976 大韓機械學會論文集 第10卷 第6號, pp. 975~981, 1986.

<技術論文>

地盤支持된 大形圓筒탱크의 應力解析

金 東 炫* · 車 洪 碩** · 尹 甲 英***

(1986年 6月 25日 接受)

Stress Analysis of Large Ground-Supported Cylindrical Storage Tanks

Dong-Hyun Kim, Hong-Seok Cha and Kab-Young Yoon

Key Words: Large Deflection Theory(大變形 理論), Membrane Force(膜力), Differential Settlement(沈下差), Critical Buckling Force(臨界挫屈力)

Abstracts

The Stress analysis based on the large deflection theory of plate for the large cylindrical storage tank is peformed by considering the change of membrane force for the various parameter, i.e., thickness ratio, tank height to diameter ratio, and stretched length.

The critical buckling force of cylindrical shell is obtained to investigate the safety of tank shell.

By numerical result, the thickness ratio is the important parameter for the membrane force, the height of tank is related linearly with the force, and the stretched length of bottom plate is little influenced.

Also, the critical buckling force of cylindrical shell is larger than the edge shear force at bottom-shell junction, and hence the consideration of the shell buckling is not required.

記 號 說 明

A_i : 셀 처짐함수의 i 번째항의 계수
D : 底板의 강성계수
D_s : 셀의 강성계수
h : 탱크의 높이
K : 셀 파라미터 (Shell parameter), $K^4=3(1-\nu^2)(R/t_s)^2$
k : 기초계수
L_K : 원통셀의 유효길이
M : Fourier 급수의 항수
N : 셀의 좌굴 모우드수
N_r, N_t : 底板의 반경 및 원주방향의 막력
P_s : 원통셀의 압력
Q_0 : 셀 하단부의 전단력
t, t_s : 底板 및 셀의 두께
w_c, w_e : 중심과 구석에서의 저판의 수직처짐
β : shell constant, $\beta^4=3(1-\nu^2)/(Rt_s)^2$
λ : 고유치
ν : Poisson's ratio
E : Young's modulus

* 正會員, 漢陽大學校 大學院 機械工學科
** 正會員, 漢陽大學校 大學院 機械設計學科
*** 正會員, 漢陽大學校 工科大學 機械設計學科

1. 서 론

지상에 설치되는 탱크의 수가 증가하고 대형화하는 추세에 따라 탱크바닥의 중심부 및 구석부 등 취약한 부분의 파괴로 인한 저장액의 유출사고 등이 수차에 걸쳐 보고된 바 있다. 따라서 이러한 사고를 미연에 방지할 수 있는 저장탱크의 안전한 설계가 요망된다.

특히, 탱크가 설치된 지면과 접촉하고 있는 底板(bottom plate)의 처짐곡선 및 중심과 구석부응력의 정확한 계산치가 설계시에 요구되고 있다.

일반적으로 판의 해석이론은 그 처짐이 판두께에 비해 작은경우에 제한되고 있으나 실제 대형탱크의 경우는 두께에 비해 처짐이 매우 크기 때문에 선형탄성이론(small deflection theory)에서 고려하지 않았던 판 중립면의 신장(stretching)을 포함시켜야 한다.

Timoshenko는 1915년 이러한 대변형이론(large deflection theory)[1]를 처음 제안 하였으며, 그뒤 Nadai, Federhofer, Henkcy[1]등은 Timoshenko의 식을 기초로 여러가지의 지지 및 하중조건에 대한 근사해를 제시하였다. 또한, 1934년 S. Way[2]는 경계부분을 고정시킨 판에 균일분포하중이 작용할 때 좀더 정확한 해를 구하였다.

그러나, S. Way는 처짐이 두께의 2배정도로 제한하여 수치적인 여러 경우를 취급 하였으므로 처짐이 두께의 수배에 달할 경우에는 다른 결과가 예상되며 굽힘응력보다는 중립면의 신장에 의한 막력(membrane force)이 증가 하리라는 것을 시사하였다.

따라서, 1973년 K. Hayashi, H. Kraus[3]는 대형저장탱크의 저판의 처짐이 두께에 비하여 상당히 큰 경우에 설치지반의 효과를 고려한 판의 막력을 Boussinesq 효과[4]로 인한 경우와 중심침하(center settlement)를 변화시켰을 때의 경우를 비교검토 하였고, 셸의 임계좌굴력을 구하여 구석부의 허용강도 및 막력의 수평성분과 비교하였다.

