

< 論 文 >

境界積分法에 의한 軸對稱 彈性問題의 解析

孔 昌 德* · 金 珍 佑**

(1986 年 7 月 29 日 接受)

Boundary Integral Equation Analysis of Axisymmetric Linear Elastic Problems

Chang Duck Kong and Jin Woo Kim

Key Words; Boundary Integral Equation(境界積分方程式), Axisymmetric Elastic Problem(軸對稱彈性問題), Displacement Kernel and Traction Kernel(變位커널 및 表面力커널), Isoparametric Cubic Boundary Element(等媒介次境界要素), Elliptic Integral(橢圓積分)

Abstract

An implicit approach is employed to obtain a general boundary integral formulation of axisymmetric elastic problems in terms of a pair of singular integral equations. The corresponding kernel functions from the solutions of Navier's equation are derived by applying a three dimensional integral and a direct axisymmetrical approach. A numerical discretization scheme including the evaluation of Cauchy principal values of the singular integral is described. Finally the typical axisymmetric elastic models are analyzed, i.e. the hollow sphere, the constant thickness and the V-notched round bar.

기 호 설 명

[A]	: 표면력 Kernel의 적분을 포함하는 매트릭스	$E\left(m, \frac{\pi}{2}\right)$: 제 2종 완전 타원적분
a_i, b_i, c_i, d_i	: Chebyshev 타원적분을 결정하는 계수	f_i	: 물체력 벡터
[B]	: 변위 Kernel의 적분을 포함하는 매트릭스	G_r, G_z	: Galerkin 벡터의 반경 및 축방향 성분
$C_{rr}, C_{rz}, C_{zr}, C_{zz}$: 매트릭스 A의 대각선항에 기여하는	H_n	: n차 Hankel 변환
		J	: Jacobian 값
		J_n	: n차 Bessel 함수
		$K\left(m, \frac{\pi}{2}\right)$: 제 1종 완전 타원 적분
		$N_i(\xi)$: 형상함수
		n_r, n_z	: 단위법선 벡터의 반경 및 축방향 성분

* 正會員, 大田機械廠

** 正會員, 陸軍士官學校 機械工學科

- 분
- P_r, P_z : 단위 환형하중 벡터의 반경 및 축방향 성분
- R_p, Z_p : 하중점 P 의 원통좌표
- $r(p, Q)$: 점 P 와 Q 의 거리
- r_a, z_a : 경계점 Q 의 원통좌표
- S : 체적 V 의 표면
- $T_{rr}, T_{rz}, T_{zr}, T_{zz}$: 축대칭 표면력 Kernel 함수
- t_r, t_z : 표면력 벡터의 반경 및 축방향 성분
- $U_{rr}, U_{rz}, U_{zr}, U_{zz}$: 축대칭 변위 Kernel 함수
- U_r, U_z : 변위 벡터의 반경 및 축방향 성분
- V : 해영역의 체적
- W_σ, W_σ^z : Gaussian 및 Log의 수치적분의 가중함수
- Γ : 회전축을 통과하는 반경 방향 평면의 표면경로
- δ : Dirac Delta 함수
- δ_{ij} : Kronecker Delta
- θ_p, θ_a : 하중점 및 경계점의 각 좌표
- μ : 전단계수
- ν : Poisson 비
- ξ : 국부좌표계
- σ_r, σ_z : 반경방향과 축방향 응력
- ψ : 포텐셜 함수

1. 서 론

축대칭 탄성 구조물에 응력해석은 내압용기, 파이프, 축류, 디스크 등 많은 산업기기 분야에서 매우 유용하다.

축대칭 문제를 해석할 수 있는 방법은 해석적인 방법과 유한차분법(FDM), 유한요소법(FEM)⁽¹⁾ 및 경계적분법(BIE) 등의 수치적 접근방법들이 있는데 해석적 방법 경우는 해석의 신속 정확성은 있으나 기하학적 모양에 제한이 있고, FEM과 FDM은 널리 알려진 방법으로 기하학적 제한은 없으나 불필요한 부위까지 2차원적 요소를 분할해야 하므로 특히나 변화가 심한 곡선 경계에서는 많은 입력자료와 계산 시간이 소요된다. 그러나 최근에 시도되고 있는 BIE의 경우는 1차원적 선형 경로 경계 입력자료만이 요구되어 해석시간을 절약하여 경제적이며 내부점의 응력 및 변위는 요구되는 점의 좌표 자료만 부여하면 된다.

경계적분법(Boundary Integral Equation Method: BIE) 또는 경계요소법(Boundary Element Method:

BIE)은 Rizzo⁽²⁾와 Cruse⁽³⁾에 의해 2차원과 3차원 탄성문제를 일정 요소로서 처음 시도되었다. 선형요소로 개선된 것은 Riccardella⁽⁴⁾와 Cruse⁽⁵⁾에 의해, 2차 요소로 개선된 것은 Lachat와 Watson⁽⁶⁾에 의해 이루어졌다.

축대칭 문제에 대한 BIE의 첫번째 시도는 Kermendis⁽⁷⁾와 Mayr⁽⁸⁾에 의해 이루어졌는데 축대칭 Kernel을 구하는 방법으로 3차원 Kelvin해를 이용 원주경로를 따라 적분하는 3차원 접근방법을 사용했다. Cruse 등⁽⁹⁾은 축대칭 BIE를 체계화하였고 적분변환 방법을 이용 축대칭 Kernel들을 구하는 방법과, Singularity 적분을 해석적으로 구하였으며 선형 및 원호(arc)요소를 사용하였다. Mayr 등⁽¹⁰⁾은 경계조건의 적용을 개선하였고 Cathie와 Banerjee⁽¹¹⁾는 탄소성 축대칭 문제에 대해 해석하였다.

Bakr와 Fenner⁽¹²⁾는 축대칭 Kernel을 구하는데 Hankel 변환법을 처음 이용 직접 축대칭 접근법으로 구하였다. 또한 Bakr & Fenner⁽¹³⁾는 열탄성 문제를 해석하면서 2차 요소를 사용하였고 Abdul-Mihsein 등⁽¹⁴⁾은 원심하중 문제를 해석하면서 2차 요소를 사용하였다.

최근 Ahdul-Mihsein 등⁽¹⁵⁾은 압력 용기에 대한 응력 해석 문제를 3차원 문제와 결부시킨 구체적인 예를 해석하였다.

본 논문에서는 축대칭 선형 문제의 경계적분법에 대한 일반화한 정식화 과정 및 수치적 접근방법이 제시되었으며 정식화 과정 중 Navier 방정식의 기본해로부터 도출되는 변위 및 표면적 Kernel을 구하는 Hankel 변환법을 이용한 「直接軸對稱接近法」과 3차원 Kevin 해로부터 원주경로 따라 적분한 「3次元接近法」이 비교 검토되었다.

