> (viscoplastic analysis) 등이 있는데 탄소성 해법은 보다 믿음직한 응력과 변형도 분포를 얻을 수 있지만 매 변형 단계마다 요소가 항복 상태에 도달하였는지 검사해야 하며 비정상 상태 문제 해석시 변형증분량을 한꺼번에 많이 늘릴 수 없는 단점이 있다. 그러나 단조 (forging)나 압출 (extrusion) 같은 소성문제에서는 탄성 변형량이 소성 변형량에 비하여 무시할 만큼 작기 때문에 강소성으로 다루는 것이 계산 시간에 있어서 경제적이다. 이러한 필요에 의하여 C.H. Lee는 강소성 유한 요소법의 수식화를 제안하였다<sup>(7)</sup>.

강소성 해법은 비정상 상태 문제 해석에서 변형 증분량을 크게 잡을수 있어 계산시간이 짧아진다. 이 방법에 있어서 최적 속도장 (optimum velocity field)을 찾기 위해서는 반복계산 (iterative calculation)이 필요 한데 초기에 가정한 속도장이 해에 충분히 가깝지 않을 경우 해의 수렴성이 보장되지 않는다. 보통 초기 속도장으로 상계해 (upper bound solution)를 이용해 왔으나 복잡한 문제의 초기 속도장을 얻을 수 없기 때문에 프로그램의 범용성을 향상시키기 위해서는 일반성 있는 초기속도장 발생법의 개발이 필요하다<sup>(8)</sup>.

유한 요소법의 금속성형 문제에 대한 적용을 살펴보면, 우선 탄소성 해법의 경우 1968년 Yamada 등이,

Marcal과 King의 결과<sup>(9)</sup>를 발전시켜 금속 성형 문제에 적용할 수 있는 소성응력 변형도 행렬(plastic stress-strain matrix)을 제안하였으며 Iwata 등이 이 행렬을 이용하여 1972년 정수압 압출을 해석하였고<sup>(10)</sup> C. H. Lee가 1970년 대 초 평저편치 압입(flat punch indentation)<sup>(11)</sup>, 업셋팅(upsetting) 및 측면압축(side pressing)<sup>(12)</sup>, 구압입(ball indentation)<sup>(13)</sup>, 잔류응력(residual stress) 문제<sup>(14)</sup> 등의 광범위한 금속 성형문제 해석에 이 방법을 이용하였다. 비압축성 조건을 고려하는데 C. H. Lee가 라그랑주 승수(Lagrange multiplier)를 도입한 수식화를 한데 비해, 1975년 O. C. Zienkiewicz는 벌칙함수(penalty function)를 도입하여 수식화를 하였으며<sup>(15)</sup>, 그 후 S. N. Shah<sup>(16)</sup>와 C. C. Chen<sup>(17)</sup> 등이 볼트 헤딩(bolt heading), 후방 압출(backward extrusion), 링압축(ring compression), 2차 인발 및 압출(2nd-pass drawing and extrusion), 평면 변형도형 단조(plane strain closed die forging) 등을 해석하였고, S. I. Oh에 의하여 초기 속도장 발생방법(initial guess generation)<sup>(8)</sup>, 격자재구성(remeshing)<sup>(18)</sup>, 임의의 금형곡선의 고려방법(shaped die treatment)<sup>(8)</sup> 등이 연구 되어 왔다.

본 논문에서는 자유 표면과 강체부분이 많은 피어싱 공정의 해석에서 발생하는 해의 수렴성 저하를 방지하기 위하여 비정상 상태의 가공경화 효과와 강체 연속 처리방법을 프로그램 개발에 적용하고 프로그램 범용성을 높이기 위해 초기 속도장 발생 프로그램을 개발하여 본 공정 해석에 적용하여 보려고 한다. 또한 재료를 가공 경화를 고려한 강소성체(rigid-plastic material)로 가정해서 시편에 크랙이 발생하여 파괴될때까지 컴퓨터 시뮬레이션을 수행한 후 냉간 피어싱 공정에 있어서 표면 크랙의 발생과 성장 그리고 파괴에 가장 많은 영향을 미치는 인자들을 계산결과를 토대로 실험과 비교조사하고, 실험 시편의 지름과 높이 그리고 마찰상태를 다르게 조합해서, 실험과 계산을 실시하여 시편 모양에 따른 변형 모드(mode)와 파괴 모우드의 차이를 규명해 보기로 한다.

## 2. 유한요소법

### 2.1 수식화 과정

비압축성 조건과 속도 경계조건을 만족하는 임의의 가용속도장(admissible velocity field)  $u^*$ 을 가정할 때 이로부터 구해진 응력분포가 실제 응력분포와 같게 되

는 해(solution)는 주어진 문제에 대해 다음의 범함수(functional)  $T$ 를 최소화 시킴으로써 구해진다.

$$T = \int_V \bar{\sigma}^* \dot{\epsilon}^* dv - \int_{S_F} f \cdot u^* ds \quad (1)$$

속도 경계조건은 만족하지만 비압축성 조건은 만족하지 않을 수 있는 속도장을  $u$ 라 하고, 라그랑주 승수  $\lambda$ 를 도입하면 식 (1)은

$$T = \int_V \bar{\sigma} \dot{\epsilon} dv + \int_V \lambda \dot{\epsilon}_v dv - \int_{S_F} f \cdot u ds \quad (2)$$

과 같이 된다.

식 (2)의  $\lambda$ 는 물리적으로 평균응력(mean stress)의 의미를 가지고 있다. 또한 식 (2)의 첫째항은 변형 에너지율(distortion energy rate), 둘째항은 체적변화 에너지율(dilation energy rate), 셋째항은 입력에너지율(input energy rate)에 해당하는 물리적 의미를 가지고 있다.

본 논문에서는 프로그램 구성에 있어 라그랑주 방법을 사용하였다.

### 2.2 금형과 소재간의 마찰처리 및 강체부분(Rigid-Body) 처리

클롬 마찰은 정확한 물리적 의미를 갖지만 클롬 마찰계수  $\mu$  (Coulomb coefficient of friction =  $\frac{f'}{p}$ )의 측정정이 어렵기 때문에 마찰응력이 압력과는 관계없이 전단 항복응력(yield shear stress)  $k (= \bar{\sigma} / \sqrt{3})$ 에 비해한다는 가정하에 마찰상수(friction factor)  $m$ 을 써서 일정한 마찰응력  $f' = mk$ 를 이용하는 것이 편리하다.<sup>(17)</sup> 본 연구에서도 마찰상수  $m$ 을 이용하였다.

