

<論 文>

# 계면균열 문제에 대한 $L$ 적분의 응용

박 재 학\* · 엄 윤 용\*

(1985년 8월 7일 접수)

## Application of $L$ Integral to Interface Crack Problems

Jai Hak Park and Youn Young Earmme

**Key Words:** Interface Crack(계면균열),  $L$  Integral( $L$ 적분), Inclusion(개재물), Matrix(기지), Contact Zone(접촉역)

### Abstract

An interface of a circular arc formed by two isotropic, homogeneous elastic materials is investigated. It is shown that  $L$  integral satisfies the conservation law for the interface if it is perfectly bonded, in frictionless contact or separated such as in a crack with the origin of the coordinate system being located at the center of the circular arc.

The property of path independence of the  $L$  integral is applied to an interfacial crack problem, to obtain the stress intensity factors, where the interfacial crack is located along the arc of the circular inclusion embedded in infinite matrix. It is assumed here that the contact zones exist as in the model proposed by Comninou, thus removing the overlapping of the materials along the interface. Another example is shown for the case of a circular interfacial crack in the matrix of finite size, where the stress intensity factors are determined by computing a value of the  $L$  integral numerically along the path far from the crack tip.

### 기 호 설 명

- |     |                           |       |   |
|-----|---------------------------|-------|---|
| $a$ | : 균열길이의 반(m)              | $L$   | : $L$ 적분( $Jm^{-1}$ )                             |
| $c$ | : 반시계방향의 폐 적분 경로          | $l$   | : Fig. 3에 표시된 길이                                  |
| $G$ | : 전단탄성계수(MPa)             | $N$   | : 식(23)에 의해 정의된 식                                 |
| $J$ | : $J$ 적분( $KJm^{-2}$ )    | $n_i$ | : 반시계 방향의 적분경로의 진행 방향에 대하여<br>오른쪽으로 수직인 단위 벡터의 성분 |
| $K$ | : 응력확대계수( $\sqrt{m}$ MPa) | $r$   | : 기준점에서부터의 거리                                     |
|     |                           | $R$   | : 원형 개재물의 반지름(m)                                  |
|     |                           | $s$   | : 적분 경로에서의 거리                                     |

\* 정회원, 한국과학기술원 기계공학과

- $T_i$  : 트랙션 벡터의 성분
- $u_i$  : 변위벡터의 성분
- $W$  : Fig. 3에 표시된 길이
- $w$  : 변형에너지 밀도
- $x_i$  : 좌표의 성분
- $\beta$  : 식 (18)에 의해 정의된 물질상수
- $r$  : Fig. 2(a)에 표시된 각도
- $\Gamma$  : 반시계 방향의 적분 경로
- $\theta$  : Fig. 3에 표시된 각도
- $\epsilon$  : 식 (24)에 의해 정의된 물질 상수
- $\epsilon_{ijk}$  : Permutation symbol
- $\kappa$  : 평면변형인 경우  $3-4\nu$ , 평면응력인 경우  $(3-\nu)/(1+\nu)$
- $\nu$  : 포와송비
- $\sigma$  : 응력 (MPa)

하첨자

- $A$  : 균열선단 혹은 균열선단 들레의 적분 경로에서 계산된 값
- $B$  : 접촉역이 끝나는 점 혹은 그점 들레의 적분 경로에서 계산된 값
- $r, \theta$  :  $r$ 방향과  $\theta$ 방향의 성분
- $\Gamma$  : Fig. 2(a)에서의 적분경로  $\Gamma$ 에 대한 적분값
- $1, 2$  : 재료 1 혹은 재료 2에서의 값
- $I, II$  : 모드 I 과 모드 II
- $\infty$  : 무한 고체에서 계산된 응력확대계수

1. 서론

서로 성질이 다른 두 물질이 접합되어 있고 그 접합면에 균열이 존재하는 계면 균열에 관한 해석은 Williams<sup>(1)</sup>에 의해 비롯된 이래로 많은 저자들<sup>(2-5)</sup>에 의해 수행되어 왔다. 그러나 이들의 해에서는 균열선단 부근에서 응력과 변위가 진동을 하고 있고 균열면이 서로 중첩되는 등 물리적으로 적합하지 못한 특성을 나타내고 있다. 원형의 개재물(inclusion)이 기지(matrix) 내에 존재하고 그 경계면에 균열이 존재하는 문제에 대해서도 기지가 무한 고체일 경우에 대해 몇사람의 저자에 의해 이론적으로 연구되었다<sup>(6-8)</sup>. 그러나 이들의 해에서도 직선 계면균열 문제에서와 동일하게 진동현상과 중첩 현상을 나타내고 있다. 이러한 특성을 나타내는 영역의 크기는 아주 작아 실제문제에의 적용에 있어서는 별로 중요하지 않다<sup>(2)</sup>는 주장도 있지만 균열선단 부근의 상태가 균열선단에서의 응력의 특이치에 큰 영향을 끼치고 응력확대계수와 같은 파괴변