본 연구에서는 판의 대변형이론을 도입하여 탱크저판의 두께, 탱크의 높이, 돌출부의 길이 등의 기하학적변수와 중심과 구석의 침하차를 무차원하여 이것들의 영향으로 인한 처짐곡선과 반경 및 원주방향의 막력의 변화를 규명해보고자 한다. 또한, 좌굴에 관한 8계미분방정식[5]을 도입하여 셸 하단부의 전단력으로 인한 원통셸의 임계좌굴력을 구하여 원통 셸의 안전성을 검토하고자 한다.

2. 이론해석

2.1 저판-셸의 접합부 해석

Fig. 1과 같이 탄성기초위에 지지되어 있는 탱크의 저판에 대하여 설치지반의 효과를 고려하여 대변형이론에 의한 힘의 평형과 적합변형에 관한 식은 다음과 같이 표시된다.

$$N_r+N_t+r\frac{dN_r}{dr}=0 \tag{1}$$

$$D\left(\frac{d^3w}{dr^3}+\frac{1}{r}\frac{d^2w}{dr^2}-\frac{1}{r^2}\frac{dw}{dr}\right)=N_r\frac{dw}{dr}+\frac{qr}{2}-\frac{k}{r}\int_0^r wrdr \tag{2}$$

$$r\frac{d}{dr}(N_r+N_t)+\frac{tE}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2=0 \tag{3}$$

또한, 탱크설치장소의 부등침하(differential settlement)에 의한 중심과 구석에서의 침하량을 각각 w_c, w_e라하고, 저판에 가해지는 액압을 q라하면 식(2)의 우변의 기초계수(k)는 다음과 같이 정의한다.

$$k=\frac{q}{w_c} \tag{4}$$

위의 식(1), (2), (3)의 비선형미분방정식을

$$\xi=\frac{r}{t},\quad S_r=\frac{N_r}{tE},\quad S_t=\frac{N_t}{tE},\quad P=\frac{q}{E},$$

$$\mu=\frac{kt}{E}$$

과 같이 무차원변수를 도입하여 정리하면,

$$\frac{d}{d\xi}(\xi S_r)-S_t=0 \tag{5}$$

$$\frac{1}{12(1-\nu^2)}\frac{d}{d\xi}\left[\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{dw}{dr}\right)\right]=S_r\frac{dw}{dr}+\frac{P\xi}{2}-\frac{\mu}{\xi}\int_0^\xi\frac{w}{t}\xi d\xi \tag{6}$$

$$\xi\frac{d}{d\xi}(S_r+S_t)+\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2=0 \tag{7}$$

로 된다.

식(5), (6), (7)의 해를 구하기 위하여 반경방향의 막력 S_r과 기울기 $\frac{dw}{dr}$를 각각 ξ에 관한 멱급수로서 가정하면 다음과 같다.

$$S_r=B_0+B_2\xi^2+B_4\xi^4+B_6\xi^6+\cdots \tag{8}$$

$$\frac{dw}{dr}=\sqrt{8}\,(C_1\xi+C_3\xi^3+C_5\xi^5+\cdots) \tag{9}$$

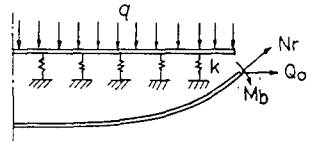

Fig. 1 Bottom plate analysis

단, $B_0, B_2, B_4\cdots, C_1, C_3, C_5, \cdots$등은 나중에 결정될 상수이다.

식 (8), (9)로부터 S_t, $\frac{d}{d\xi}\left(\frac{dw}{dr}\right)$, $\frac{w}{t}$ 등을 결정한다.

$$S_t = B_0 + 3B_2\xi^2 + 5B_4\xi^4 + 7B_6\xi^6 + \cdots \tag{10}$$

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{dw}{dr}\right) = \sqrt{8}\,(C_1 + 3C_3\xi^2 + 5C_5\xi^4 + 7C_7\xi^6 + \cdots) \tag{11}$$

$$\frac{w}{t} = \sqrt{8}\left(C_0 + C_1\frac{\xi^2}{2} + C_3\frac{\xi^4}{4} + C_5\frac{\xi^6}{6} + \cdots\right) \tag{12}$$