체어 체적(control volume) 중에 소성변형 부분보다 유효 변형도율이 아주 작은 강체구역(rigid zone)이나 강성하중 풀림(rigid unloading) 부분이 존재하게 되면 수렴하는데 많은 시간이 필요로 하는 등 수렴성이 나빠지며 계산된 응력치에서 흩어짐(scattering) 현상이 발생하므로, 실제계산에서는 강체부분을 제거하지 않으면 해를 얻을 수 없다.

강체를 처리하는 방법에는 분할식 처리법(discrete treatment) 연속적 처리법(continuous treatment)이 있는데 본 연구에서는 Mori 등이 사용한 연속적처리법<sup>(19)</sup>을 이용하였다. 이 방법은  $\dot{\epsilon}$  대신  $(\dot{\epsilon}^2 + \dot{e}^2)^{1/2}$ 을 사용하여 강체부분의 요소를 제거하지 않고, 유효변형도율  $\dot{\epsilon}$ 에  $e$ 에 비해 작아질 경우 즉 강체 부분에 속할 경우에는  $e$ 로부터 힘의 평형을 만족하는 근사응력(approximate stress)을 구하고, 유효변형도율  $\dot{\epsilon}$ 가 주어진 값  $e$ (보통  $10^{-3}$  정도)보다 아주 클 경우 즉, 소성영역에

속할때는  $\epsilon$ 의 효과가 무시될수 있도록 한다.

### 2.3 초기 속도장 발생 방법(Initial Guess Generation) 및 가공경화의 고려

강소성 해법에서, 해석에 들어가기 위해서는 초기 속도장이 주어져야 하는데 이것을 대강 넣어 주거나, 상제해를 이용하는 등 각 경우별(case by case)로 처리하면 일반성을 결여하게 되므로, 풀고자 하는 문제의 기하학적 모양에 관계없이 자동적으로 초기 속도장을 발생시키는 방법을 찾아내는 것이 바람직하다. 이것은 S.I. Oh 등이 제안한 방법이 효과적이다<sup>(6)</sup>. 즉 소재를 질점(material point)의 함수인 점도(viscosity)를 가진 선형 점성물질(linear viscous material)로 가정하는 것이다. 이때 응력-변형도율 관계식이

$$\sigma_{ij}' = 2\mu \dot{\epsilon}_{ij} \quad (3)$$

과 같게 된다.

$$\sigma_{ij}' = \frac{2\bar{\sigma}}{3} \dot{\epsilon}_{ij} \quad (4)$$

식 (3)을 식 (4)와 비교해 보면, 식 (4)는 비선형적 형태이고 식 (3)은 선형적 형태를 가지고 있다는 것을 알 수 있다. 즉, 같은 문제를 해석하는데 있어서 접근 방법이 다르다는 것이다. 식 (4)로 해석하는 경우, 해의 수렴 특성이 초기 속도장에 매우 민감하므로 실제해에 가까운 초기 속도장을 주면 빠르게 수렴하지만, 실제해에 먼 초기 속도장을 주면 매우 늦게 수렴하거나 수렴하지 않는다. 즉, 입력(input)인 초기 속도장의 선택이 어렵다는 것이다. 이에 반하여 식 (3)으로 해석하는 경우, 해의 수렴특성이 입력인 초기 점도 분포에 매우 둔감하여 초기점도 분포를 균일하게 주어도 초기에는 매우 빠르게 수렴한다. 즉, 입력인 초기점도 분포의 선택을 쉽게할 수 있다. 이것은 식 (4)의 비선형 수렴특성과 식 (3)의 선형 수렴특성 때문으로 판단된다.

수렴 판정 기준은 식 (4)의 경우, 해벡터 놈(solution vector norm)에 대한 오차 벡터 놈(error vector norm) 즉,  $\|\Delta U\|/\|U\|$ 가 매우 작아지는 것이지만 식 (3)의 경우 점도  $\mu$ 가 어떤 상수로 수렴하는 것이다. 즉,  $|\mu_n - \mu_{n-1}| \leq \epsilon_1$ 를 만족하는 것이다. 여기서  $\epsilon_1$ 는  $\mu$  값에 비해 매우 작은 값이다.

정상 문제의 경우, 해석에 들어가기 전에 이 방법으로 초기속도장을 발생시켜 입력 파일(input file)을 만들 수 있으며 비정상 문제의 경우, 첫번째 단계(first step)에서는 이방법으로 초기 속도장을 발생시키고 후속 단계(subsequent step)에서는, 전단계(previous step)

의 해를 다음 단계 해석을 위한 초기 속도장으로 사용한다.

Fig. 1에 플로우 차아트(flow chart)를 보였다.

자유표면과 강제 부분이 많은 문제의 해석을 더욱 효과적으로 수행하기 위하여 Kim과 Yang<sup>(20)</sup>의 가공경화를 고려한 변분 공식을 비정상 상태인 피어싱 문제 해석에 적용시켜 보았다. 만약 가공경화율(work-hardening rate)  $H'$ 가  $\bar{\sigma}$ 에 비해 매우 작다면 비정상 소변형 문제(unsteady small displacement problem)에 정상 상태의 수식들을 적용할 수 있지만 그렇지 않은 경우에는 해의 수렴특성이 나빠지므로 이 방법을 적용하는 것이 좋다. 이때 속도장은 흐름 응력  $\bar{\sigma}$  분포 뿐만 아니라 시간간격(time step length)  $\Delta t$  및 가공경화율  $H'$ 에 의하여 결정된다.

### 2.4 행렬 방정식과 해의 수렴

부록에 행렬 방정식의 유도를 수록하였다. 부록의 식 (A. 10)에서  $\Delta U_\beta$ 는 보통 가우스 소거법(Gaussian Elimination)을 이용해서 구하며  $n$ 번째 반복 계산에서의 수정된 속도장(modified velocity field)  $U_{(n)}$ 은

$$U_{(n)} = U_{(n-1)} + \beta \cdot \Delta U_{(n)} \quad (5)$$

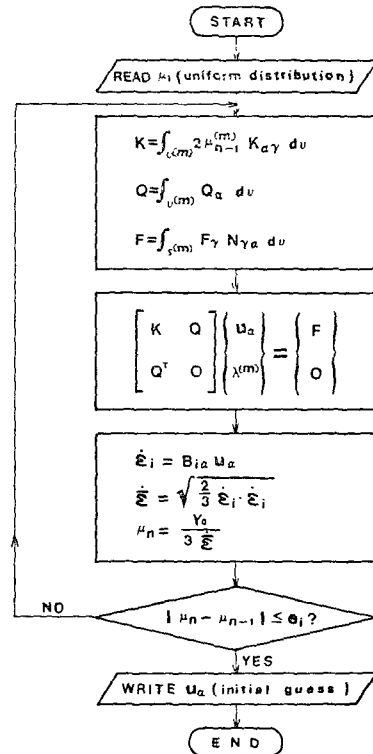


Fig. 1 Flow chart(initial guess)