수의 사용을 위해서는 균열선단 부근에서의 응력의 특이치에 대한 해석이 필요하므로 적합한 계면균열의 모델에 대한 모색이 요구되었다. 따라서 Comninou 등은 균열선단 주위에 접촉역(contact zone)을 고려한 모델을 직선계면균열 문제<sup>(9-11)</sup>와 동전모양(penny shape)의 계면균열<sup>(12)</sup>에 적용하여 진동현상과 중첩 현상을 없앨 수 있음을 보였다.

한편 Knowles와 Sternberg<sup>(13)</sup>에 의해 제안된  $J, L, M$  등의 보존적분은 그 자체로써 물리적인 의미를 지니고 있을 뿐만 아니라<sup>(14)</sup> 균질(homogeneous)의 등방성 탄성재료에 대해 적분경로에 무관한 성질을 지니므로 균열선단에서 멀리 떨어진 곳에서의 적분값으로써 균열선단에서의 응력확대계수를 구하는데 이용될 수 있다. 직선균열을 포함하는 균질성 재료에 대해  $J$ 적분으로부터 응력확대계수를 구하는 방법<sup>(15)</sup>과  $M$ 적분으로부터 이론적으로 간단히 응력확대계수를 구하는 방법<sup>(16)</sup>이 제시된 바 있으며, Kubo<sup>(17)</sup>는 두 개의 서로 다른 재료가 평면으로 접합되고, 그 계면에 균열이 있는 경우,  $M$ 적분을 이용하여  $J$ 적분값을 계산하였다.

본 논문에서는 균열면이 원호(circular arc)를 이루고, Comninou 모델과 같이 균열면의 일부가 접촉되어 있는 경우  $L$ 적분이 적분경로에 무관함을 증명하고 이를 이용하여 재료가 서로 다른 원형 개재물과 기지의 경계면에 존재하는 계면 균열에서의 응력확대계수를 구하는 방법에 대해 살펴 보았다. 기지가 무한 고체이고 접촉역이 작아 접촉역의 존재가 균열선단에서 멀리 떨어진 곳에서의 응력장에 거의 영향을 끼치지 않는 경우에는 접촉역을 가정하지 않은 문제에 대한 해, 즉 진동특성을 나타내는 해로부터,  $L$ 적분의 성질을 이용하여, 접촉역을 가정하였을 때의 응력확대계수를 간단한 꼴로 표시할 수 있었고, 유한의 기지에 원형 개재물이 존재하는 문제에 대해서는 F.E.M.을 사용하여  $L$ 적분을 계산함으로써 응력확대계수를 구할 수 있었다.

2.  $L$ 적분의 성질

2.1 보존법칙

$L$ 적분의 정의는

$$L = \oint_c \epsilon_{3ij} (w x_j n_i + T_{iu} - T_{ku} x_i) ds \tag{1}$$

이다.<sup>(13)</sup> 이를 극좌표 계로 나타내면

$$L = \oint_c \left( -w n_\theta + T_r \frac{\partial u_r}{r \partial \theta} + T_\theta \frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta} \right) r ds \tag{2}$$

이 된다. 여기서 하첨자  $r$ 은  $r$ 방향,  $\theta$ 는  $\theta$ 방향의 성분을 표시한다.

균질의 등방성 탄성재료 내에 존재하는 폐곡선의 적분 경로에 대해  $L$ 적분이 0이 된다는 것은 잘 알려진 사실<sup>(13)</sup>이지만 Fig. 1과 같이 폐경로 내부에 재료의 불연속, 즉 계면이 존재할 경우는  $L$ 적분 값이 항상 0이 되지는 않는다. 먼저 Smelser와 Gurtin<sup>(18)</sup>이 사용한 것과 유사한 방법을 사용하여,  $L$ 적분이 Fig. 1과 같은 폐곡선에서 0이 되는 조건을 고찰하여 보자.