경계적분 방정식으로 나타낼 때 발생하는 Singularity 적분인 계수항 C_{ij} 를 포함하는 매트릭스의 대각선 항은 축방향 강제운동 경계조건과 반경 방향의 정수압, 평면탄성, 평면응력 경계조건으로부터 Implicit하게 구하는 방법을 제시하였다. 수치적 접근 방법에는 선형, 2차 요소 및 본논문에서 처음 시도되는 3차 요소형상 함수를 사용했고 타원적분의 수치적분에는 비교적 간단하고 정확도가 높은 Chebysev 접근방법이 제시되었으며, Kernel의 적분에는 일반 4, 5, 6, 7, 8, 12-Gaussian 수치적분법이 사용되었고, 변위 Kernel 적분시 발생하는 Singular Log 항 적분은 Stroud와 Secrest⁽¹⁷⁾ 수치적분 공식을 이용하였다.

응력해석 예로서 중공내압구 Rim 하중을 받는 일정 두께 디스크 및 V -노치피로시편 등이 제시되었으며 엄밀해와 FEM 해와 비교 검토되었다.

또한 요소 수와 요소 형상함수 차수 증가에 따른 해의 수렴성이 검토되었고 Chebyshev 타원적분과 지수급수형 타원적분의 정확도가 비교되었다.

2. 경계적분 방정식(BIE)의 정식화

2.1 경계적분 방정식의 유도

일반선형탄성체에서 평형방정식에 변위 Kernel U_{ki}^* 를 포함한 영역 Ω 에 대한 적분방정식으로 가상일의 원리로 부터 다음과 같다.

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + f_i) U_{ki}^* d\Omega = 0 \quad (0)$$

여기서 f_i 는 단위체적당 물체력이며 변위 Kernel U_{ki}^* 는 동일 영역 Ω 를 갖는 무한 탄성매체의 두점 p 와 Q 로 표시되는 다음 관계를 만족한다.

$$D_{iamb} U_{*ki,a^b}(p, Q) + \delta_{in} \delta(p, Q) = 0 \quad (2)$$

여기서 D_{iamb} 는 탄성계수 Tensor이며 $\delta(\cdot)$ 는 Dirac Delta 함수로 다음과 같이 정의된다.

$$\int_{\Omega} \delta(p, Q) U_i(Q) d\Omega = U_i(p) \quad (3)$$

Betti의 상반일의 정리와 Gauss의 발산정리를 적용하면 식(1)은 다음과 같이 된다.

$$\int_{\Omega} D_{iamb} U_{ki}^* U_m d\Omega - \int_S T_{ki}^* U_i dS + \int_S U_{ki}^* t_i dS + \int_{\Omega} U_{ki}^* f_i d\Omega = 0 \quad (4)$$

여기서 T_{ki}^* 은 표면력 Kernel로 $T_{ki}^* = D_{imna} U_{*kn,a} n_m$

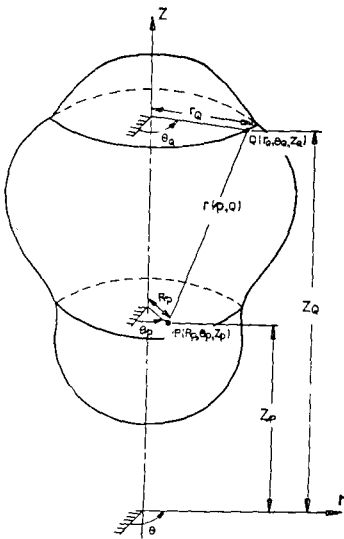


Fig. 1 An anisymmetric solution domainfor BIE

으로 정의된다.

식(2)와 (3)을 식(4)에 대입하면 물체력이 없는 경우 영역 내에 임의점(p)의 변위에 관한 3차원 적분 방정식은 다음과 같다.

$$U_i(P) = - \int_S T_{ij}^*(p, Q) U_j(Q) dS + \int_S U_{ij}^*(p, Q) t_j(Q) dS \quad (5)$$

여기서 $U_j(Q)$ 와 $t_j(Q)$ 는 Q 점에서의 변위와 표면력이다.

Fig. 1과 같은 축대칭 문제에 식(5)을 적용하기 위하여 표면경로 $dS(Q)$ 을 $r_Q d\theta_Q d\Gamma(Q)$ 로 바꾸어야 하며 $d\Gamma(Q)$ 는 대칭축을 중심으로 회전하는 반경 방향 평면의 선경로이다.

식(5)을 축대칭 문제로 변환하면 다음과 같은 식이 얻어진다.

$$U_r(p) = -2\pi \left[\int_T T_{rr}(p, Q) U_r(Q) r_Q d\Gamma(Q) + \int_r T_{rz}(p, Q) U_z(Q) r_Q d\Gamma(Q) \right] + 2\pi \left[\int_r U_{rr}(p, Q) t_r(Q) r_Q dT(Q) + \int_s U_{rz}(p, Q) t_z(Q) r_Q dT(Q) \right] \quad (6)$$

$$U_z(p) = -2\pi \left[\int_T T_{zr}(p, Q) U_r(Q) r_Q d\Gamma(Q) + \int_T T_{zz}(p, Q) U_z(Q) r_Q d\Gamma(Q) \right] + 2\pi \left[\int_T U_{zr}(p, Q) t_r(Q) r_Q dT(Q) + \int_s U_{zz}(p, Q) t_z(Q) r_Q dT(Q) \right] \quad (7)$$

여기서 편의상 Kernel들의 첨자*는 생략하였다.

다음은 완전한 경계적분 방정식(BIE)을 구하기 위해 식(6)과 식(7)의 각항을 내부점 p 에서 경계점 P 로 접근시킨다. (Fig. 2 참조) 이 때 변위 Kernel들의 적분항과 표면력 Kernel들의 적분항은 다음과 같이 구분된다.

$$\lim_{p \rightarrow P} \int_r U_{ij}(p, Q) t_j(Q) d\Gamma(Q) = \int_r U_{ij}(P, Q) t_j(Q) r_Q d\Gamma(Q) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} U_{ij}(p, Q) t_j(Q) r_Q d\Gamma(Q) \quad (8)$$

$$\lim_{p \rightarrow P} \int_T T_{ij}(p, Q) U_j(Q) dT(Q) = \int_T T_{ij}(P, Q) U_j(Q) r_Q dT(Q) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{T_\epsilon} T_{ij}(p, Q) U_j(Q) r_Q dT(Q) \quad (9)$$

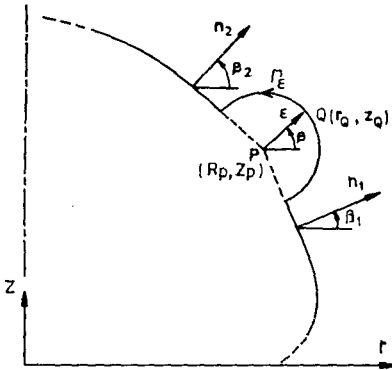


Fig. 2 Limiting process for a point approaching the boundary

여기서 $i=r, z, j=r, z$ 이다.