에 의하여 구해진다. 여기서  $\beta$ 는 해의 발산을 막기 위한 감속계수(deceleration coefficient)로 0과 1사이의 값을 가지는데 만약  $\beta$ 의 값을 크게 하면 수렴 속도는 빨라지지만 발산할 가능성이 있고,  $\beta$ 의 값을 작게 하던 수렴의 안정성은 있으나 수렴속도가 늦어져서 계산 시간이 많이 걸리므로 프로그래머가 가장 적절한 값을 선택해 주어야 한다.

각 반복 작업마다 해가 수렴하는 방향으로 가는지 점검하는 기준으로 다음의 두가지 판별법을 사용한다.

$$\text{첫째, } \frac{\|\Delta U\|}{\|U\|} \Big|_{(n)} < \frac{\|\Delta U\|}{\|U\|} \Big|_{(n-1)} \quad (6)$$

여기서  $\|U\|$ 는 Euclidean vector norm 으로  $\left(\sum_{i=1}^{N \times P} U_i^2\right)^{1/2}$  으로 계산되며,

$$\text{둘째, } g_{(n)} < g_{(n-1)} \quad (7)$$

여기서  $g$ 는  $\left[\sum_{i=1}^{N \times P} \left(\frac{\partial T}{\partial U_i}\right)^2\right]^{1/2}$  으로 계산된다. 주 프로그램(main program)의 플로우 차트(flow chart)를 Fig. 2에 보였다.

### 3. 수치 계산

유한요소법으로 어떤 문제를 해석하고자 할 때 요소

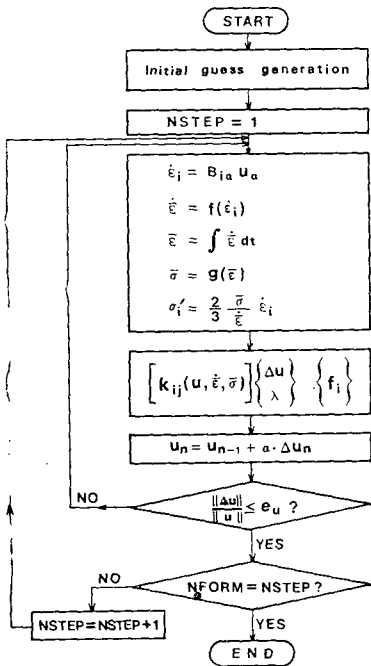


Fig. 2 Flow chart(main program)

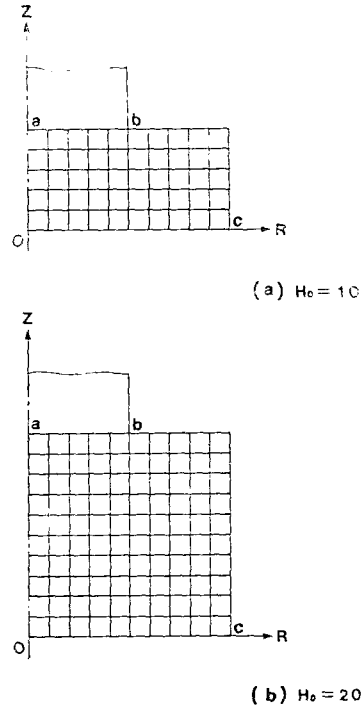


Fig. 3 Finite element meshes for computation

의 선택은 계산량과 직결되기 때문에 알맞은 그물 구조(mesh system)를 선택하는 것은 다른 무엇보다 중요하다. 본 논문에서는 사각형 요소(isoparametric quadrilateral element)를 사용하였으며 그물 구조 및 경계조건은 그림 Fig. 3과 같다.

초기 속도장은 상계해 속도장을 사용하던 종래의 방법 대신, 현재 개발된 초기 속도장 발생법의 유효성을 입증하기 위해 본 문제 해석에 이 방법을 적용시켜 보았다. 초기 속도장 발생 방법을 본 문제 해석에 적용시켜 본 결과 종래의 상계해 속도장의 경우 첫번째 반복계산에서의  $\|\Delta U\|/\|U\|$  값이 1 내지 2 정도이지만, 초기속도장 발생법에서는  $H_0=10$ (mm)인 경우  $\|\Delta U\|/\|U\|=0.05$ ,  $H_0=20$ (mm)인 경우  $\|\Delta U\|/\|U\|=0.26$ 으로 종래의 방법에 비해 이 방법이 월등히 우수함을 알 수 있다.

계산에 사용된 조건은 펀치의 지름  $d_p$ 가 20(mm), 시편의 지름  $D_0$ 는 40(mm), 시편의 높이  $H_0$ 가 10, 20(mm)일 때 각각 마찰 상수(friction factor)  $m$  값이 0.12, 0.19일 경우를 사용하였다. 각 계산조건은 Table 1에 표시되어 있다. 가공 재료는 항복 응력  $Y_0$ 가 17 kgf/mm<sup>2</sup>이고 가공정확도를 일으키는 강소성체로 가정하였다.

본 문제와 같이 자유표면과 강제부분(rigid zone)이 많은 문제를 효과적으로 해석하기 위해 가공 경화 효과를 고려한 결과 대부분의 단계에서 3번내지 4번의 반복계산으로 해가 수렴하였으며 수렴 특성이 매우 안정되어 있음을 확인할 수 있다. 이때  $\alpha$ 는 0.5를 사용하였다. 단계크기(step size)  $\Delta t$ 는 매단계마다 펀치행정(punch stroke)이 초기 높이의 1%가 되도록 잡았다. 실험에서 파괴가 일어나는 단계(stage)까지 계산하였으며  $H_0=10(\text{mm})$ 인 경우 30 단계(30% punch stroke),  $H_0=20(\text{mm})$ 인 경우 35 단계(35% punch stroke)일때 까지이다.

