

<論 文>

# 종동력을 받는 첨단질량을 갖는 외팔보의 안정성에 관한 실험적 연구

노 광 춘\* · 박 영 필\*\*

(1985년 8월 9일 접수)

## Experimental Study on the Stability of the Cantilever Beam with Tip Mass Subjected to a Follower Force

Kwang Choon Ro and Young Pil Park

**Key Words:** Follower Force (종동력), Stability(안정성), Cantilever(외팔보), Tip Mass (첨단질량), Magnetic Force(자기력), Critical Force(임계하중)

### Abstract

An experimental method to give a tangential follower force to a cantilever beam having a concentrated tip mass by the magnetic force of the electromagnet has been described. The dynamic behaviour of the beam under this nonconservative load has been analysed by experimentally as well as by theoretically. The theoretical and experimental results on the natural frequencies and the critical force of the systems are in good agreement with each other.

### 기 호 설 명

- $E$  : 영율
- $I$  : 관성 모우먼트
- $L$  : 보의 길이
- $M$  : 첨단질량
- $m$  : 보의 단위 길이당 질량
- $p$  : 종동력의 크기
- $t$  : 시간
- $u(x, t)$  : 보의 측방처짐
- $x$  : 공간좌표

$\omega$  : 하중을 받는 보의 고유치

### 1. 서 론

최근, 비보존력을 받는 탄성계의 안정성에 관한 많은 연구가 진행되었다<sup>(1-3)</sup>. 이 문제들의 이론적 연구들은 공학분야에 많은 흥미있는 현상들을 보여준다. 그러나 이상적인 비보존 탄성계를 구성하기 힘들고 이론적 결과와 비교할 만한 정량적 결과를 얻기 힘들기 때문에 실험적 연구는 적은 편이다.

Willems<sup>(4)</sup>는 Beck 문제에 적용하는 실험적 모델을 적절하게 작용된 보존력을 사용하여 상사하였으며, 그

\* 연세대학교 대학원

\*\* 정회원, 연세대학교 공과대학 기계공학과

는 보의 자유단에 적용되는 하중을 보의 변형전의 측상에 하중이 보의 처짐에 접선이 되게 선택 되어진 점을 통과 하도록 강선으로써 작용되게 하였다. Huang<sup>(5)</sup> 등은 Willems의 연구는 단지 Beck 문제의 임계하중에 접근된 임계하중을 갖도록 교묘하게 근사 되었을 뿐 이 두 임계하중은 서로 다르다는 것을 보였다. Anderson과 Done<sup>(6)</sup>은 보존계로 비보존계의 동적 거동을 상사시킬 수 있는 조건에 대해 연구 하였으며, Willems의 모델을 이론적, 실험적으로 재 연구하였다. Wood, Saw와 Saunder<sup>(7)</sup>는 접선중동력을 보의 자유단에 부착된 노즐로부터 방출되는 유체의 제트반력에 의해 만들었으며, Feldt<sup>(8)</sup> 등은 변형전의 측상에 위치한 노즐로부터 방출되는 충돌공기제트가 Reut 문제의 자유단면판에 작용하게 함으로써 비보존력을 만들었다. Sugiyama와 Sekiya<sup>(9)</sup>는 비보존력을 받는 탄성계의 불안정에 대한 실험적 연구들의 정리논문을 발표하였다.

위의 실험적 연구들에 있어서 비보존 중동력은 고체 유체의 상호작용에 의해서 또는 적절하게 작용된 보존력에 의해 얻어졌다. 그러나, 이 실험장치의 대부분은 너무 복잡하고 중동력의 크기를 제어하는 데 매우 어렵다.

본 연구에는 중동력을 받는 첨단질량을 갖는 외팔보의 동적 안정성을 연구하기 위해 접선 중동력을 전자석의 자기력에 의해 만들었으며, 이 비보존 중동력하에서 보의 고유진동수의 변화와 임계하중에 대해 이론과 실험을 비교하였다.

2. 이 론

본 연구의 수학적 모델은 Fig. 1과 같다. 이 모델에 대한 계의 지배방정식 및 경계조건은 다음과 같다.