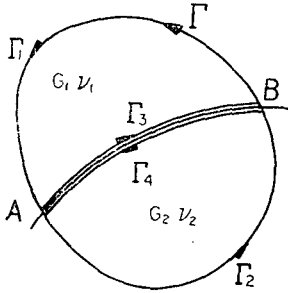


Fig. 1 A closed integration path with material discontinuity within it

각기 균질한 등방성 재료가 계면을 이루고 있는 계면의 모양은 원호라고 하자. Fig. 1에서와 같은  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  및  $\Gamma_4$ 의 적분경로를 생각하면  $\Gamma_1$ 과  $\Gamma_3$ 로 이루어진 적분경로와  $\Gamma_2$ 와  $\Gamma_4$ 로 이루어진 적분경로는 각각 균질한 등방성 재료에 대한 폐곡선의 적분 경로이므로

$$\int_{\Gamma_1} \left( -wn_0 + T_r \frac{\partial u_r}{r \partial \theta} + T_\theta \frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta} \right) r ds + \int_{\Gamma_3} (...) ds = 0 \quad (3)$$

$$\int_{\Gamma_2} \left( -wn_0 + T_r \frac{\partial u_r}{r \partial \theta} + T_\theta \frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta} \right) r ds + \int_{\Gamma_4} (...) ds = 0 \quad (4)$$

이 된다. 여기서 (...)는 첫번째 항에서의 피적분함수와 동일함을 나타낸다. 식 (3), (4)로부터

$$\int_{\Gamma_1} (...) ds + \int_{\Gamma_2} (...) ds = - \int_{\Gamma_3} (...) ds - \int_{\Gamma_4} (...) ds \quad (5)$$

이 된다.

식의 전개에 편의상 좌표의 원점이 원호의 중심에 있다고 가정하자. 그러면  $\Gamma_3$ 와  $\Gamma_4$ 에 대해서는  $n_\theta = 0$ 이므로, 식(2) 우변의 피적분함수의 첫번째 항은 항상 0이다. 재료 1과 재료 2의 경계면을 따라 원호의 길이를  $s$ 라 하고

$$[f(s)] = f^+(s) - f^-(s) \quad (6)$$

라 정의하자. 여기서  $f^+(s)$ 란 재료 1에서 경계면으로 접근할 때의  $f(s)$ 값이며,  $f^-(s)$ 는 재료 2에서 경계면으로 접근할 때의  $f(s)$ 값을 말한다. 즉  $[f(s)]$ 는 재료 1에서 재료 2로 계면을 가로질러 갈 때의 함수  $f(s)$ 의 jump를 뜻한다. 그러면 식 (5)는

$$\int_r (...) ds \equiv \int_{\Gamma_1} (...) ds + \int_{\Gamma_2} (...) ds = \int_A^B \left[ \sigma_{rr} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \sigma_{r\theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right] ds \quad (7)$$

이 됨을 알 수 있다. 계면이 완전히 접합된 경우, 즉 트래션(traction)이 계면을 따라 크기가 같고 부호가 서로 반대이며 변위가 연속인 경우에 대해 고려해 보면  $\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, \partial u_r / \partial \theta$  및  $\partial u_\theta / \partial \theta$  모두가 계면을 따라 연속이므로 식(7)의 우변은 항상 0이 됨을 알 수 있다. 또한 마찰이 없는 접촉인 경우, 즉 계면에 수직인 트래션 성분은 크기가 같고 부호가 서로 반대이고 평행한 트래션 성분은 없으며 계면에 수직인 변위 성분이 연속인 경우에는  $\sigma_{r\theta} = 0$ 이고  $\sigma_{rr}$ 과  $\partial u_r / \partial \theta$ 는 계면을 따라 연속이므로 식(7)의 우변이 0이 됨을 알 수 있다. 또한 두 재료가 서로 분리되어 트래션이 작용되지 않는 경우에는  $\sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = 0$ 이므로 식(7)의 우변이 0이 되며 정리를 하면 다음과 같이 된다.

각기 균질한 등방성인 두 탄성 재료가 계면을 이루고 계면이 좌표의 원점을 중심으로 한 원호를 이루고 있다 하자. 이때 계면이 완전히 접합되었거나, 마찰이 없는 접촉을 하고 있거나, 서로 분리되어 트래션이 작용되지 않는 상태라면, 계면을 그 내부에 포함하는 폐경로에 대해  $L$ 적분은 0이 된다.