식(8)의 우항 두번째 항은 후술되는 변위 Kernel로부터 영이되거나 식(9)의 두번째 항은 Jump로서 다음과 같다.

$$K_{ij} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{r_1}^{r_2} T_{ij}(p, Q) r_0 dT(Q) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\beta_1}^{\beta_2} T_{ij}(\epsilon, \beta) r_0 \epsilon d\beta \quad (10)$$

K_{ij} 는 Cruse⁽¹³⁾에 의해 해석적으로 구하였으나 본 논문에서는 축대칭 문제의 경계조건들을 이용하여 Implicit하게 구하였다. 구하는 방법은 수치적 정식화에서 설명할 것이다.

대각선 성분을 $C_{ij} = (\delta_{ij} - K_{ij})$ 로 정의하면 완전 경계적분 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} C_{rr} & C_{rz} \\ C_{rz} & C_{zz} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} U_r \\ U_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2\pi \int_r U_{rr}(P, Q) r_0 dT(Q) \\ 2\pi \int_r U_{zz}(P, Q) r_0 dT(Q) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} t_r \\ t_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2\pi \int_r T_{rr}(P, Q) r_0 dT(Q) \\ 2\pi \int_r T_{zz}(P, Q) r_0 dT(Q) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U_r \\ U_z \end{Bmatrix} \quad (11)$$

2.2 변위 및 표면력 Kernel들의 유도

서론에서도 언급한 바와 같이 Kernel을 구하는 방법은 직접 축대칭 접근방법과 3차원 접근방법이 있다.

(1) 직접 축대칭 접근방법

3차원 탄성체의 지배 방정식인 Navier 방정식은

$$\nabla^2 U_i + \frac{1}{1-2\nu} U_{i,ii} = -\frac{1}{\mu} f_i \quad (12)$$

원통좌표계로 나타내면

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2}\right) U_r + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial r} = -\frac{F_r}{\mu} \quad (13)$$

$$\nabla^2 U_r \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial z} = -\frac{F_z}{\mu} \quad (14)$$

여기서 e 는 Dilatation이다.

Galerkin 벡터 G_i 는 다음과 같이 정의된다⁽¹⁸⁾.

$$U_i = \nabla^2 G_i - \frac{1}{2(1-\nu)} \nabla(\nabla U_i) \quad (15)$$

식(15)를 식(14)과 (13)에 대입하면 다음과 같이 중조화 함수가 얻어진다.

$$\nabla^2 \nabla^2 G_i = -\frac{1}{\mu} F_i \quad (16)$$

$\phi_i = \nabla^2 G_i$ 로 대체시켜 다음과 같이 정의되는 Hankel 변환기법⁽¹²⁾를 이용하여 기본해를 구한다.

$$H_n(\phi) = \int_0^\infty \phi_r J_n(tr) dr \quad (17)$$

여기서 J_n 은 n 차 Bessel 함수이고 t 와 r 은 변환 Argument이다.

따라서 Galerkin 벡터는 다음과 같이 1종과 2종 타원적분인 $K(m, \frac{\pi}{2})$ 와 $E(m, \frac{\pi}{2})$ 의 항으로 주어진다.

$$G_r = \frac{1}{6\pi^2\mu} \frac{\sqrt{R_P r_0}}{m^3} \left\{ 2(1-m^2) K\left(m, \frac{\pi}{2}\right) - (2-m^2) E\left(m, \frac{\pi}{2}\right) \right\} \quad (18)$$

$$G_z = \frac{1}{2\pi^2\mu} \frac{\sqrt{R_P r_0}}{m} E\left(m, \frac{\pi}{2}\right) \quad (19)$$

여기서 m 은 다음과 같이 정의된다.

$$m = \frac{2\sqrt{R_P r_0}}{\left\{ (R_P + r_0)^2 + (Z_P - Z_0)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} \quad (20)$$

따라서 식(18)과 식(19)에 식(15)에 대입하면 다음과 같다.

$$U = \left\{ \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2}\right) G_r - \frac{1}{2(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2 G_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial G_r}{\partial r} - \frac{G_r}{r^2}\right) - \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 G_z}{\partial r \partial z} \right\} e_r + \left\{ -\frac{1}{2(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2 G_r}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial G_r}{\partial z}\right) + \nabla^2 G_z - \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 G_z}{\partial z^2} \right\} e_z \quad (21)$$

해를 구할 때 단위 환형 하중으로 고려했으므로 변위 Kernel을 다음과 같이 정의하여 구할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} U_r \\ U_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_{rr} & U_{rz} \\ U_{rz} & U_{zz} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} P_r \\ P_z \end{Bmatrix} \quad (22)$$

따라서 식(21)로부터 변위 Kernel 성분들을 분리하여 구해지며 부록에 표시된 바와 같다.

표면력 Kernel은 변위-변형관계 구성 방정식, 응력

표면력 관계식으로부터 구해진다.

예로서 표면력 Kernel T_{rr} 은 다음과 같으며 부록에 표시하였다.

$$T_{rr} = \frac{2\mu(1-\nu)}{1-2\nu} \left\{ \left[\frac{\partial U_{rr}}{\partial r} + \frac{\nu}{(1-\nu)} \left(\frac{U_{rr}}{r} + \frac{\partial U_{rz}}{\partial z} \right) \right] n_r + \left[\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \left(\frac{\partial U_{rr}}{\partial z} + \frac{\partial U_{rz}}{\partial r} \right) \right] n_z \right\} \quad (23)$$

(2) 3차원 접근방법

Navier 방정식의 3차원 기본해가 Kelvin에 의해 다음과 같이 구해졌다.

$$U_{ii}(p, Q) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \cdot \frac{1}{r(p, Q)} \quad [(3-4\nu)\delta_{ii} + r_{,i}r_{,i}] \quad (24)$$

$$T_{ii}(p, Q) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)} \cdot \frac{1}{r(p, Q)^2} \left\{ \frac{\partial r(p, Q)}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{ii} + 3r_{,i}r_{,i}] - (1-2\nu)(n_i r_{,i} - n_i r_{,i}) \right\} \quad (25)$$

각 성분 등을 원주경로를 따라 적분하면 전술한 방법의 Kernel들과 동일한 값들이 구해진다.

예로서 3차원 Kernel과 $U_{rr}(p, Q)$ 와의 관계는 다음과 같다.

$$U_{rr}(p, Q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [U_{11}(p, Q) \cos \theta_0 + U_{12}(p, Q) \sin \theta_0] d\theta_0 \quad (26)$$

(3) 회전 대칭축 상의 Kernel들

$R_p=0$ 일 때 $m=0$ 이므로 $K\left(m, \frac{\pi}{2}\right) = E\left(m, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ 이므로 회전축상에 해당하는 경계점의 Kernel를 구할 수 있다(부록 참조).

2.3 내부점의 해

비록 대부분의 응력해석에서 최대응력 및 변위가 경계에서 발생하기는 하지만 내부점의 정보를 얻기를 원할 때가 있다.

이 때는 이미 계산된 Kernel들과 식 (6)과 (7)을 이용하여 내부점 변위를 구할 수 있고 응력의 경우는 식 (6)과 (7)을 내부점 P 에 관해 미분하고 변형을 구한 후 Hook의 법칙을 이용하여 구할 수 있다.