계산에서  $e_u$ 와  $e$ 값은 각각  $10^{-5}$ ,  $10^{-4}$ 이 사용되었으며  $\|\Delta U\|/\|U\|$ 가  $e_u$ 보다 작아지면 수렴하는 것으로 보았고, 수렴한 해를 얻기 위하여 각 단계마다 3번내지 4번 반복계산이 필요하였으며 계산 시간은 CDC 170 computer의 CPU Time으로  $H_0=10(\text{mm})$ 의 경우 250초,  $H_0=20(\text{mm})$ 의 경우 750초 정도가 필요하였다.

초기 속도장 발생 계산의 경우 3번내지 4번 반복 계산 결과를 초기 속도장으로 사용하였으며 계산시간은 CDC 170 computer CPU Time으로 10초내지 25초 정도가 필요하였다.

계산된 결과 데이터(output data)를 시각화(visualization)시키기 위하여 칼컴플로터(Calcomp 960 plotter)를 이용하여 그림으로 나타내었다.

#### 4. 실험

재료의 기계적 성질을 나타내는 응력-변형도 관계를 알기 위해 높은 변형도까지 실험이 가능한 압축 시험을 실시하였으며 압축 시험에 사용한 시편은 피어싱(piercing) 실험에 사용된 AI 2024를  $\phi 24 \times 24$ 로 가공하여 이용하였고 벌징(bulging) 현상을 방지하기 위해 MTS180-14 유압식 만능 시험기를 일정한 속도로 조

정한 다음 조금씩 누를 때마다 윤활제와 테프론 테이프를 갈아 넣었다.

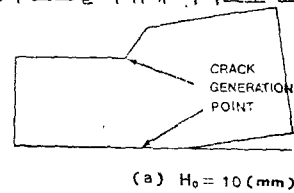
시험의 결과 얻어진 데이터(data)를 최소 자승법(Least square method)을 이용하여 곡선 맞춤(curve fitting)하여 다음과 같은 응력-변형도 관계식을 얻었다.

$$\bar{\sigma} = 17 \left( 1 + \frac{\bar{\epsilon}}{0.01026} \right)^{0.171} \text{ (kgf/mm}^2\text{)} \quad (8)$$

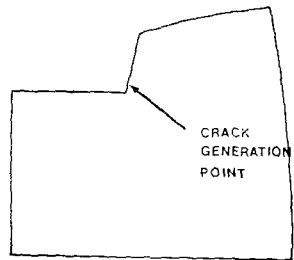
금형과 소재 사이의 마찰을 고려하는 마찰상수  $m$ 을 측정하기 위해 외경( $d_0$ ) 내경( $d_i$ ) 높이( $h$ )의 비가 6:3:2(24mm:12mm:8mm)인 링압축 시험의 시편을 가공한 후 순간 순간마다 높이 변화에 따른 내경의 변화를 측정하여 도표를 그린후, 기존의 마찰상수 보정곡선(friction factor calibration curve)과 비교하여 해당되는  $m$ 값을 구하였다.

A1 2024 시편의 윤활은 칼슘 그리스에  $MoS_2$  분말을 중량비 10% 섞은 윤활제를 이용하였으며 실험결과는 윤활시(lubrication)에  $m=0.12$  그리고 무윤활시(dry friction)는  $m=0.19$ 으로 나왔다. 피어싱 실험은 150 TON 유압프레스(Owatonna Tool Co. U.S.A)에서 실험하였고 측정하는 기구로는 로드셀(load cell: 자체 제작), 직선 변위 계측기(Rectilinear Potentiometer, Moog Inc. U.S.A), 변형도 측정기(Bridge Amplifier Meter: Vishey Instruments), X-Y 기록계(Hewlett Packard)를 사용하였다.

로드셀은 MTS810-14(50 TON 용량)으로 25 TON까지 보정(calibration)하였으며 직선거리 계측장치는 150 TON 프레스의 로드셀 부위에 자석으로 고정하여 펀치



(a)  $H_0 = 10(\text{mm})$



(b)  $H_0 = 20(\text{mm})$

Fig. 4 Crack general point by experiment

Table 1 Computational examples considered in the study

| Case No. | Condition<br>$D_0$<br>(mm) | $d_p$<br>(mm) | $H_0$<br>(mm) | $m$<br>(friction factor) | No. of computation step |
|----------|----------------------------|---------------|---------------|--------------------------|-------------------------|
| 1        | 40                         | 20            | 10            | 0.12<br>(lubricated)     | 30                      |
| 2        | 40                         | 20            | 20            | 0.19<br>(dry)            | 35                      |



정 30% 까지의 변형 모양을 5% 간격으로 보여 주고 있으며, Fig. 7 은  $H_0=20(\text{mm})$ 인 경우의 판단점인 펀치 행정 35%까지의 변형 모양을 10%부터 5% 간격으로 보여주고 있는데  $H_0=10(\text{mm})$ 일 때는 가장자리 들림(edge lifting) 현상이 발생하나  $H_0=20(\text{mm})$ 일때는 가장자리 들림 현상이 발생하지 않는다. 이것은 시편의 지름에 대한 높이의 비( $H_0/D_0$ )가 0.5 일때가 가장자리 들림 현상의 임계점이라는 실험적인 사실<sup>(21)</sup>과도 일치하는 것이다.

Fig. 8 은  $H_0=10(\text{mm})$ 인 경우의 속도장 분포를 펀치 행정 10%, 20%, 30%에서 보여주고 있으며, Fig. 9 는  $H_0=20(\text{mm})$ 인 경우의 속도장 분포를 펀치 행정 15%, 25%, 35%에서 보여주고 있는데 양자간에 변형 형상 차이에 따라 속도장이 다른 양상을 보이고 있다.

Fig. 10 과 Fig. 11 은 각각  $H_0=10(\text{mm})$ 와  $H_0=20(\text{mm})$ 의 기하학적 변형 형상을 계산치와 실험치에 대해 비교한 것인데 서로 잘 일치함을 알 수 있다.