### 2.2 균열문제에의 응용

원형 개재물과 기지와의 경계에 존재하는 균열에 Co-minou의 모델과 같이 접촉역을 가정하면 균열 선단 부근은 Fig. 2(a)와 같이 된다. 여기서 A점과 B점 사이가 마찰이 없는 접촉역이다.

Fig. 2(a)에서와 같이 3가지의 적분경로  $\Gamma_A, \Gamma_B$  및  $\Gamma$ 를 가정하자.  $\Gamma_A$ 는 접촉면 하부에서 시작하여 반시계방향으로 균열 선단을 둘러싼 후 접촉면 상부에서 끝나는 경로인데 경로의 시작점과 끝나는 점은 접촉면에서 서로 대응하고 있는 점이다.  $\Gamma_B$ 는 접촉되지 않은 균열면 하부에서 시작하여 반시계방향으로 접촉면을 통과한 후 접촉되지 않은 균열면 상부에서 끝나는 경로이고  $\Gamma$ 는 접촉되지 않은 균열면 하부에서 시작하여 균열 선단을 둘러싼 후 접촉되지 않은 균열면 상부에서 끝나는 경로이다.  $\Gamma_B$  및  $\Gamma$ 에서의 경로 시작점과 끝나는 점은 Fig. 2(a)에서 보는 바와 같이 균열면 상에서 대응하고 있는 점일 필요는 없다.

$\Gamma_A, \Gamma_B$  및  $\Gamma$ 에 대하여 계산된  $L$ 적분을 각기  $L_A, L_B, L_\Gamma$ 라고 하면 2.1절의 결과로부터  $L_A, L_B, L_\Gamma$ 는 각기 적분경로에 무관한 성질이 있음을 증명할 수 있다.

다음으로 원형 개재물과 기지와의 사이에 존재하는 균열에서 접촉역을 가정하지 않을 경우에 대해 고려해 보면, 균열 선단 부근의 모양은 Fig. 2(b)와 같이 될 것이다. 또한 이 경우의 적분경로는 균열면 하부에서 시작하여 반시계 방향으로 균열 선단을 둘러싼 후 균열면

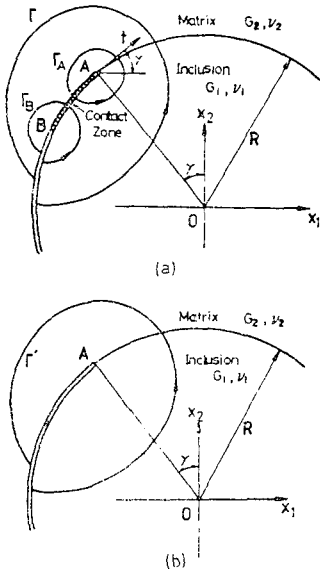


Fig. 2 An interface crack with a contact zone

상부에서 끝나는 한가지 만을 생각할 수 있고 이를  $\Gamma'$  라고 하기로 하자. 이  $\Gamma'$  에서 계산된  $L$  적분을  $L_{\Gamma'}$  라고 하면, 2.1 절의 결과로 부터  $L_{\Gamma'}$  도 적분경로에 무관한 성질이 있음을 증명할 수 있다.

2.3  $L$  적분과  $J_i$  적분과의 관계

2차원의 문제에서  $J$  적분, 즉  $J_1$  적분과  $J_2$  적분은 다음과 같이 정의된다<sup>(13)</sup> :

$$J_k = \oint_c \left( wn_k - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) ds \quad (k=1, 2). \quad (8)$$

균질의 탄성 재료 내의 폐경로에 대해  $J_1, J_2$  적분이 0 이 됨은 잘 알려진 사실이지만 적분경로 내부에 재료의 불균일성이 존재할 경우는 항상 0 이 되지 않는다. 0 이 되는 조건, 즉 보존법칙을 만족하는 조건은 앞에서 행한  $L$  적분의 경우와 유사한 방법으로 구할수가 있고 이에 대해서는 부록 A 에 증명되어 있다. 그 결과만 정리하면 다음과 같다.