식 (8)~(12)을 비분방정식 (6), (7)에 대입하면 상수 B_k, C_k를 결정할 수 있다.

$$B_k = -\frac{4}{k(k+2)}\sum_{m=1,3,5\cdots}^{k-1} C_m C_{k-m}, \quad k=2,4,6,\cdots \tag{13}$$

$$C_k = \frac{12(1-\nu^2)}{k^2-1}\left[\sum_{m=0,2,4\cdots}^{k-3} B_m C_{k-2-m} - \frac{\mu}{(k-1)(k-3)} C_{k-4}\right], \quad k=5,7,9,\cdots \tag{14}$$

$$C_3 = \frac{3(1-\nu^2)}{2}\left[\frac{P}{2\sqrt{8}} + B_0C_1 - \frac{\mu}{2}C_0\right] \tag{15}$$

초기값으로서 C_0, B_0, C_1이 결정되면 모든상수 B_k, C_k는 식 (13), (14), (15)에 의하여 결정된다. 그리고, 식 (12)로부터 상수 C_0는

$$C_0 = \frac{w_c}{\sqrt{8}\,t} \tag{16}$$

로 표시되고, 식 (4)에서

$$\mu = \frac{p}{w_c/t} \tag{17}$$

로되어, 식 (16), (17)을 식 (15)에 대입하면

$$C_3 = \frac{3(1-\nu^2)}{12}(B_0C_1) \tag{18}$$

로 표시할 수 있다.

Fig. 2와 같이 탱크 구석부에서의 수직과 수평변위에 대한 경계조건을 적용하면,

$$\left(\frac{w_e}{t}\right)_{\text{given}} = \left(\frac{w}{t}\right)_{r=R} \tag{19}$$

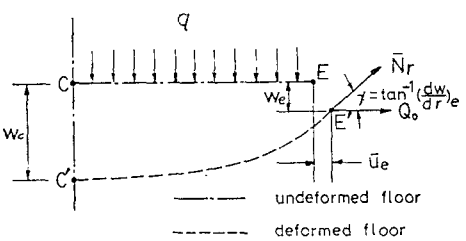

Fig. 2 Deformed tank floor

$$\bar{U}_e = U_s \tag{20}$$

식 (19)로 부터의 적합방정식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$f_1 = \sqrt{8}\left[C_0 + \frac{C_1}{2}\left(\frac{R}{t}\right)^2 + \frac{C_3}{4}\left(\frac{R}{t}\right)^4 + \frac{C_5}{6}\left(\frac{R}{t}\right)^6 + \cdots\right] - \left(\frac{w_e}{t}\right)_{\text{given}} \tag{21}$$

Fig. 2의 저판의 구석에서의 반경방향처짐 $\bar{U}_e$는

$$\bar{U}_e = (U)_{r=R} = R[(S_t)_{r=R} - \nu(S_r)_{r=R}] = R\left[(1-\nu)B_0 + (3-\nu)B_2\left(\frac{R}{t}\right)^2 + (5-\nu)B_4\left(\frac{R}{t}\right)^4 + \cdots\right] \tag{22}$$

이고, Fig. 3의 셀의 구석에서의 모우멘트 M_0와 전단력 Q_0에 의한 반경방향의 처짐 U_s는,

$$U_s = \frac{1}{2\beta^3 D_s}\left\{\beta M_0 - \bar{N}_r\cos\left[\tan^{-1}\left(\frac{dw}{dr}\right)_{r=R}\right]\right\} + \frac{PR^2}{t_s} \tag{23}$$

이므로, 식 (20)에 의한 적합방정식은 다음과 같다.

$$f_2 = \frac{1}{2\beta^3 D_s}\left\{\beta M_0 - \bar{N}_r\cos\left[\tan^{-1}\left(\frac{dw}{dr}\right)_{r=R}\right]\right\} + \frac{PR^2}{t_s} - R\left[(1-\nu)B_0 + (3-\nu)B_2\left(\frac{R}{t}\right)^2 + (5-\nu)B_4\left(\frac{R}{t}\right)^4 + \cdots\right] = 0 \tag{24}$$

이상과 같이 적합방정식 f_1, f_2을 정의하고, 식 (16)에서 C_0가 결정되면 B_0, C_1를 초기가정하여 식 (13), (14), (18)으로부터 모든 상수 B_k, C_k를 정한뒤, 비선형방정식에 관한 수치적인 방법을 사용하여 f_1, f_2의 적합방정식을 만족하는 미지상수 B_k, C_k를 구할 수 있다.