변위 Kernel의 미분은 해석적으로 구하는 방법⁽²⁰⁾과 수치적 접근방법⁽¹⁹⁾이 있는데 여기서는 전자의 경우를 이용하였다.

2.4 수치적 정식화

경계적분 방정식(11)은 수치적 계산을 위해서 경로

Γ 는 적당한 갯수의 요소로 나누고 각 요소에 대한 수치적분한 다음 각각 모든 요소를 합하면 된다.

적용문제의 기하학적 모양에 따라 선형, 2차 및 3차 요소를 선택할 수 있도록 하였다.

요소의 3차 형상 함수는 다음과 같이 정의된다.

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi) - \frac{1}{2}(1-\xi^2) + \frac{1}{16}(-9\xi^3 + \xi^2 + 9\xi - 1) \quad (28)$$

$$N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1+\xi) - \frac{1}{2}(1-\xi^2) + \frac{1}{16}(9\xi^3 + \xi^2 - 9\xi - 1) \quad (29)$$

$$N_3(\xi) = (1-\xi^2) + \frac{1}{16}(27\xi^3 + 7\xi^2 - 27\xi - 7) \quad (30)$$

$$N_4(\xi) = \frac{1}{16}(-27\xi^3 - 9\xi^2 + 27\xi + 9) \quad (31)$$

식(11)의 각 변수를 전체 좌표계에서 국부좌표계로 나타낸다.

$$r(\xi) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi) r_i, \quad z(\xi) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi) z_i \quad (32)$$

변위와 표면력도 같은 방법으로 바꾸고 $d\Gamma$ 는 $J(\xi)d\xi$ 으로 바꾸어 다시 M_0 개점 Gaussian 수치적분을 적용하면 식(11)은 분할형 적분 방정식으로 된다. $d(m, c)$ 를 m 번째 요소의 C 번째 절점의 번호로 표시하고 총 요소가 M 개라면 식(11)은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} & \left[\begin{matrix} C_r(P) & C_{rz}(P) \\ C_{zr}(P) & C_{zz}(P) \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} U_r \\ U_z \end{matrix} \right\}_P \\ &= 2\pi \sum_{m=1}^M \sum_{c=1}^4 \left[\int_{-1}^{+1} U_{rr}(P, Q) N_i(\xi) r_{0i} J(\xi) d\xi \right. \\ & \quad \left. \int_{-1}^{+1} U_{zr}(P, Q) N_i(\xi) r_{0i} J(\xi) d\xi \right. \\ & \quad \left. \int_{-1}^{+1} U_{rz}(P, Q) N_i(\xi) J(\xi) d\xi \right. \\ & \quad \left. \int_{-1}^{+1} U_{zz}(P, Q) N_i(\xi) r_{0i} J(\xi) d\xi \right] \cdot \left\{ \begin{matrix} t_r \\ t_z \end{matrix} \right\}_{Pd(m,c)} \\ & - 2\pi \sum_{m=1}^M \sum_{c=1}^4 \left[\int_{-1}^{+1} T_{rr}(P, Q) N_i(\xi) r_{0i} J(\xi) d\xi \right. \\ & \quad \left. \int_{-1}^{+1} T_{zr}(P, Q) N_i(\xi) r_{0i} J(\xi) d\xi \right. \\ & \quad \left. \int_{-1}^{+1} T_{rz}(P, Q) N_i(\xi) r_{0i} J(\xi) d\xi \right. \\ & \quad \left. \int_{-1}^{+1} T_{zz}(P, Q) N_i(\xi) r_{0i} J(\xi) d\xi \right] \left\{ \begin{matrix} U_r \\ U_z \end{matrix} \right\}_{Pq} \quad (33) \end{aligned}$$

여기서 $J(\xi)$ 는 Jacobian 이고 $\int_{-1}^{+1}(\cdot) d\xi$ 는 M_0 개 Gaussian 수치적분으로 수행할 수 있다.

각 절점에 대한 경계적분 방정식(33)을 전절점에 대해 수행하면 다음과 같은 선형 대수 방정식이 구해진다.

$$[A][U] = [B]\{t\} \quad (34)$$

여기서 $[A]$ 는 계수 대각선 항에 기여하는 계수 $C_{rr}, C_{rz}, C_{zr}, C_{zz}$ 를 포함한다.

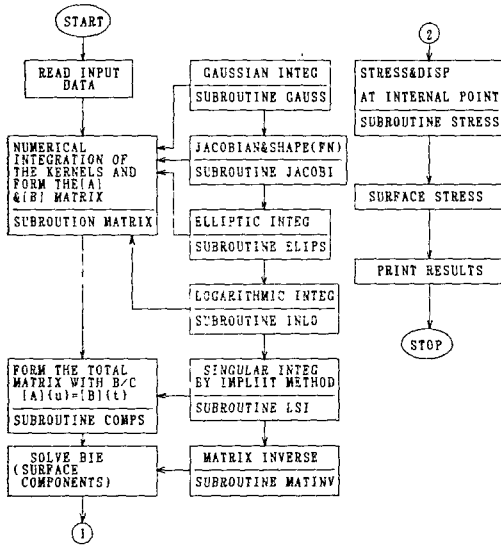


Fig. 3 Flow chart for axisymmetric BIE

식(34)에 경계조건을 적용하고 미지수항 $\{x\}$ 와 기지수항 $\{y\}$ 로 분리한다.

$$[C]\{x\} = [D]\{y\} = [E] \quad (35)$$

$[C]$ 는 일반적으로 비대칭 행렬로 이 경우에 효과적인 Gauss 소거법을 적용하였다.

본 논문을 위해 작성된 축대칭 경계 요소 프로그램의 흐름도는 Fig. 3과 같다.

2.5 타원적분 항의 계산

타원적분 계산은 지수급수확정법, 반복기법, Chebyshev 접근법⁽²¹⁾이 있는데 지수급수 확정법을 m 이 0.9까지 유용하고 1부근에서는 오차가 크나 Chebyshev 경우는 비교적 프로그램화 하기 간편하고 $0 \leq m \leq 1$ 까지 적분이 가능하고 $n=5$ 인 경우 평균 10⁻⁸% 정도의 오차를 갖는다.

Chebyshev 접근법은 다음과 같이 제 1종과 제 2종 타원적분이 다음과 같이 표시된다.

$$K\left(m, \frac{\pi}{2}\right) = \ln 4 + \sum_{i=1}^n a_i (1+m^2)^i + \ln\left(\frac{1}{1-m^2}\right) \left[\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^n b_i (1-m^2)^i \right] \quad (36)$$

$$E\left(m, \frac{\pi}{2}\right) = 1 + \sum_{i=1}^n c_i (1-m^2)^i + \ln\left(\frac{1}{1-m^2}\right) \left[\sum_{i=1}^n d_i (1-m^2)^i \right] \quad (37)$$

여기서 n 은 계수 a_i, b_i, c_i, d_i 의 갯수를 의미하면 본 논문에서는 $n=5$ 를 선택하였다.