균질한 두 재료가 계면을 이루고 있고 계면은  $x_1$  축과 평행을 이루고 있다 하자. 이때 계면이 완전히 접합되었거나, 마찰이 없는 접촉을 하고 있거나, 서로 분리되어 트래션이 작용되지 않는 상태라면, 계면을 그 내부에 포함하는 폐경로에 대해  $J_1$  적분은 0 이된다 (계면이  $x_2$  축에 평행하다면,  $J_2$  적분이 0 이 된다).  $L$  적분과  $J$  적분과의 관계에 대해 살펴보기 위하여 우선 그림 2(a) 에서 적분 경로  $\Gamma_A$  를  $A$  점에 중심을 둔 반경  $\rho$  를 가진 원이라 하고  $\rho$  를 0 으로 접근시키면, 식

(1) 우변의 괄호안의 첫번째 항과 세번째 항은  $x_{2A}J_{1A} - x_{1A}J_{2A}$  에 접근함을 알 수 있다. 여기서  $x_{1A}, x_{2A}$  는 각각  $A$  점의  $x_1$  좌표와  $x_2$  좌표이고  $J_{1A}$  와  $J_{2A}$  는 각각  $\Gamma_A$  의 반경  $\rho$  를 0 으로 접근시킬 때의  $J_1$  과  $J_2$  적분이다.

다음에 식 (1) 우변의 괄호안의 두번째 항을 먼저 적분으로 바꾸면,

$$\int_{\Gamma_A} \epsilon_{3ij} T_i u_j ds = \int_{Area} \epsilon_{3ij} \sigma_{ik} u_{j,k} dA \quad (9)$$

이 된다. Comninou<sup>(9)</sup>에 의하면  $A$  점 부근에서의 응력장의 접근해는  $1/\sqrt{r}$  의 특이성을 가지므로  $\rho$  를 0 으로 접근시킬 경우 식 (9)의 우변은 다음과 같이 0 이 됨을 알 수 있다 :

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma_A} \epsilon_{3ij} \sigma_{ik} u_{j,k} dA = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta \int_0^{\rho} \frac{1}{r} \cdot r dr = 0. \quad (10)$$

여기서  $f(\theta)$  는  $\sigma_{ij}, u_{j,k}$  의  $A$  점 부근에서의 접근해에서의  $\theta$  의 함수들이 곱해져서 만들어진  $\theta$  만의 함수이다. 그러므로

$$L_A = x_{2A}J_{1A} - x_{1A}J_{2A} \quad (11)$$

의 관계가 얻어진다. Fig. 2(a) 의  $A$  점에서 원형 개재물의 접선방향(접합면 방향)으로 새로운 좌표축을 잡고 이축을  $t$  라고 한다면  $t$  방향으로  $A$  점이 움직일 때의 위치 에너지 변화율  $J_{tA}$  는 다음과 같이 정의될 수 있다 :

$$J_{tA} = \int_{\Gamma_A} \left( wn_t - T_i \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) ds. \quad (12)$$

$t$  축과  $x_1$  축이 이루는 각도를  $\gamma$  라고 하고 ( $x_1$  축에서 시계반대방향으로 도는 것을 +로), 개재물의 반지름을  $R$  이라고 하면  $J_{tA} = J_{1A} \cos \gamma + J_{2A} \sin \gamma$  의 관계와  $x_{1A} = -R \sin \gamma, x_{2A} = R \cos \gamma$  의 관계를 가지므로 식 (11) 은 다음과 같이 된다 :

$$L_A = R J_{tA}. \quad (13)$$

여기서  $J_{tA}$  는 적분경로  $\Gamma_A$  의 반지름  $\rho$  를 0 으로 접근시킬때의 값이므로  $\rho$  를 0 으로 접근시킬 경우 적분경로 내부에 존재하는 계면은  $t$  축과 일치하는 직선으로 생각할 수 있고, 앞에서 언급한 결과로부터  $J_{tA}$  는 적분경로에 무관하게 되어 일정한 값에 수렴하게 됨을 알 수 있다.

$B$  점에 관해서도 앞과 동일하게 고려하면

$$L_B = R J_{tB} \quad (14)$$

이 됨을 알 수 있다. 여기서  $J_{tB}$  는  $B$  점에서 원형 개재물의 접선방향 (접촉면 방향)으로  $t$  축을 잡았을 때의  $J_t$  적분이며, 이 때의 적분 경로  $\Gamma_B$  는  $B$  점에 중심을 두고 반지름이  $\rho$  인 원으로 취한후  $\rho$  를 0 으로 접근시킬 경우이다.