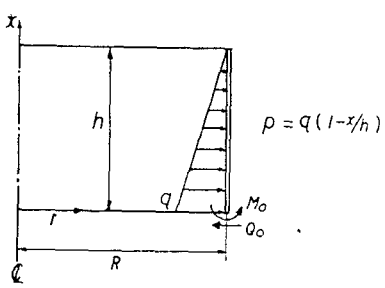

Fig. 3 Tank shell analysis

2.2 셸의 좌굴해석

구석에서 저판의 막력 $\bar{N}_r$에 의한 수평전단력 Q_0는 셸 하단부에 압축력으로 작용하여 액압에 의한 인장에 대하여 좌굴을 일으킨다. 원통셸의 좌굴에 관한 일반식은 다음과 같다[5].

$$D_s\nabla^8 w+\frac{Et_s}{R^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\nabla^4\left[N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{N_{xy}}{R}\right]+\nabla^4 P_s=0 \quad (25)$$

좌굴전의 막력 N_x, N_y, N_{xy}는 축대칭조건으로부터 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$N_x=N_y=0$$

$$N_y=\frac{Etw}{R}=\frac{Et}{R}\left[\frac{Q_0}{2\beta^3 D_s}\cos\beta x-\frac{PR^2}{t_s}\left(1-\frac{x}{h}\right)\right]=2R\beta e^{-\beta x}Q_0\cos\beta x-\gamma(h-x)R \quad (26)$$

$\frac{1}{R}\ll\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$라 가정하여, 식(26)을 식(25)에 대입하고 다음과 같은 무차원변수를 도입하여,

$$W=\frac{w}{R},\ \phi=\frac{y}{R},\ s=\frac{x}{R},\ \Gamma=\frac{\gamma hR}{Et_s},$$

$$C=\frac{Q_0}{Et_s},\ K^4=\frac{3(1-\nu^2)R^2}{t_s^2}$$

식(25)를 정리하면,

$$\nabla^8 W+4K^4\frac{\partial^4 W}{\partial s^4}+4K^4\nabla^4\left[2KCe^{-Ks}\cos Ks-\Gamma\left(1-\frac{sR}{h}\right)\right]\frac{\partial^2 W}{\partial\phi^2}=0 \quad (27)$$

로 된다.

전단력 Q_0에 의한 셸 하단부의 좌굴에 대한 유효길이를 L_K라 하면,

$$L_K=\frac{\pi}{2K} \quad (28)$$

이되고, 식(27)을 단순화 시키면,

$$\nabla^8 W+4K^4\frac{\partial^4 W}{\partial s^4}+4K^4\nabla^4\left[\left(S_0+S_1\cos\frac{\pi s}{L_K}\right)\frac{\partial^2 W}{\partial s^2}\right]=0 \quad (29)$$

단, $S_0=KC-\Gamma$, $S_1=2KC$

또한, 실제경우를 고려하여 경계조건을 단순지지로 가정할 수 있다.

$$\left.\begin{aligned}W(0,\phi)&=\frac{\partial^2 W}{\partial S^2}(0,\phi)=0\\ W(L_K,\phi)&=\frac{\partial^2 W}{\partial S^2}(L_K,\phi)=0\end{aligned}\right\} \quad (30)$$

식(30)의 경계조건을 만족하고 좌굴시 셸 하단에서 n모우드의 정현파형으로 변형을 표시하는 Fourier 급수로서 식(29)의 해를 가정하면 다음과 같다.

$$\therefore\ W=\cos n\phi\sum_{m=1}^{\infty}A_m\sin\frac{m\pi s}{L_K} \quad (31)$$

식(31)을 식(29)에 대입하여 계수들간의 관계식을 구해보면,

$$(\alpha_{1,n}-2S_0)A_1-S_1A_2+\sum_{m=2}^{\infty}\{-A_{m-1}S_1+A_m(\alpha_{m,n}-2S_0)-A_{m+1}S_1\}=0 \quad (32)$$

로 표시할 수 있다.