$m=1$ 인 경우 $K\left(m, \frac{\pi}{2}\right)$ 는 $\ln \frac{1}{1-m^2}$ 에서 Singular가 발생하는 데 이항을 포함한 적분은 Stroud와 Secrest⁽¹⁷⁾의 특수 수치적분으로 다음과 같이 행한다.

$$\int_0^1 f(\eta) \ln\left(\frac{1}{\eta}\right) d\eta \approx \sum_{i=1}^G f(\eta_i) W_i^* \quad (38)$$

여기서는 0-1 범위의 적분 구간을 갖는 변수이고 W_i^* 는 가중 함수이다.

2.6 Singular 항의 적분

P 점과 Q 점이 일치할 경우 변위와 표면력 Kernel 들에 Singular가 발생하는데 변위 Kernel 적분에는 단지 $\ln \frac{1}{r(P,Q)}$ 만이 나타나 식(38)로 처리하면 되나 표면력 Kernel 적분시 $\frac{1}{r(P,Q)}$ 항이 나타나 직접 수치적분이 어려우며 이항의 적분 결과는 $C_{rr}, C_{rz}, C_{zr}, C_{zz}$ 항을 포함한 식(34)의 $[A]$ 행렬의 대각선 항이 된다.

대각선 항을 계산하는 기본적인 개념은 2차원과 3차원 문제에서 사용했던 강제 변위 개념인데 축대칭 경우에는 단지 축방향만이 적용될 수 있고 반경 방향 경계는 축대칭 문제에서만 적용 가능한 정수 압응력, 평면변형, 평면응력 경계조건을 적용하면 된다.

이 방법은 수학적 절차에 의해 구하는 Cruse 방법⁽⁹⁾보다 용이하다. $[A]$ 행렬의 축방향 성분의 대각선 항은 강제 변위 개념으로 부터 다음과 같이 구해진다.

$$[A_{rz}]_{ii} = -\sum_{j=1}^M [A_{rz}]_{ij} : 1, 2, \dots, M \quad (39)$$

여기서 M 는 총 절점수이고 우측항은 기지성분이다. $[A]$ 행렬의 반경 방향 성분의 대각선항은 다음과 같이 기지항으로 표시된다.

$$\begin{bmatrix} A_{rr} & 0 \\ A_{zr} & 0 \end{bmatrix}_{ii} \begin{Bmatrix} U_r \\ 0 \end{Bmatrix}_i = \sum_{j=1}^n \begin{bmatrix} B_{rr} & B_{rz} \\ B_{zr} & B_{zz} \end{bmatrix}_{ij} \begin{Bmatrix} t_r \\ t_z \end{Bmatrix}_j - \sum_{j=1}^M \begin{bmatrix} A_{rr} & A_{rz} \\ A_{zr} & A_{zz} \end{bmatrix}_{ij} \begin{Bmatrix} U_r \\ U_z \end{Bmatrix}_j - \begin{bmatrix} 0 & A_{rz} \\ 0 & A_{zz} \end{bmatrix}_{ii} \begin{Bmatrix} 0 \\ U_z \end{Bmatrix}_i \quad (40)$$

이 때 반경방향과 축방향 변위와 표면력은 다음과 같은 경계조건으로부터 구해진다.

경계가 정수압 응력 상태일 때는 $t_r=n_r, t_z=n_z, U_r=U_z=\left(\frac{1-\nu}{E}\right)r$ 가 되고 평면 변형 상태일 때는 $t_r=n_r, t_r=2\nu n_z, U_r=-\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E}r, U_z=0$ 가 되며 평면 응력 상태일 때는 $t_r=n_r, t_z=0, U_r=\left(\frac{1-\nu}{E}\right)r, U_z=\left(\frac{-2\nu}{E}\right)r$ 가 된다.

3. 수치해석 예제

앞서 정식화한 축대칭 경계적분법의 실제 축대칭 구조물에 대한 적용하는 방법을 설명하고, 해의 정확도를 입증키 위해 내압이 작용하는 中空球, Rim 하중을 받는 일정 두께 디스크, V-노치를 갖는 피로시편 등을 해석하였다.

3.1 중공내압구

내압 $P_i=10$ psi 를 받는 Fig. 4 와 같은 두터운 중공구를 해석하였다. 이 문제의 엄밀해는 Timoshenko 와 Goodier⁽²²⁾에 의해 다음과 같이 주어졌다.

$$U_r = \frac{r}{E} [\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)] \quad (41)$$

$$\sigma_r = \frac{P_i R_i^3}{r^3} \left(\frac{R_o^2 - r^2}{R_i^3 - R_o^3} \right) \quad (42)$$

$$\sigma_\theta = \sigma_z = \frac{P_i R_i^3}{r^3} \left(\frac{2r^3 + R_i^3}{R_o^3 - R_i^3} \right) \quad (43)$$

곡선 경계를 가지므로 2 차 요소를 사용하였으며 경계 정점수는 26 개, 경계요소 수는 12 개이고 내부절점 수는 5 개이다. 경계조건은 절점 7 과 20 번이 반경방향으로 대칭이므로 z 방향 변위를 영으로 구속하였다. 사용된 재료의 기계적 특성은 $\mu=8120$ psi, $\nu=0.3$ 이다.

BIE 에 의한 해석 결과를 비교한 것이 Table 1 과 Fig. 5 와 같다. 작은 경위 요소수에도 불구하고 엄밀해 평균 0.8% 정도로 거의 정확히 일치함을 알 수 있다.

3.2 일정 두께 디스크

1" 의 일정 두께와 내반경 2" 의 반경 10" 의 Fig. 6 과

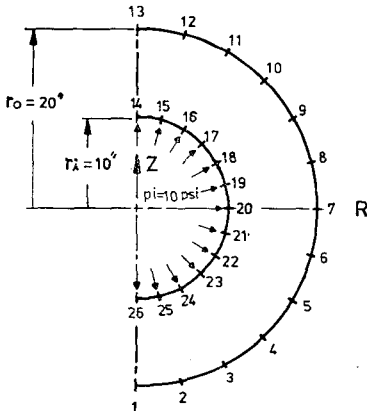


Fig. 4* BIE mesh for hollow sphere problem

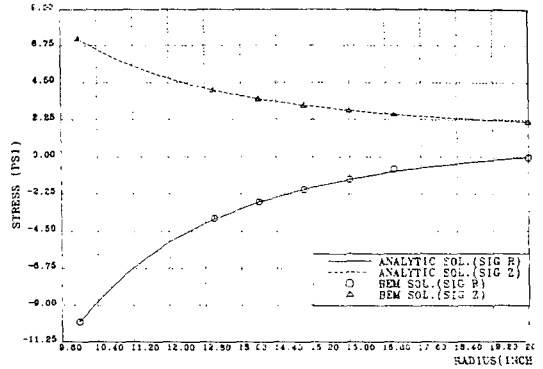


Fig. 5 Stress distribution in hollow sphere subjected to internal pressure

Table 1 Stress analysis results of hollow sphere

Radius (in)	Radial stress(psi)			Axial stress(psi)		
	Analytic Sol.	BIE	Error (%)	Analytic Sol.	BIE	Error (%)
13	-3.7733	-3.7138	1.6	4.0295	4.0066	0.6
14	-2.7364	-2.7150	0.8	3.5110	3.4888	0.6
15	-1.9577	-1.9602	0.1	3.1217	3.1001	0.7
16	-1.3616	-1.3630	0.1	2.8237	2.8102	0.5
17	-0.8976	-0.8612	4.1	2.5917	2.5834	0.3

같은 디스크에 Rim 하중 $\sigma_0=300$ psi 를 분포시킨 경우를 해석하였다.