Fig. 12 와 Fig. 13 은 펀치 행정의 진행에 따른 피어싱 하중치를 실험과 계산에 대해 비교하고 있는데 초기에는 하중이 실험과 계산간에 매우 잘 일치하지만 변형이 진행됨에 따라 계산치가 크게 나오는 이유는 크랙의 발생 및 성장과 이에 따른 파괴 현상 때문으로 풀이된다. 즉 실제로는 펀치 행정 10 내지 15% 정도에서 표면 크랙이 발생하여 성장하므로 하중을 지탱하지 못하여, 실험상으로는 그 후 하중이 별로 증가하지 않는 것으로 나타나지만 실제로 프로그램상에서는 이와같은 파괴역학적 현상들을 제대로 고려해 주지 못하기 때문에 실제 크랙이 발생한 이후에는 변형이

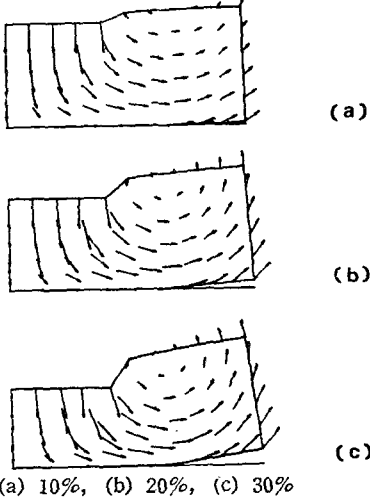


Fig. 8 Velocity fields for  $H_0=10(\text{mm})$  at given punch strokes

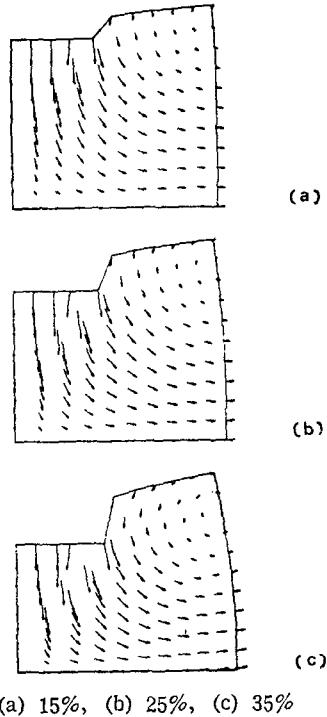


Fig. 9 Velocity fields for  $H_0=20(\text{mm})$  at given punch strokes

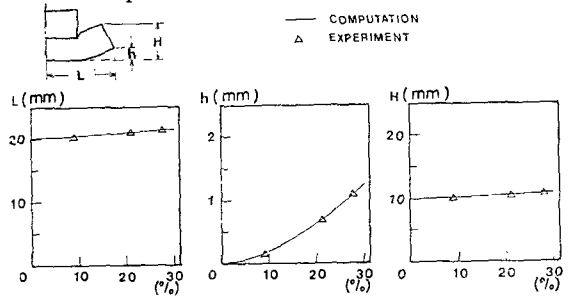


Fig. 10 Comparisons of experimental and computed geometrical changes for  $H_0=10(\text{mm})$

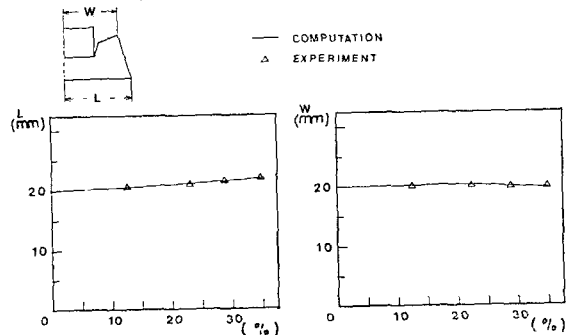


Fig. 11 Comparisons of experimental and computed geometrical changes for  $H_0=20(\text{mm})$



진행될수록 오차가 커지는 것으로 추측된다.

Fig. 14와 Fig. 15는 펀치행정 10%, 20%, 30%의 소재와 펀치 및 소재와 바닥 다이 사이의 접촉 압력분포의 계산결과를 나타내고 있다. 여기서 소재와 펀치 사이에서는 펀치 끝 부분이 접촉 압력이 가장 높고 소재와 바닥 금형사이에서는 대칭축 부근이 접촉 압력이 가장 높다는 사실을 알 수 있다. 이것은 단순 업셋팅 (simple upsetting)의 마찰언덕(friction hill)과 유사하다.

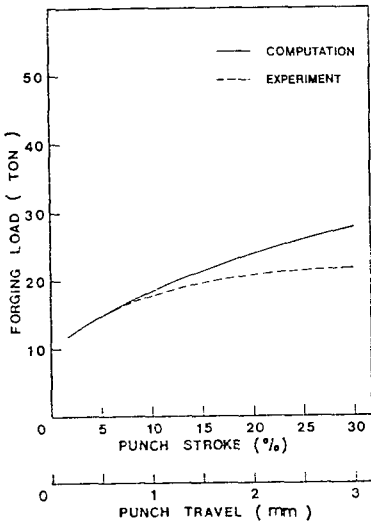


Fig. 12 Comparison of experimental and computed forging loads for  $H_0=10(\text{mm})$

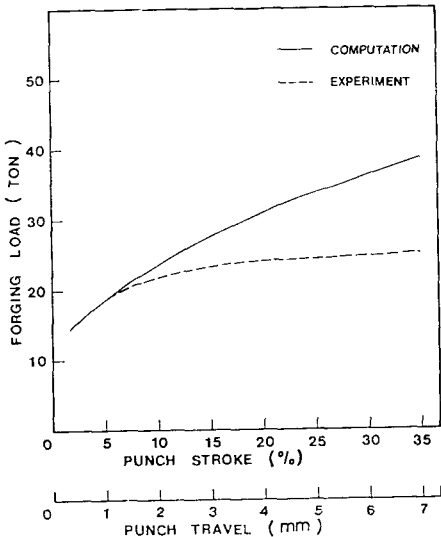


Fig. 13 Comparison of experimental and computed forging loads for  $H_0=20(\text{mm})$

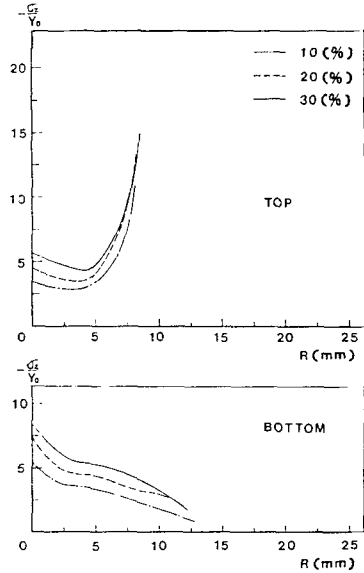


Fig. 14 Contact pressure distributions  $(-\sigma_2/Y_0)$  at the punch-billet interface for  $H_0=10(\text{mm})$

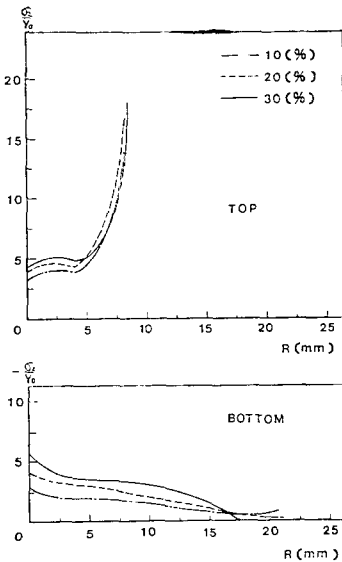


Fig. 15 Contact pressure distributions  $(-\sigma_2/Y_0)$  at the punch-billet interface for  $H_0=20(\text{mm})$

Fig. 16와 Fig. 17는 유효 변형도의 분포를 여러 변형단계에서 보여주고 있는데 펀치 바로 밑 부분과 자유표면의 부분이 유효 변형도가 매우 작아 거의 강체부분을 형성하고 있음을 알 수 있으며 바닥 부분과 펀치 끝 부분의 변형량이 크다는 것을 알 수 있다.