Comninou<sup>(19)</sup>에 의한 것과 같이  $B$ 점, 즉 접촉면과 분리된 균열면의 경계점 부근에서의 응력장의 점근해를 Williams (1) 유형의 고유함수 전개법을 사용하여 구해 보면 접촉역에서 압축의 접촉응력이 생기기 위해서는 응력의 특이성을 가질 수 없음을 알 수 있고, 따라서  $J_{iB}=0, L_B=0$ 이 성립되고  $L_r=L_A+L_B$ 의 관계를 이용하면 결국

$$L_r=L_A=RJ_{iA} \quad (15)$$

의 관계를 얻게된다.

다음으로 접촉역을 가정하지 않은 경우, 즉 Fig. 2(b)에 도시된 균열의 경우에 대해서도  $L_r'$ 와  $J_{iA}'$  적분과의 관계를 구하기 위하여 적분 경로를  $A$ 에 중심을 둔 반지름  $\rho$ 인 원으로 생각을 하고 접촉역을 가정한 균열의 경우와 유사하게 유도를 하면

$$L_r'=RJ_{iA}' \quad (16)$$

의 관계를 얻게 된다. 이 경우에도  $J_{iA}'$ 는  $\rho$ 를 0으로 접근시킬 때의  $I'$ 에 대한  $J_i$  적분으로  $J_{iA}$ 의 경우와 동일한 이유로 해서 일정한 값에 수렴하게 됨을 알 수 있다.

### 2.4 $J_i$ 적분과 응력확대계수와의 관계

Fig. 2(a)의  $A$ 점부근에서의 응력의 점근해는  $A$ 점으로부터의 거리를  $r$ 이라 할때  $r$ 이 0에 접근할 때의 해이므로 직선균열 문제에 대한 점근해를 사용할 수가 있다. 점근해는 Williams<sup>(1)</sup>의 고유함수 전개법을 사용하여 구할 수 있고 참고문헌 (9)에 그 결과가 수록되어 있다. 이에 의하면 균열선단의 앞쪽 접합면에 전단 응력 성분의 특이성,  $K_{IIA}$ 가 존재하고 균열선단의 뒤쪽 접촉면에 수직응력 성분의 특이성,  $K_{IA}$ 가 존재함을 알 수 있고 이들 간에는

$$K_{IA}=-\beta K_{IIA} \quad (17)$$

의 관계가 있다. 여기서  $\beta$ 는 Dundurs<sup>(20)</sup>의 계면 균열에 관한 매개변수로

$$\beta = \frac{G_2(\kappa_1-1)-G_1(\kappa_2-1)}{G_2(\kappa_1+1)+G_1(\kappa_2+1)} \quad (18)$$

으로 표시된다.

얻어진 응력함수들을 Hellen과 Blackburn<sup>(15)</sup>이 구한 응력함수들로 표현된  $J$ 적분의 정의식에 대입하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있고, 이에 대해서는 부록 C에 유도되어 있다:

$$J_{iA} = \frac{(1-\beta^2)}{16} \left( \frac{1+\kappa_1}{G_1} + \frac{1+\kappa_2}{G_2} \right) K_{IIA}^2. \quad (19)$$

따라서  $L_r$  적분을 알면 식 (15), (17) 및 (19)로부터 응력확대계수들을 모두 구할 수 있게 된다.

접촉역을 고려하지 않았을 경우의 균열선단 부근,

즉 Fig. 2(b)의  $A$ 점 부근에서는 진동하는 응력장이 얻어지게 된다. 이러한 응력장에 대하여도 Rice와 Sih<sup>(3)</sup>의 정의를 따라 응력확대계수  $K'_{IA}, K'_{IIA}$ 를 구할 수는 있지만 이들에는  $\cos(\ln r)$  또는  $\sin(\ln r)$ 과 같은 항이 포함되는 관계로 응력확대계수가 분명히 정의되는 않는다. (예를 들면  $r$ 을 표시할 때 단위를 무엇으로 하느냐에 따라 응력확대계수 값이 달라짐). 그러나  $K'_{IA}{}^2+K'_{IIA}{}^2$ 의 형태에서는  $\cos(\ln r)$  또는  $\sin(\ln r)$ 이 소거되는 관계로 분명한 값을 지니게 되고 또한  $J_{iA}$ 와는 다음과 같은 관계를 가지게 된다<sup>(18)</sup>:

$$J_{iA} = \frac{1}{16} \left( \frac{1+\kappa_1}{G_1} + \frac{1+\kappa_2}{G_2} \right) (K'_{IA}{}^2+K'_{IIA}{}^2). \quad (20)$$

여기서  $K'_{IA}$ 와  $K'_{IIA}$ 는 Rice와 Sih<sup>(3)</sup>의 정의에  $\sqrt{\pi}$ 를 곱한 값으로 정의하였다.