이 문제의 엄밀해는 Timoshenko & Gooder⁽²²⁾를 참고하였다.

사용된 자료 특성은 $\mu=8120$ psi, $\nu=0.3$ 이다.

이 경우는 Corner 점이 존재할 때 해의 정확성을 비교하기 위한 것으로 해석 결과는 Fig. 7 과 같다. 여기에 비교된 FEM 해는 Wilson⁽¹⁾의 프로그램을 이용한 것으로 축대칭 사면형 2 차 요소이며, 절점수는 95 개, 요소수는 72 개였다.

BIE 해로 사용된 요소는 2 차 요소이며 경계절점수 4 개, 내부 절점수 18 개이고 경계요소수는 24 개이다.

해석 결과 BIE 은 엄밀해에 0.7%로 잘 접근함을 알 수 있었다.

3.3 V-노치를 갖는 피로시편

Fig. 8 과 Fig. 9 와 같이 내실 원통막대 주위에 V-노치를 갖는 인장피로 시편으로 축방향 인장하중에 의한 응력집중이 검토되었다.

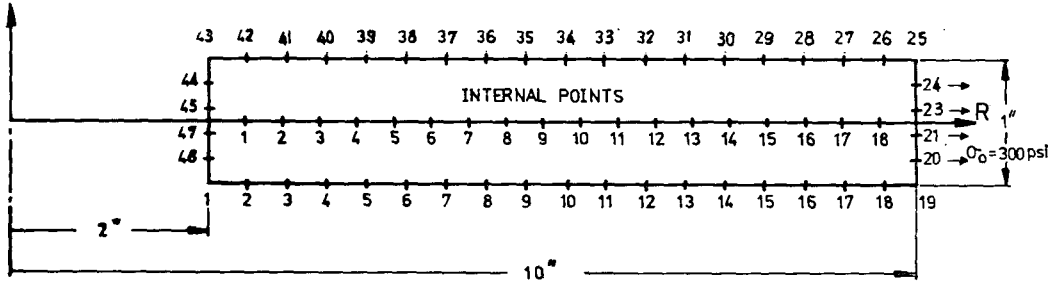


Fig. 6 BIE mesh for constant thickness disk problem

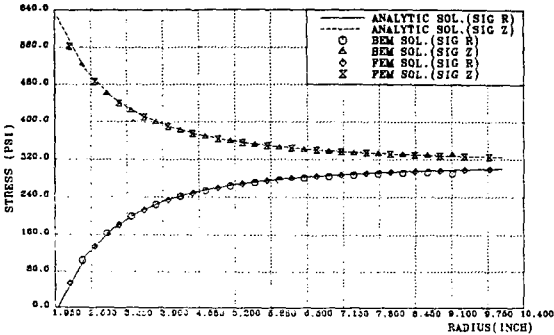


Fig. 7 Stress distribution in constant thickness disk subjected to outer rim load

기하학적 모양은 시편 중앙외부에 60°의 V-노치를 하고 노치 끝에 $r=0.090''$ 를 주었으며 내실 원통직경은 0.48''이다.

재료 특성은 $\mu=8120$ psi, $\nu=0.3$ 이다.

노치 끝에서 이론적인 응력계수는 다음과 같이 정의된다. (ASTM 피로시편 Manual 참조)

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_n} \tag{44}$$

$$S_n = \frac{F_0}{\text{notch area}} \tag{45}$$

시편 양끝에 300 psi의 인장력을 가할 때 노치 목에서 공칭응력은 768 psi으로 이 때 이론적 응력 응력집중 계수는 1.6이다.

BIE 해석은 3차 요소를 사용한 경우 요소수 증가에 따른 해의 수렴성을 해석한 결과가 Table 2와 Fig. 10과 같다.

해석 결과 55개 요소 사용시 응력집중 계수가 1.79,

67개의 경우 1.65 72개의 경우 1.60로 요소 증가시 해의 수렴성이 입증되었다.

다음은 72개 요소를 사용하고 선형, 2차 및 3차 요소 해를 비교한 것으로 Fig. 11과 같으며, 선형 요소 경우 응력 집중이 1.6121, 2차 요소 경우 1.6055이고, 3차 요소 경우 1.6001으로 요소 차수를 증가시킬수록 해의 정확성을 보였다. Chebyshev 타원적분 접근법과 지수급수 확장형 타원적분법을 72개의 3차 요소 경우를 비교하였는데 Chebyshev는 1.6001 지수급수확장형 1.6005로 Chebyshev 법이 정확하였으나, 계산시간은 Chebyshev 경우가 34.101초이고 지수급수확장형은 29.142초로 다소 오래 걸렸다.

Table 2 Stress concentration factor of the V-notched bar

Analysis method	Stress concentration factor	
Theoretical	1.6	
BIE	55 Elements	1.79
	67 Elements	1.65
	72 Elements	1.60
BIE (72 EL.) Shape fn.	Linear	1.6121
	Quadratic	1.6055
	Cubic	1.6001
BIE (72 EL.) Elliptic integ	Chebyshev	1.6001
	Power Series	1.6005

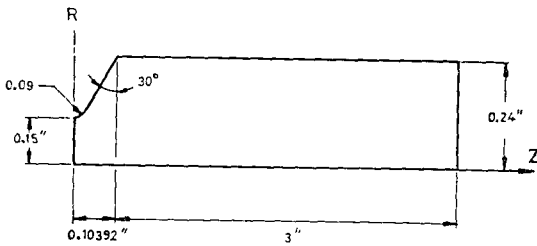


Fig. 8 V-Notched fatigue testpieces (ASTM Manual on fatigue)