단, $\alpha_{m,n}=\dfrac{\left[n^2+\left(\frac{m\pi}{L_K}\right)^2\right]^4+4K^4\left(\frac{m\pi}{L_K}\right)^4}{2K^4n^2\left[n^2+\left(\frac{m\pi}{L_K}\right)^2\right]^2}$

식(32)를 특성방정식의 행렬형태로 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix}\frac{2K}{\alpha_{1,N}+2\Gamma}-\lambda & \frac{2K}{\alpha_{1,N}+2\Gamma} & & & \\ \frac{2K}{\alpha_{2,N}+2\Gamma} & \frac{2K}{\alpha_{2,N}+2\Gamma}-\lambda & \frac{2K}{\alpha_{2,N}+2\Gamma} & & \\ & \frac{2K}{\alpha_{i,N}+2\Gamma} & \frac{2K}{\alpha_{i,N}+2\Gamma}-\lambda & \frac{2K}{\alpha_{i,N}+2\Gamma} & \\ & & \frac{2K}{\alpha_{M-1,N}+2\Gamma} & \frac{2K}{\alpha_{M-1,N}+2\Gamma}-\lambda & \frac{2K}{\alpha_{M-1,N}+2\Gamma} \\ & & & \frac{2K}{\alpha_{M,N}+2\Gamma} & \frac{2K}{\alpha_{M,N}+2\Gamma}-\lambda\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}A_1\\A_2\\\vdots\\A_i\\\vdots\\A_{M-1}\\A_M\end{Bmatrix}=0 \quad (33)$$

단, $C=\frac{(Q_0)_{cr}}{Et_s}$, $\lambda=\frac{1}{C}$

$(Q_0)_{cr}$: 구석부의 전단력의 임계치

N : 셸 좌굴의 모우드수

M : Fourier 급수의 항수

식(33)은 $(\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{A}=0$의 형태인 비대칭고유치문제[6]이다. 따라서, 특성치문제에서 고유치 λ의 최대값을 찾는 문제로 귀착된다.

3. 수치해석결과 및 고찰

3.1 막 력

가장 위험한 상태를 고려하여 구석부가 강지지($w_e=0$)인 경우를 고찰하였다.

(1) 두께비(t_p/t_s)에 대하여

Fig. 4와 같이 구석에서의 반경방향막력(N_r)은 $t_p/t_s<0.6$에서는 급격히 감소하지만, $t_p/t_s>0.6$일때는 안정치를 갖는다. 또한, $t_p/t_s=0.7$을 경계로 w_c/D의