### 3. 원형 개재물의 경계면 상에 존재하는 균열의 응력확대계수

무한 고체내에 존재하는 원형의 개재물과 기지와의 경계면에 존재하는 Fig. 3과 같은 문제에 앞에서 구한 결과를 적용하여 유용성을 살펴보았다.

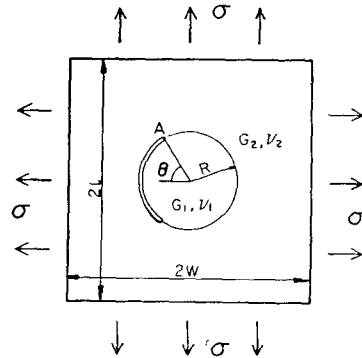


Fig. 3 A crack along the circular inclusion embedded in matrix which is subjected to biaxial stresses at infinite

Perlman과 Sih<sup>(6)</sup>는 접촉역을 고려하지 않은 경우 이 문제를 Hilbert 문제로 수식화하여 해석하였다. 그들 논문에서의 식 (58)에 의하면  $A$ 점에서의 응력확대계수는

$$K'_{IA}-iK'_{IIA} = \sqrt{\pi} F \sigma R^{1/2+i\epsilon} (2\epsilon-i) e^{-i\left[\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}+\epsilon \ln(2\epsilon \sin \theta)\right]} \quad (21)$$

으로 표시된다. 진동하고 있는 응력장에서 정의된 응력확대계수 이므로 “”의 표시를 하였다. 여기서

$$F = \frac{2\sqrt{\sin \theta}}{1+e^{2\pi\epsilon}} \times$$

$$\frac{G_1(1+\kappa_2) [G_1(1+\kappa_2)+G_2]}{(G_1+G_2\kappa_1)[G_2(1+\kappa_1)+2G_1(1+\kappa_2)]-G_2(1+\kappa_1)} \frac{(1+\kappa_1)e^{\epsilon(\theta+\pi)}}{(G_2+G_1\kappa_2)Ne^{-2\epsilon\theta}} \quad (22)$$

$$N = \cos\theta - 2\epsilon\sin\theta \quad (23)$$

$$\epsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} \quad (24)$$

이다.  $\theta$ 는 Fig. 3에 표시된 각도이며  $\sigma$ 는 양축으로 가해지고 있는 응력이다. 이 식에서도 알 수 있듯이 응력확대계수가  $\cos(\ln R)$  또는  $\sin(\ln R)$ 항을 포함하고 있음을 알 수 있는 바, 이는 진동하고 있는 응력장으로부터 응력확대계수를 정의하였기 때문이다.

이러한 균열선단 부근에서의 진동현상은 접촉역을 가정함으로써 제거시킬 수 있으나, 접촉역을 가정할 경우, 폐형해(closed form solution)를 구하는 것이 대단히 어렵고 참고문헌(9)에 의한 특이 적분방정식을 수치적으로 구할 때 많은 계산이 필요하게 된다.

Comninou<sup>(9)</sup>에 의하면 균열면에 수직인 하중이 작용하는 경우 접촉역이 균열길이에 비해 대단히 작으므로 (약  $10^{-4}$ ) 균열선단에서 멀리 떨어진 곳에서의 응력, 변위는 접촉역의 존재에 관계 없이 거의 동일하게 된다. 그러므로 접촉역이 존재할 경우 균열선단에서 멀리 떨어진 적분경로, 즉 Fig. 2(a)에서의  $\Gamma$ 에서 계산된  $L_r$ 와 접촉역이 없을 경우의 균열선단에서 멀리 떨어진 적분경로, 즉 Fig. 2(b)에서의  $\Gamma'$ 에서 계산된  $L_r'$ 는 동일한 값이 된다. 그런데  $L_r'$ 는  $K'_{IIA}$ ,  $K'_{IIA}$ 와 식(16) 및 (20)과 같은 관계를 가지고 있고  $L_r$ 는  $K_{IIA}$ 와 식(15) 및 (19)와 같은 관계를 가지고 있으므로 접촉역이 가정되지 않은 문제에서 구한 해  $K'_{IIA}$ ,  $K'_{IIA}$ 로부터 접촉역을 가정하였을 때의 응력확대계수  $K_{IIA}$ 를 폐형해로 구할 수 있게된다.