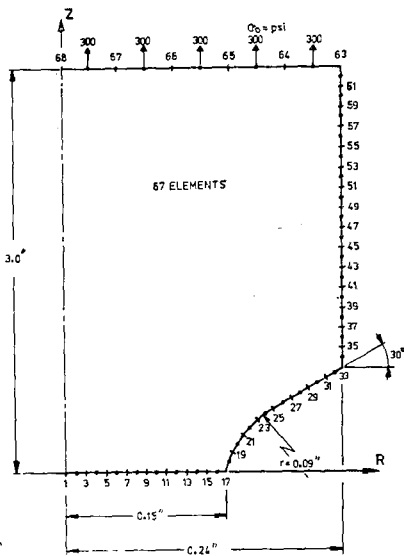


Fig. 9 BIE mesh for V-notched bar problem

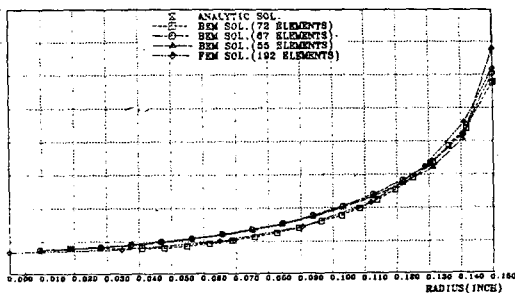


Fig. 10 Convergence effect due to increasing NO. of elements in V-notched bar

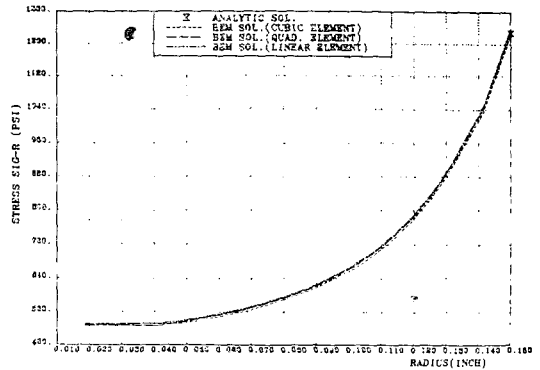


Fig. 11 Stress distribution in V-notched bar (Effect of shape function)

4. 결 론

축대칭 선형탄성문제를 수치적으로 해석하기 위한 경계적분 방정식(BIE)이 정식화되었다.

적분방정식의 변위 및 표면력 Kernel 들을 구하기 위한 방법으로 Hankel 변환법을 이용한 직접 축대칭 방법과 Kelvin의 3차원 기본해를 원주 경로를 따라 적분하는 3차원 접근방법이 비교되었고 두 방법에 의해 구해진 Kernel 들은 동일하였다.

수치계산의 정확도를 높이기 위해 동매개 2차 요소와 3차 요소를 사용했고 타원적분 방법은 비교적 간단하면서도 높은 정확도(평균 10⁻⁸% 오차)를 갖는 Chebyshev 방법이 지수급수확장 접근방법 대신 사용되었다.

경계적분 방정식을 정식화 할 때 나타나는 Singular 적분으로 계수 C_{ij}를 포함한 매트릭스[A]의 대각선항의 계산은 수학적 절차없이 정확히 구할 수 있는 Implicit 방법이 적용되었다.

전형적 축대칭 탄성 문제인 中空內壓球, Rim 하중을 받는 일정 두께 디스크 등이 BIE에 의해 해석되었고, 해석적해 및 유한요소법과 비교되었으며, 0.8% 정도의 높은 해의 정확도가 확인되었다. 또한 V-노치피로 시험 응력집중 계수를 구하여 이론치와 비교하였고 요소수 증가와 고차 요소에 따른 해의 수렴성이 입증되었으며 Chebyshev 타원적분 방법이 지수급수 확장 접근방법보다 정확함이 입증되었다.

References

- (1) Wilson E.L., "Structural Analysis of Axisymmetr-

- ic Solids", AIAA J., Vol. 3, pp. 2269~2274, 1965
- (2) Rizzo F.J., "An Integral Equation Approach to Boundary Value Problems of Classical Elastostatics", Q. Appl. Maths. Vol. 25, pp. 83~95, 1967
- (3) Cruse T.A., "Numerical Solutions in Three-Dimensional Elastostatics", Int. J. Solids Structures, Vol. 5, pp. 1259~1274, 1969
- (4) Riccardella P.C., "An Implementation of the Boundary-Integral Technique for Planar Problems in elasticity and Elasto-Plasticity", Ph. D. Thesis, Carnegie-Mellon University, 1973
- (5) Cruse T.A., "An Improved Boundary-Integral Equation Method for Three-Dimensional Elastic Stress Analysis", Comp. and Struct, Vol. 4, pp. 741~754, 1974
- (6) Lachat T. C. and Watson, I.O., "Progress in the use of Boundary Integral Equations Illustrated by Examples", Comp. Meths Appl. Mech. Engng., Vol. 10, pp. 273~289, 1977
- (7) Kermandis T., "A Numerical Solution for Axially Symmetrical Elasticity Problems", Int. J. Solids Structures, Vol. 11, pp. 493~500, 1975
- (8) Mayr M., "The Numerical Solution of Axisymmetric Elasticity Problems using an Integral Equation Approach", Mech Res. Comm., Vol. 3, pp. 393~398, 1976
- (9) Cruse T.A., Snow. D.W., and Wilson R.B., "Numerical Solutions in Axisymmetric Elasticity", Comp. and Struct., Vol. 7, pp. 445~451, 1977
- (10) Mayr M., Drexler W., and Kuhn, G., "A Semi-analytical Boundary Integral Approach for Axisymmetric Elastic Bodies with Arbitrary Boundary Conditions", Int. J. Solids Structures, Vol. 16, 863~871, 1980
- (11) Cathie D.N. and Banerjee. P.K., "Numerical Solutions in Axisymmetric Elastoplasticity by the Boundary Element Method", Proc. 2nd Int. Symp. on Innovative Numerical Analysis in Applied Engineering Sciences, pp. 331~339, 1979 1980 (University Press of Virginia)
- (12) Bakr A.A. and Fenner. R.T., "Use of the Hankel Transform in Boundary Integral Methods for Axisymmetric Problems", Int. J. Numer Methods Engng., Vol. 19, pp. 1765~1769, 1983
- (13) Bakr A.A. and Fenner. R.T., "Boundary Integral Equation analysis of Axisymmetric Thermoelastic Problems", J. Strain Analysis Vol. 18, pp. 239~251, 1983
- (14) Abdul-Mihsein M.J., Bakr A.A. and Parker A. P., "Stress in Axisymmetric Rotating Bodies Determined by the Boundary Integral Equation Method", J. Strain Analysis, Vol. 20, pp. 79~86, 1985
- (15) Abdul-Vessels and Piping Using the Boundary Integral Equation Method, Eng. Comput., Vol. 2, 1985
- (16) Bathé K.J. & Wilson E.W. "Numerical Method in Finite Element Analysis", Prentice-Hall, New Jersey, 1976
- (17) Brebbia C.A. "The Boundary Element Method for Engineer", Halsted Press. New York, 1978
- (18) FUNG Y.C., "Foundations of Solid Mechanics", Prentice-Hall, New Jersey, 1965
- (19) 田中正隆, 田中道彦, "境界要素解析の基礎", 培風館, 1984
- (20) Bakr A.A., "The Boundary Integral Equation Method in Axisymmetric Stress Analysis Problems", Springer-Verlag, Heidelberg, 1986
- (21) Cody W.J., "Chebyshev Approximations for the Complete Elliptic Integral K. and E.", Maths Comput., Vol. 19, pp. 105~112, 1965
- (22) Timoshenko S.P. and Goodier J.N., "Theory of Elasticity", McGraw-Hill New York, 1970