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \bar{p} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \tag{1}$$

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 u(L, t)}{\partial x^2} = 0, \quad EI \frac{\partial^3 u(L, t)}{\partial x^3} = M \frac{\partial^2 u(L, t)}{\partial t^2}$$

다음과 같은 무차원 매개변수를 도입하면,  
 $\bar{x} = x/L, \quad \bar{t} = t/c, \quad \bar{M} = M/mL, \quad \bar{p} = pL^2/EI \tag{3}$

여기서  $c^2 = mL^4/EI$

식 (1)과 (2)는 다음과 같다.

$$u'''' + \bar{p}u'' + \ddot{u} = 0 \tag{4}$$

$$u(0, \bar{t}) = 0, \quad u'(0, \bar{t}) = 0$$

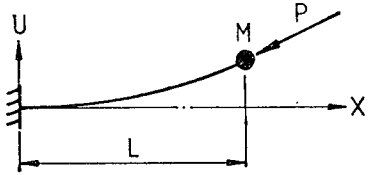


Fig. 1 Configuration of the cantilever beam with the tip mass

$$u''(1, \bar{t}) = 0, \quad u'''(1, \bar{t}) = \bar{M}\ddot{u}(1, \bar{t}) \tag{5}$$

여기서 ''''과 '''''는 각각  $\bar{x}$ 와  $\bar{t}$ 에 대한 편미분이다.

여기에 참고문헌<sup>(10)</sup>의 이론해석을 하면, 즉 수정미분연산자와 수정변수를 도입하고 Galerkin 방법을 사용하여 정리하면 다음의 고유치문제가 된다.

$$([G_{jk}] - \omega^2 [F_{jk}]) \{Q_k\} = \{0\} \tag{6}$$

여기서  $\{Q_k\}$ 는 중동력하의 보의 고유벡터이고,  $\omega$ 는 고유치이다. 그리고  $\omega$ 는 일반적으로 복소수이므로

$$\omega = \omega_R + i\omega_I \tag{7}$$

이다. 계의 안정성은  $\omega_I \geq 0$ 이면 안정,  $\omega_I < 0$ 이면 불안정이며, 이 경우  $\omega_R = 0$ 이면 발산형 불안정,  $\omega_R \neq 0$ 면 플러터형 불안정이다.

3. 실 험

3.1 실험장치

Fig. 2는 본 연구의 실험장치 개략도이다. 보에 작용되는 접선방향력을 얻기 위해 Fig. 3과 같은 전자석을 제작하였다. 전자석면의 형상은 보의 제 1진동형의 첨단의 궤적에 따라 가공하였다. 실험보와 첨단질량의 재질은 각각 알루미늄과 탄소강을 사용하였다. 실험보와 첨단질량의 사양은 Table 1과 같다.

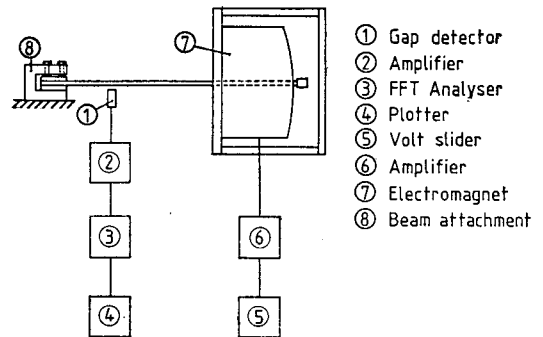


Fig. 2 Block diagram of the experimental setup

Table 1 Specification of the test beams

$\bar{M}$	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
Width (mm)	12.3	12.3	12.3	12.3	12.3
Thickness (mm)	1.21	1.21	0.99	1.21	1.21
Length (mm)	500	500	500	500	500
Weight of the beam (g)	20	20	16	20	20
Weight of the tip mass (g)	20	40	48	80	100

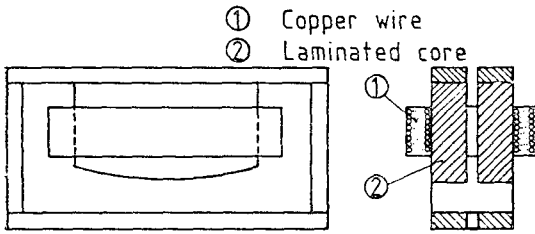


Fig. 3 Electromagnet

3.2 하중의 결정

Fig. 4는 첨단질량이 받는 하중을 결정하기 위한 장치이다. 전자석에서 첨단질량까지의 간격은 실험중 일정하게 유지하였다. 첨단질량이 받는 하중의 크기는 반대방향으로 정하중  $P$ 를 주고난 뒤, 전자석에 볼트 슬라이더(volt slider)로 자장을 걸어 첨단질량이 일정한 거리를 유지한채 전자석에 붙인다. 첨단질량이 떨어질 때까지 전자석의 자장의 세기를 감소시킨다. 이때의 볼트 슬라이더의 출력의 위치가 하중의 크기  $P$ 를 주는 위치이다. 정하중  $P$ 의 크기를 변화하여 반복실험하여 하중의 크기를 결정한다.