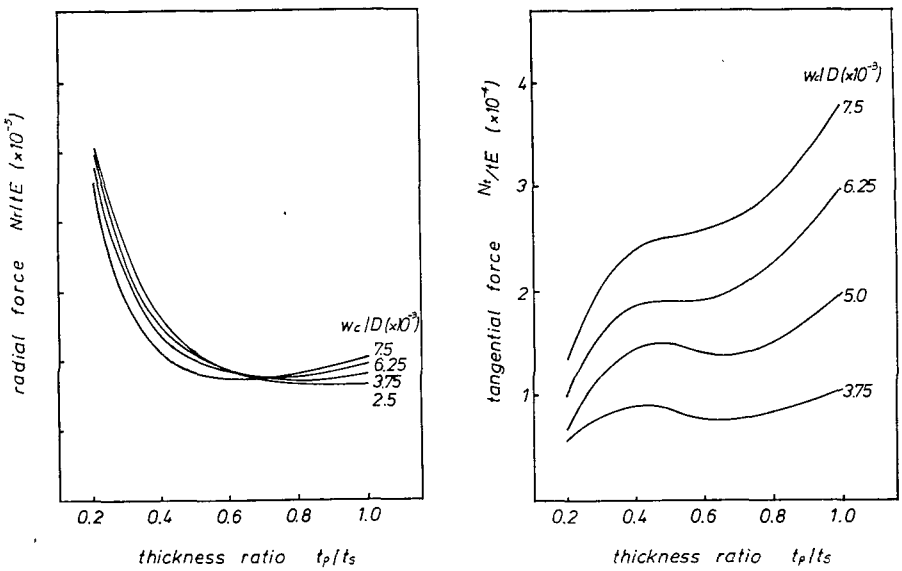

Fig. 4 Relation between force and thickness ratio

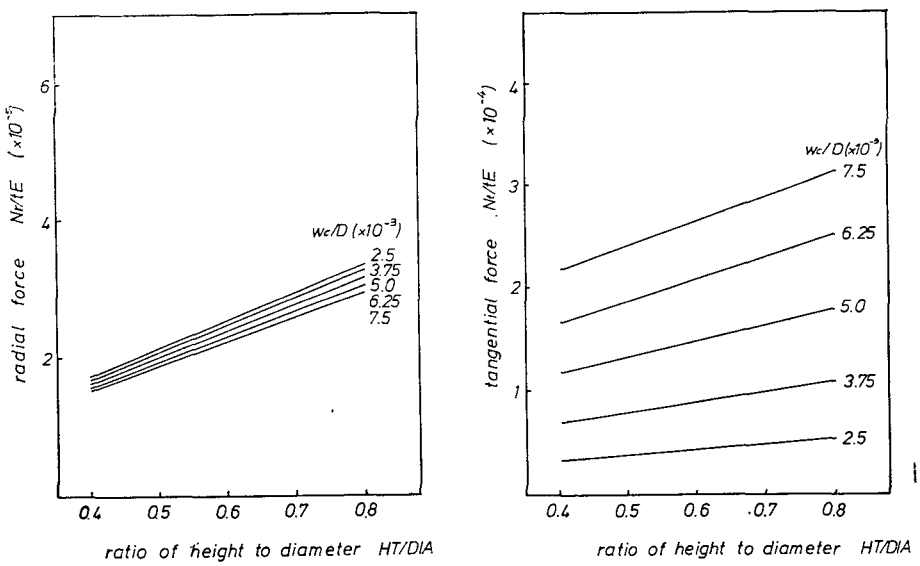

Fig. 5 Relation between tangential force and *HT/DIA* ratio

증가에 따른 N_r의 크기가 바뀌게 된다.

그러나, 원주방향막력(N_t)는 w_c/D가 적을 경우에는 t_p/t_s증가에 따라 변화율이 완만하나 w_c/D가 커지면 그 변화율이 증가한다. 따라서, 두께비(t_p/t_s)가 0.5~0.7 사이에서 탱크구석부의 최저막력을 가짐을 알 수 있다.

(2) 탱크높이/직경비(*HT/DIA*)에 대하여

Fig. 5와 같이 반경 및 원주방향막력은 *HT/DIA*와 선형적인 관계를 갖고 있으며, w_c/D가 커짐에 따라 반경방향막력(N_r)은 감소하지만, 원주방향막력(N_t)는 증가한다. 또한, w_c/D의 변화에 대한 막력의 변화율은 원주방향이 반경방향보다 큼을 알 수 있다.

(3) 돌출부길이(*BH*)에 대하여

구석부를 탄성지지($w_e/D=0.00025$)로 생각하여 막력과 돌출부길이와의 관계를 고찰하여본 결과, Fig. 6과 같이 반경 및 원주방향막력이 돌출부길이(*BH/D*)와 선형적인 관계는 갖고 있으나 그 영향이 아주 작음을 알 수 있다.