부 록

변위 Kernal 성분들은 다음과 같다.

$$U_{rr}(P, Q) = \frac{A}{R_P r_Q C} \left\{ [(3-4\nu)(R_P^2 + r_Q^2) + 4(1-\nu)(Z_P - Z_Q)^2] K\left(m, \frac{\pi}{2}\right) + \left[-C^2(3-4\nu) - \frac{(Z_P - Z_Q)^2 [R_P^2 + r_Q^2 + (Z_P - Z_Q)^2]}{D} \right] E\left(m, \frac{\pi}{2}\right) \right\} \quad (A.1)$$

$$U_{rz}(P, Q) = \frac{A(Z_P - Z_Q)}{R_P C} \left[K\left(m, \frac{\pi}{2}\right) - \frac{r_Q^2 - R_P^2 + (Z_P - Z_Q)^2}{D} E\left(m, \frac{\pi}{2}\right) \right] \quad (A.2)$$

$$U_{zr}(P, Q) = \frac{A(Z_P - Z_Q)}{r_Q C} - K\left(m, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$+ \frac{R_p^2 - r_0^2 + (Z_p - Z_0)^2}{D} E\left(m, \frac{\pi}{2}\right) \quad (A. 3)$$

$$U_{zz}(P, Q) = \frac{2A}{C} \left[(3-\nu)K\left(m, \frac{\pi}{2}\right) + \frac{(Z_p - Z_0)^2}{D} E\left(m, \frac{\pi}{2}\right) \right] \quad (A. 4)$$

표면력 Kernel 성분들은 다음과 같다.

$$T_{rr} = 2\mu(T_1 n_r + T_2 n_z) \quad (A. 5)$$

$$T_{rz} = 2\mu(T_3 n_r + T_4 n_z) \quad (A. 6)$$

$$T_{zr} = 2\mu(T_5 n_r + T_6 n_z) \quad (A. 7)$$

$$T_{zz} = 2\mu(T_7 n_r + T_8 n_z) \quad (A. 8)$$

여기서

$$T_1 = \frac{A}{R_p r_0^2 C} \left\{ \left[2\nu M - \frac{3}{2} N + \frac{1}{2} \frac{BF}{DC^2} (Z_p - Z_0)^2 \right] K + \left[\frac{-2\nu}{D} (R_p^2 S + (Z_p - Z_0)^2 V + r_0^4) + \frac{2}{D} (R_p^2 F + (Z_p - Z_0)^2 M) - \frac{2B^2 F}{D^2 C^2} (Z_p - Z_0)^2 \right] E \right\} \quad (A. 9)$$

$$T_2 = \frac{A(Z_p - Z_0)}{R_p r_0 BD} \left\{ \left[D(2\nu - 3) + \frac{B}{C^2} (Z_p - Z_0)^2 \right] K + \left[3(Z_p - Z_0)^2 - (2\nu - 3)B - \frac{4B}{DC^2} (Z_p - Z_0)^2 \right] E \right\} \quad (A. 10)$$

$$T_3 = \frac{A}{R_p CD} \left\{ \left[D(2\nu - 1) + \frac{H}{C^2} (Z_p - Z_0)^2 \right] K + \left[-(Z_p - Z_0)^2 + (1 - 2\nu)H + \frac{8FR_p^2(Z_p - Z_0)^2}{DC^2} \right] E \right\} \quad (A. 11)$$

$$T_4 = T_2 \quad (A. 12)$$

$$T_5 = \frac{A(Z_p - Z_0)}{CD} \left\{ \left[\frac{D}{r_0^2} + \frac{2(Z_p - Z_0)}{C^2} \right] K + \left[4(1 + \nu) - \frac{B}{r^2} - \frac{8B}{DC^2} (Z_p - Z_0)^2 \right] E \right\} \quad (A. 13)$$

$$T_6 = \frac{A}{r_0 CD} \left\{ \left[D(2\nu - 1) - \frac{F}{C^2} (Z_p - Z_0)^2 \right] K + \left[-3(Z_p - Z_0)^2 + (1 - 2\nu)F + \right. \right.$$

$$\left. \frac{4BF}{DC^2} (Z_p - Z_0)^2 \right] E \left. \right\} \quad (A. 14)$$

$$T_7 = \frac{2A(Z_p - Z_0)}{DC} \left\{ \frac{-(Z_p - Z_0)^2}{C^2} K + \left[1 - 2\nu + \frac{4B}{DC^2} (Z_p - Z_0)^2 \right] E \right\} \quad (A. 15)$$

$$T_8 = T_6 \quad (A. 16)$$

대칭축상인 $R_p = 0$ 인 경우는 다음과 같다.

$$U_{rr}(P, Q) = U_{zz}(P, Q) = T_{rr}(P, Q) = T_{rz}(P, Q) = 0 \quad (A. 17)$$

$$U_{rz}(P, Q) = -\frac{\pi A r_0 (Z_p - Z_0)}{C^3} \quad (A. 18)$$

$$U_{zz}(P, Q) = \frac{\pi A}{C} \left[(3 - 4\nu) + \frac{1}{C^2} (Z_p - Z_0)^2 \right] \quad (A. 19)$$

$$T_{rz}(P, Q) = 2\mu \left\{ \frac{\pi A (Z_p - Z_0)}{C^3} \left[2(1 + \nu) - \frac{3}{C^2} (Z_p - Z_0)^2 \right] n_r - \frac{\pi A r_0}{C^3} \left[(1 - 2\nu) + \frac{3}{C^2} (Z_p - Z_0)^2 \right] n_z \right\} \quad (A. 20)$$

$$T_{zz}(P, Q) = 2\mu \left\{ \frac{\pi A (Z_p - Z_0)}{C^3} \left[(1 - 2\nu) + \frac{3}{C^2} (Z_p - Z_0)^2 \right] n_z - \frac{\pi A r_0}{C^3} \left[(1 - 2\nu) + \frac{3}{C^2} (Z_p - Z_0)^2 \right] n_r \right\} \quad (A. 21)$$

여기서

$$A = \frac{1}{16\pi^2 \mu (1 - \nu)}, \quad B = R_p^2 + r_0^2 + (Z_p - Z_0)^2$$

$$C = [(R_p + R_0)^2 + (Z_p - Z_0)^2]^{\frac{1}{2}},$$

$$D = (R_p - r_0)^2 + (Z_p - Z_0)^2$$

$$F = R_p^2 - r_0^2 + (Z_p - Z_0)^2, \quad H = r_0^2 - R_p + (Z_p - Z_0)$$

$$M = 2R_p^2 + r_0^2 + 2(Z_p - Z_0)^2,$$

$$N = 2R_p^2 + 3(Z_p - Z_0)^2$$

$$S = 2R_p^2 - 3r_0^2 + 4(Z_p - Z_0)^2,$$

$$V = 3r_0^2 + 2(Z_p - Z_0)^2, \quad E = E\left(m, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$K = K\left(m, \frac{\pi}{2}\right)$$