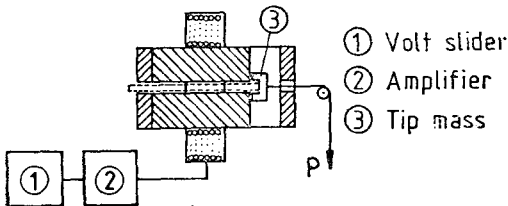


Fig. 4 Schematic diagram of the force calibration of the electromagnet

3.3 실험방법

실험보를 전자석의 면으로부터 미리 결정된 거리를 유지시킨 후, 적용하중의 크기를 고정하고, 보에 작은 교란을 주어 실험보의 진동주파수 특성을 FFT 해석기

로 해석하였다. 그 다음 적용하중의 크기를 서서히 증가시키고, 실험은 실험보가 불안정하게 될때까지 계속하였다. 여기서 계의 불안정은 작은 교란에 대해서도 보의 측정처짐이 급격히 커지는 것을 말한다. 이러한 현상은 Fig. 5에서 보여주며, (a)는 안정된 상태로써 교란후 보의 측방처짐이 서서히 감소하며, (b)는 불안정한 상태로써 교란후 보의 측방처짐이 급격히 커지는 것을 보여준다.

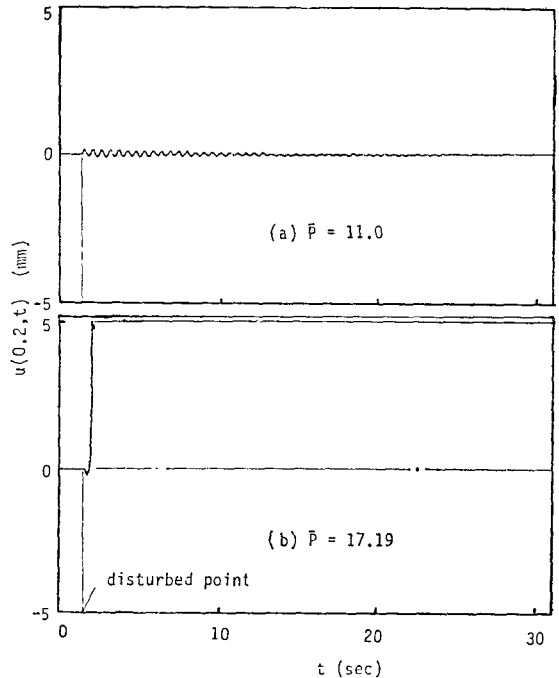


Fig. 5 Transverse deflection of the cantilever beam after the small disturbance- $\bar{M}=3.0$

4. 결과 및 검토

Figs. 6~8과 Table 2는 본 연구의 결과이다. Fig.

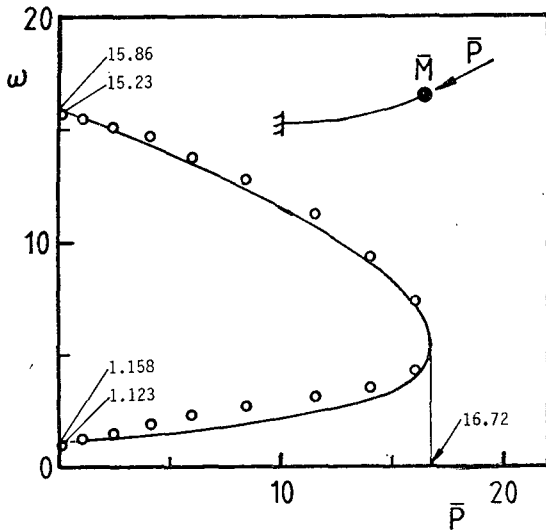


Fig. 6 Eigenvalue curve- $\bar{M}=2.0$

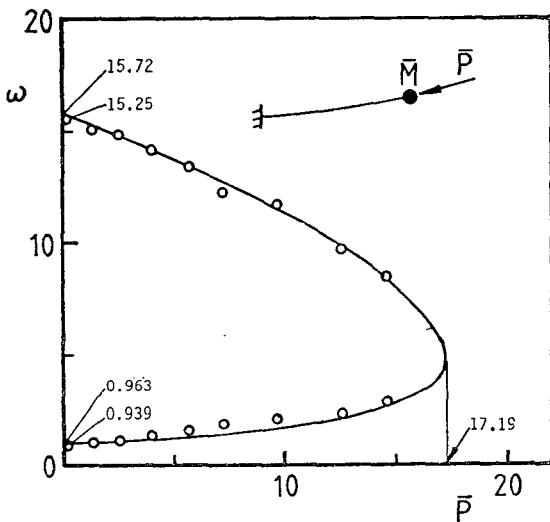


Fig. 7 Eigenvalue curve- $\bar{M}=3.0$

6과 7은 각각  $\bar{M}=2.0, 3.0$ 일 때의 고유치곡선이다. 이론결과와 실험결과에서 중동력  $\bar{p}$ 의 증가에 따라 첫 번째와 두 번째 고유치는 서로 접근하고 있으며 하중이 임계치에 도달하면 두 고유치는 만나게 된다. Fig. 8은 질량비  $\bar{M}$ 에 따른 임계하중 곡선이다.