Fig. 4는 실험결과 크랙발생 위치가  $H_0=10(\text{mm})$ 인

경우 바닥부분과 펀치 끝,  $H_0=20(\text{mm})$ 인 경우 펀치 끝 부분임을 보여주고 있다. 실제 금속 성형에서 언제 어디서 파괴가 일어날 것이냐 하는 정량적 표현은 매우 어려우며, 이 분야에 대한 연구는 그 중요성에 비해 매우 미미한 형편이고 연구된 결과<sup>(22)</sup>도 실험 상수를 도입하는 등 일반성을 결여하고 있다. 본 논문에서는 일반적으로 파괴에 영향을 미치는 인자를 규명하기 위해 최대 주응력, 정 수압 응력, 최대 전단응력, 최

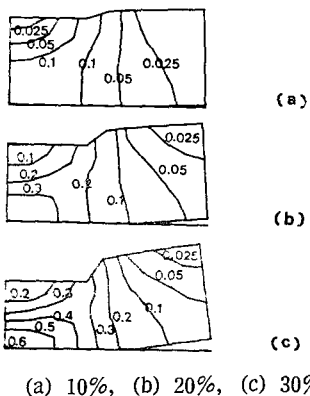


Fig. 16 Effective strain( $\epsilon$ ) distributions for  $H_0=10(\text{mm})$  at given punch strokes

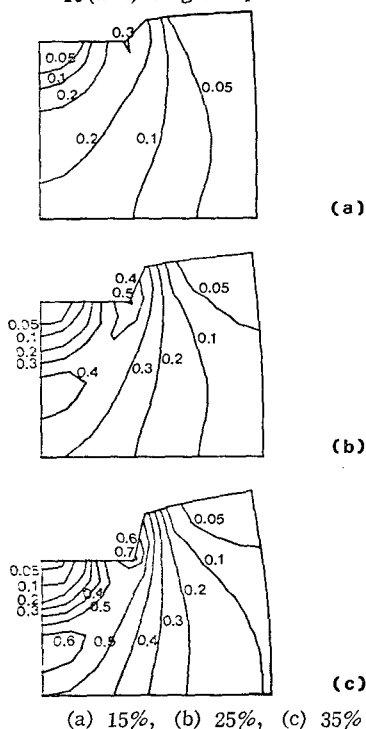


Fig. 17 Effective strain( $\epsilon$ ) distributions for  $H_0=20(\text{mm})$  at given punch strokes

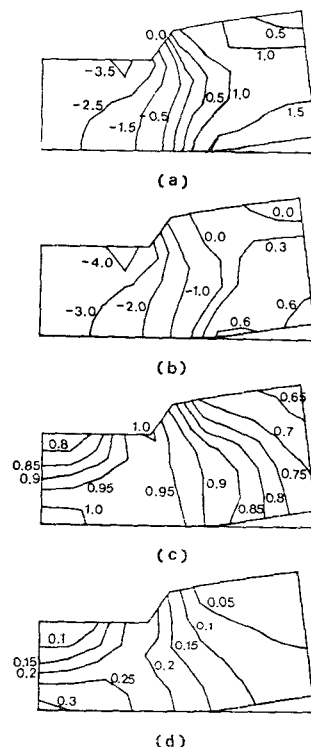
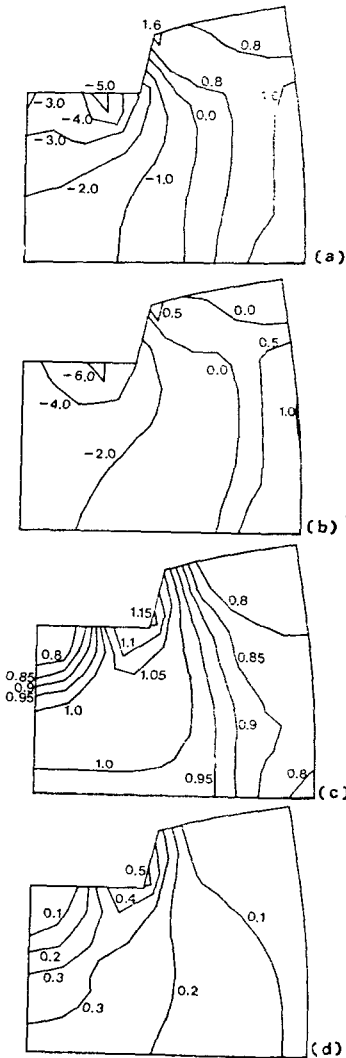


Fig. 18 (a) Distribution of maximum stress( $\sigma_{\max}/Y_0$ )  
 (b) Distribution of hydrostatic pressure ( $\sigma_m/Y_0$ ),  
 (c) Distribution of maximum shear stress ( $\tau_{\max}/Y_0$ ),  
 (d) Distribution of maximum principal strain ( $\epsilon_{\max}$ ), for  $H_0=10(\text{mm})$  at the punch stroke of 30%

대 주 변형도 등 몇가지 인자의 분포를 파괴시점에서 구한후 실제 실험과 가장 일치하는 인자를 규명하기 위하여 Fig. 18과 Fig. 19를 그렸다. 최대 주응력과 정수압 응력의 분포는 크랙 발생위치와 관련이 없으며 최대 주 변형도 분포가 좀더 비슷한 분포를 보여 주지만, 실험과 가장 잘 일치하는 것은  $H_0=10(\text{mm})$ 와  $H_0=20(\text{mm})$ 의 양자에 있어서 모두 최대 전단 응력의 분포이며 이때 파괴시의 최대 전단 응력의 값은 대략 재료의 항복 응력 ( $Y_0$ )과 같은 정도를 보여주었다.