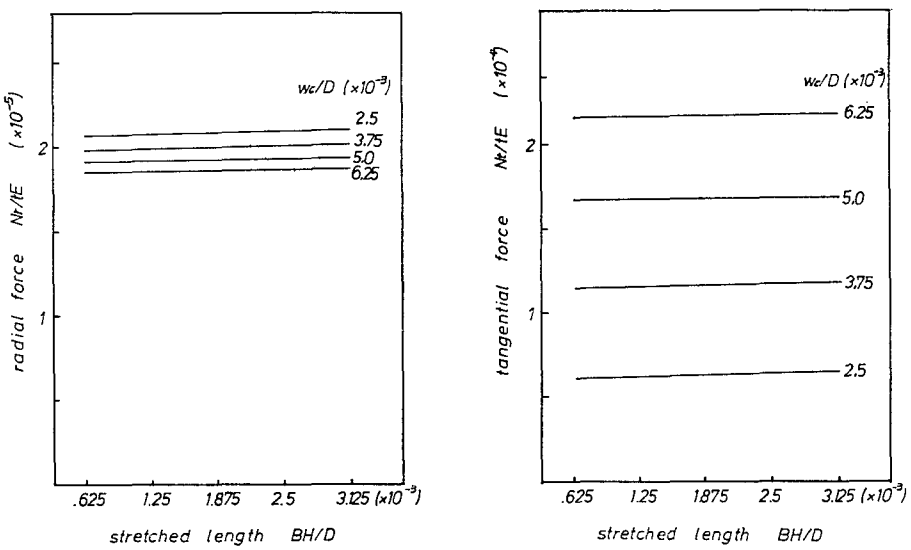

Fig. 6 Relation between radial force and stretched length

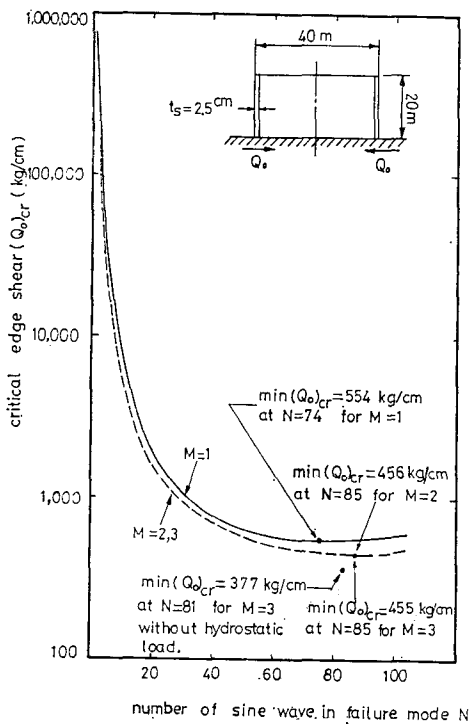

Fig. 7 Shell buckling of typical 40m dia. tank

3.2 셸의 임계좌굴력〔$(Q_0)_{cr}$〕

원통셸의 하단부, 즉 저판과의 접합부에서의 좌굴에 대한 안정성 검토를 위하여 Fig. 7의 상단과 같은 임의의 탱크의모델을 택하였다. 셸의 축방향의 처짐곡선을 표시하는 Fourier 급수의 항수(M)이 증가함에 따라 임계좌굴전단력($(Q_0)_{cr}$)은 감소하며, $M=3$이 되면 안정치를 갖는다.

또한, 원통의 원주방향의 좌굴변형모우드(N)가 증가함에 따라 임계치 $(Q_0)_{cr}$은 점차 감소하여 일정한 최소치를 갖고서 다시 증가하는 경향을 보인다. 수압(q)가 작용하지 않을경우에 $(Q_0)_{cr}$이 수압이 작용하는 경우보다 작으므로 액압에 의한 원주방향의 인장력의 좌굴저지의 효과를 알 수 있다.

4. 결 론

대형저장탱크에 대한 응력해석에 판의 대변형이론을 적용하여, 여러 기하학적변수의 무차원치에 대한 막력의 변화를 검토하고, 셸의 좌굴변형에 대한 안정성에 대해서 해석한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 탱크구석부에서 최소막력은 두께비가 대략 0.5~0.7 사이에 존재한다.

(2) 탱크의 높이와 막력은 서로 선형적인 관계를 갖고 있으며 돌출부 길이가 막력에 주는 영향은 작다.

(3) 모든 경우에 구석부의 수평전단력보다 임계좌굴전단력이 크므로 원통의 좌굴에 대해서 안전하다.

참 고 문 헌

(1) Timoshenko, S.P., "Theory of Plates and Shells", McGraw-Hill, Inc., pp. 396~428, 1957

(2) Way, S., "Bending of Circular Plates with Large Deflection", J. Applied Mechanics, Trans. ASME, Vol. 56, pp. 627~636, 1934

(3) Hayashi, K. & Kraus, H., "Analysis of Center to Edge Foundation Settlement of Atmospheric Storage Tanks", J. Eng. for Industry, Trans. ASME, Vol. 95, pp. 247~255, 1973

(4) Timoshenko, S.P.,& Goodier, J.N., "Theory of Elasticity"., McGraw-Hill, Inc., pp. 403~406, 1970

(5) Hoff, N.J., "Buckling of Thin Shells under Hoop Stress varying in Axial Direction", J. Applied Mechanics, Trans. ASME, Vol. 24, pp. 405~412, 1957

(6) Hildebrand, F.B., "Method of Applied Methematics", Prentice-Hall, Inc, pp. 69~75, 1954