이들 값을 수치로 표시하면 Table 2와 같다. Table 2에서 이론치와 실험치의 오차는 2.18% 이하로 나타나 있다.

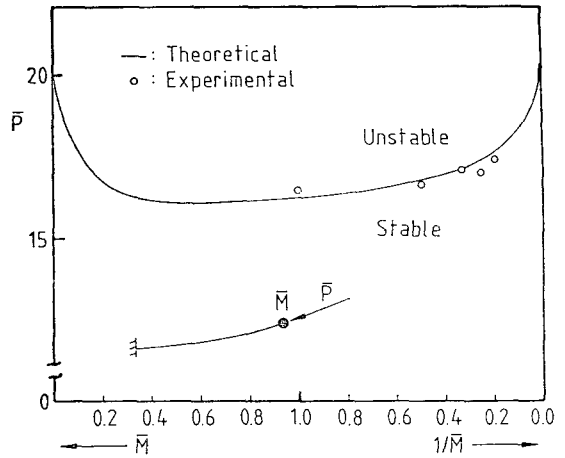


Fig. 8 Stability curve

Table 2 Experimental and theoretical results of the critical force

$\bar{M}$	Critical force (g)		
	Theoretical	Experimental	% Error
1.0	812.6	825	+1.16
2.0	837.4	830	-0.94
3.0	471.9	470	-0.40
4.0	869.0	850	-2.18
5.0	880.0	869	-1.25

위의 결과에서 이론치와 실험결과는 서로 잘 일치함을 알 수 있다.

### 5. 결 론

본 연구는 비보존 중동력을 받는 첨단질량이 있는 외판보의 안정성에 대해 전자식의 자기력을 이용하여 비보존 중동력을 가할 수 있는 실험장치를 완성하여 보의 고유진동수의 변화와 임계하중에 대해 실험하여 이론과 잘 일치함을 확인하였다. 또한 지금까지의 실험적 연구들에 비해 실험장치가 구조적으로 간단하며, 그 결과도 정량적으로 오차를 줄일 수 있었다. 그리고 이 분야에 대해 주기적인 중동력을 받는 계에 대한 연구를 하는데 있어서 다른 실험방법보다 쉽게 중동력의 크기를 제어할 수 있는 장점이 있다.

참 고 문 헌

- (1) Bolotin, V.V., *Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability*, Pergamon Press, New York, 1963
- (2) Herrmann, G., "Stability of Equilibrium of Elastic Systems Subjected to Nonconservative Forces", *Appl. Mech. Rev.*, Vol. 20, pp. 103~108, 1967
- (3) Leipholz, H., *Stability of Elastic System*, Sijthoff & Noordhoff, 1980
- (4) Willems, N., "Experimental Verification of the Dynamic Stability of a Tangentially Loaded Cantilever Column", *J. Appl. Mech.*, Vol. 33, pp. 460~461, 1966
- (5) Huang, N.C., Nachbar, W. and Nemat-Nasser, S., "On Willems' Experimental Verification of the Critical Load in Beck's Problem", *J. Appl. Mech.*, Vol. 34, pp. 243~245, 1967
- (6) Anderson, N.A. and Done, G.T.S., "On Partial Simulation of a Nonconservative System by a Conservative System", *Int. J. Solids Structures*, Vol. 7, pp. 183~191, 1971
- (7) Wood, W.G., Saw, S.S. and Saunder, P. M., "The Kinetic Stability of a Tangentially Loaded Strut", *Proc. Roy. Soc. Lond., A.* 313, pp. 239~248, 1969
- (8) Feldt, W.T., Nemat-Nasser, S., Parasad, S.N. and Herrman, G., "Instability of a Mechanical System Induced by an Impinging Fluid Jet", *J. Appl. Mech.*, Vol. 36, pp. 693~701, 1969
- (9) Sugiyama, Y. and Sekiya, T., "Surveys of the Experimental Studies on Instability of the Elastic System Subjected to Nonconservative Forces", *J. of the Japan Soc. for Aeronaut. and Space Scs.*, Vol. 19, pp. 19~26, 1971
- (10) 노광춘, 박영필, "비보존력을 받는 다수의 집중 질량을 갖는 외팔보의 안정성에 관한 연구", *대한기계학회논문집*, 제 10 권, 제 1 호, pp. 43~49, 1986