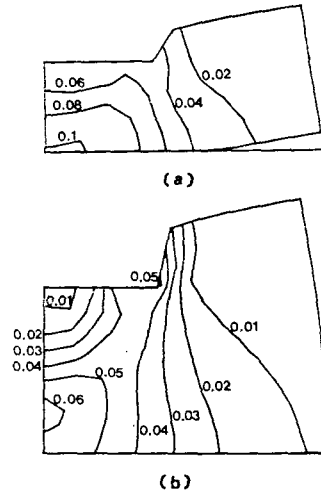
Fig. 20은 마지막 단계에서 유효 변형도율 분포를 보여주고 있는데 두가지 모두 펀치 밑의 바닥 부분에서 변형이 빠르게 진행되고 있음을 알 수 있다.



**Fig. 19** (a) Distribution of maximum principal stress ( $\sigma_{max}/Y_0$ ),  
 (b) Distribution of hydrostatic pressure ( $\sigma_p/Y_0$ ),  
 (c) Distribution of maximum shear stress ( $\tau_{max}/Y_0$ ),  
 (d) Distribution of maximum principal strain ( $\epsilon_{max}$ ), for  $H_0=20(\text{mm})$  at the punch stroke of 35%

**6. 결 론**

초기 속도장 발생방법과 가공 경화 효과를 고려한 수식화를 바탕으로 하여 상하 비데칭 비정상 단조문제



**Fig. 20** Distribution of effective strain rate ( $\dot{\epsilon}$ )  
 (a)  $H_0=10(\text{mm})$  at the punch stroke of 30%  
 (b)  $H_0=20(\text{mm})$  at the punch stroke of 35%

인 구속이 없는 피어싱 문제를 해석한 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

(1) 개발된 초기속도장 발생방법을 본 문제 해석에 적용한 결과 매우 효과적임이 입증되었으며 비정상 상태의 가공경화를 고려한 수식과 강제부분의 연속적 처리법은 자유표면과 강제부분이 많은 문제 해석에 적용시 수렴성을 향상시키므로 효과적이다.

(2) 변형된 외부형상과 크랙이 발생하지 않는 초기 단계의 하중값은 계산결과와 실험결과가 매우 잘 일치한다.

(3) 최대 전단 응력치의 분포로부터 표면크랙의 발생위치를 대략적으로 예측할 수 있다.

**참 고 문 헌**

- (1) O.C. Zienkiewicz, "The Finite Element Method," 3rd ed, MacGraw-Hill, London, 1977
- (2) D.R.J. Owen and E. Hinton, "Finite Elements in Plasticity, Theory and Practice," Pineridge Press Limited, Swansea, 1980
- (3) Kenneth H. Huebner, "The Finite Element Method for Engineers," John Wiley & Sons, Inc., New York, 1975
- (4) Klaus-Jurgen Bathe, "Finite Element Procedures in Engineering Analysis," Prentice Hall, Inc., New

- Jersey, 1982
- (5) S. Kobayashi, "Introduction to the Finite Element Method for Metalworking Process Modeling," Lecture Note, University of California, Berkeley, 1979
  - (6) S.I. Oh, N. Rebelo and S. Kobayashi, "Finite Element Formulation for The Analysis of Plastic Deformation of Rate-Sensitive Materials for Metal Forming," Metal Forming Plasticity, IUTAM Symposium, Tutzing, Germany, pp. 273~291, 1978
  - (7) C.H. Lee and S. Kobayashi, "New Solution to Rigid-Plastic Deformation Problems using a Matrix Method," Trans. ASME, J. of Engng. for Ind., Vol. 95, pp. 865~873, 1973
  - (8) S.I. Oh, "Finite Element Analysis of Metal Forming Processes with Arbitrarily Shaped Dies," Int. J. Mech. Sci., Vol. 24, No. 8, pp. 479~493, 1982
  - (9) P.V. Marcal and I.P. King, "Elasto-Plastic Analysis of Two-Dimensional Stress Systems by the Finite Element Method," Int. J. Mech. Sci., Vol. 9, pp. 143~155, 1967
  - (10) K. Iwata, K. Osakada and S. Fujino, "Analysis of Hydrostatic Extrusion by the Finite Element Method," Trans. ASME, J. of Engng. for Ind. Vol. 94, pp. 697~703, 1972
  - (11) C.H. Lee and S. Kobayashi, "Elastoplastic Analysis of Plane-Strain and Axisymmetric Flat-Punch Indentation by the Finite Element Method," Int. J. Mech. Sci. Vol. 12, pp. 349~370, 1970
  - (12) C.H. Lee and S. Kobayashi, "Analysis of Axisymmetric Upsetting and Plane-Strain Side-Pressing of Solid Cylinders by the Finite Element Method," Trans. ASME, J. of Engng. for Ind. Vol. 93, pp. 445~454, 1971
  - (13) C.H. Lee, S. Masaki and S. Kobayashi, "Analysis of Ball Indentation," Int. J. Mech. Sci., Vol. 14, pp. 417~426, 1972
  - (14) C.H. Lee, H. Iwasaki and S. Kobayashi, "Calculation of Residual Stresses in Plastic Deformation Processes," Trans. ASME, J. of Engng. for Ind., pp. 283~291, 1973
  - (15) O.C. Zienkiewicz and P.N. Godbole, "A Penalty Function Approx. ach to Problems of Plastic Flow of Metals with Large Surface Deformation." J. of Strain Analysis, Vol. 10, No. 3, 1975
  - (16) S.N. Shah, "Numerical Analysis of Metal Forming Processes," Ph. D. Dissertation, University of California, Berkeley, 1975
  - (17) C.C. Chen, "Finite Element Analysis of Plastic Deformation in Metal Forming Processes," Ph. D. dissertation, University of California, Berkeley, 1978
  - (18) S.I. Oh, J.P. Tang and A. Badawy, "Finite Element Mesh Rezoning and its Applications to Metal Forming Analysis," Advanced Technology of Plasticity, Vol. II, pp. 1051~1058, 1984
  - (19) K. Mori, K. Osakada and M. Fukuda, "Simulation of Severe Plastic Deformation by Finite Element Method with Spatially Fixed Elements," Int. J. Mech. Sci., Vol. 25, No. 11, pp. 775~783, 1983
  - (20) Y.J. Kim and D.Y. Yang, "A Formulation for Rigid-Plastic Finite Element Method Considering Work-hardening Effect," Int. J. Mech. Sci., Vol. 27, No. 718, pp. 487~495, 1985
  - (21) M.M. Sehgal and S. Kobayashi, "Plastic Indentation of Steel Cylinders with Circular Punches," Trans. ASME, J. of Engng. for Ind., pp. 1035~1044, 1972
  - (22) S.I. Oh and S. Kobayashi, "Workability of Aluminum Alloy 7075-T6 in Upsetting and Rolling," Trans. ASME, J. of Engng. for Ind., pp. 800~806, 1976

부 록

행렬 방정식(matrix equation)

어떤 제어 체적안에  $M$ 개의 요소가  $N$ 개의 절점으로 서로 연결되어 있다고 생각하면, 전체 범함수는 각 요소에 대한 범함수의 합으로 나타낼 수 있다. 즉,

$$T = \sum_{n=1}^M T^{(n)}(u) \tag{A.1}$$

여기서  $T^{(n)}(u)$ 는  $m$  번째 요소에 대한 범함수이다.

어느 한 요소 안에서의 속도장  $u$ 를 형상함수(shape function)  $N_i$ 를 도입하여 요소내 각 절점에서의 속도 값  $U_i'$ 의 선형조합(linear combination)으로 나타내면

$$u \cong \sum N_i U_i' \tag{A.2}$$

과 같이 되며 식 (A.1)은 다시 다음과 같이 근사화 될 수 있다.

$$T \cong \sum_{n=1}^M T^{(n)}(U') \tag{A.3}$$

여기서 범함수  $T$ 는 절점에서의 속도 값  $U$ '의 함수로 표시되었다.

전체 절점에서의 속도 값을  $U_i (i=1, \dots, N \times P : N$ 은 절점의 갯수,  $P$ 는 각 절점에서 미지수의 갯수)라 하면 식 (A.3)은 다음과 같이 표시되며

$$T \equiv \bar{T}(U) \tag{A.4}$$

이때  $T(u)$ 의 정류치 문제는  $\bar{T}(U)$ 의 정류치 문제로 바뀌게 된다.

범함수  $T$ 의 정류조건(stationary condition)은 다음과 같이 된다.

$$\delta T \approx \delta \bar{T} = \frac{\partial \bar{T}}{\partial U_a} \delta U_a + \frac{\partial \bar{T}}{\partial \lambda(\gamma)} \delta \lambda(\gamma) = 0 \tag{A.5}$$

식 (A.5)이 임의의  $\delta U_a$ 와  $\delta \lambda(\gamma)$ 에 대해 항상 성립하려면 다음 조건을 동시에 만족하여야 한다.

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial U_a} = 0 \tag{A.6}$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \lambda(\gamma)} = 0 \tag{A.7}$$

식 (A.6)과 식 (A.7)는 각각 다음과 같이 표시된다.

$$\sum_{\alpha=1}^M \frac{\partial}{\partial U_a} [\bar{T}_1^{(\alpha)} + \bar{T}_2^{(\alpha)} - \bar{T}_F^{(\alpha)} + \bar{T}_F'^{(\alpha)}] = 0 \tag{A.8}$$

$$\sum_{\alpha=1}^M \frac{\partial}{\partial \lambda^{(\gamma)}} [\bar{T}_1^{(\alpha)} + \bar{T}_2^{(\alpha)} - \bar{T}_F^{(\alpha)} + \bar{T}_F'^{(\alpha)}] = 0 \tag{A.9}$$

식 (A.8)과 식 (A.9)는 비선형 방정식이므로 고차항을 무시하고 테일러(Taylor)급수로 전개하여 결합(assembly)하면 다음과 같은 행렬방정식(matrix equation)을 얻을 수 있다.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 (\bar{T}_1 + \bar{T}_F')}{\partial U_a \partial U_a} & \frac{\partial^2 \bar{T}_2}{\partial \lambda^{(\gamma)} \partial U_a} \\ \frac{\partial^2 \bar{T}_2}{\partial U_a \partial \lambda^{(\gamma)}} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta U_a \\ (n-1)^{\lambda^{(\gamma)}} (n) \end{pmatrix}$$

$$= - \begin{pmatrix} \frac{\partial (\bar{T}_1 - \bar{T}_F + \bar{T}_F')}{\partial \bar{T}_2} \\ \frac{\partial U_a}{\partial \lambda^{(\gamma)}} \end{pmatrix}$$

식 (A.10)의 각항을 구체적으로 유도해 보면 한 요소 내에서 다음과 같다.

$$\frac{\partial \bar{T}_1^{(\alpha)}}{\partial U_a} = \int_v^{(\alpha)} \left( \frac{2}{3} \right) \cdot \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\epsilon}} K_{ar} U_r dv \tag{A.11}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{T}_1^{(\alpha)}}{\partial U_a \partial U_b} = \int_v^{(\alpha)} \left( \frac{2}{3} \right) \cdot \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\epsilon}} \left[ K_{a\beta} - \left( \frac{2}{3} \right) (K_{ar} K_{\beta r} U_r U_\beta) dv \right. \tag{A.12}$$

$$\left. \frac{\partial \bar{T}_2^{(\alpha)}}{\partial \lambda} = \bar{T}_v^{(\alpha)} = \int_v^{(\alpha)} Q_a U_a dv \tag{A.13}$$

$$\frac{\partial \bar{T}_v^{(\alpha)}}{\partial U_a} = \frac{\partial^2 \bar{T}_2}{\partial \lambda \partial U_a} = \int_v^{(\alpha)} Q_a dv, \tag{A.14}$$

$$\frac{\partial \bar{T}_F}{\partial U_a} \int_{s \in F^{(\alpha)}} f \cdot N ds = \text{consistent nodal force.} \tag{A.15}$$

이 되며

여기에서

$$u_i = N_{ia} U_a,$$

$$\hat{\epsilon}_i = A_{ij} N_{ja} U_a = B_{ia} U_a,$$

$$\hat{\epsilon} = \left( \frac{2}{3} \hat{\epsilon}^T \cdot \hat{\epsilon} \right)^{1/2} = \left( \frac{2}{3} U_a^T B_{ia}^T B_{i\beta} U_\beta \right)^{1/2} = \left( \frac{2}{3} U_a^T K_{a\beta} U_\beta \right)^{1/2}$$

$$K_{a\beta} \equiv B_{ia}^T B_{i\beta},$$

$$\hat{\epsilon}_v = C_i \cdot \hat{\epsilon}_i = C_i B_{ia} U_a = Q_a U_a,$$

$$C_i \equiv [1, 1, 1, 0]^T.$$

$$Q_a \equiv C_i B_{ia},$$

이다.