즉, 식(21)을 식(20)에 대입한후, 그 결과를 식(16)에 대입하면

$$L_r' = \frac{\pi}{16} \left( \frac{1+\kappa_1}{G_1} + \frac{1+\kappa_2}{G_2} \right) F^2 \sigma^2 R^2 (1+4\epsilon^2) \quad (25)$$

이 되고,  $L_r' = L_r$ 의 관계와 식(15), (19)에서

$$(K_{IIA})_{\infty} = \frac{\sqrt{\pi(1+4\epsilon^2)}}{\sqrt{1-\beta^2}} F \sigma \sqrt{R} \quad (26)$$

가 얻어진다.

$G_1 \gg G_2$ 인 경우 식(26)은

$$(K_{IIA})_{\infty} = \frac{(1+\kappa_2)}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi^2 + (\ln\kappa_2)^2} \kappa_2^{-\frac{\theta}{2\pi}} \times \sigma \sqrt{R \sin\theta} \quad (27)$$

가 되어  $R, \theta, \sigma$ 가 문제에서 주어진 경우  $(K_{IIA})_{\infty}$ 는 단지  $\nu_2$ 의 함수가 되는 것을 알 수 있다.

#### 4. 수치해석

유한고체에 관한 문제를 이론적으로 해석하기는 어려우나 전술된 결과를 이용함으로써 수치적으로 용이하게 해석할 수 있다. 몇가지 문제를 해석하여 그유용성을 살펴 보았다.

Fig. 3과 같이 유한한 기지에 개재물이 존재하는 평면변형의 2차원 문제에 대해 F.E.M.을 이용하여 응력확대계수를 구하였다. 여기에서  $R=1\text{mm}$ ,  $W=l=10\text{mm}$ ,  $\theta=\pi/2$ 이고  $\sigma=9.8\text{MPa}$ 의 양축응력이 작용한다고 한다. 이때 사용한 F.E.M. 모델은 Fig. 4(a)와 Fig. 4(b)에 도시되어 있고 841개의 절점과 256개의 8-node isoparametric 요소를 사용하였다. 접촉역이 작아 접촉역의 존재가 균열 선단에서 먼 곳에서의 값에 영향을 미치지 않는다고 가정하여 F.E.M. 모델에 접촉역은 고려하지 않았다.

적분경로는 Fig. 4(a)와 4(b)에 점선으로 표시되었으며, 균열선단에서 가까운 경로로부터  $\Gamma_1 \dots \Gamma_6$ 라고 한다. 프로그램은 Hinton과 Owen<sup>(21)</sup>의 탄성 프로그램에 각 적분값을 계산할 수 있는 서브루틴을 첨가하여 사용하였다.

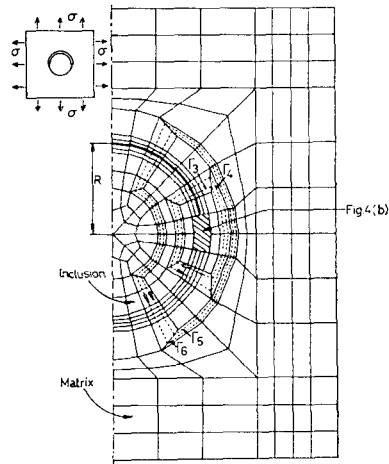


Fig. 4(a) Finite element mesh configuration

Table 1은  $G_1=2000\text{MPa}$ ,  $G_2=1000\text{MPa}$ ,  $\nu_1=\nu_2=0.3$ 일때 각 적분경로에서의  $J_{IIA}$  적분과  $L_r$  적분값을 표시한 것이다.  $L_r$  적분은 적분경로에 무관한 값을 보여주고 있다.  $L_r$  적분의 평균  $0.0577\text{Jm}^{-1}$ 을 개재물의 반지름  $R=0.001\text{m}$ 로 나누면 식(13)에 의하여  $J_{IIA}=0.0577\text{KJm}^{-2}$ 가 되고 각 적분경로에서 계산된  $J_{IIA}$  값을 보면 경로에 따라 그 값이 변하지만 적분 경로가 균열

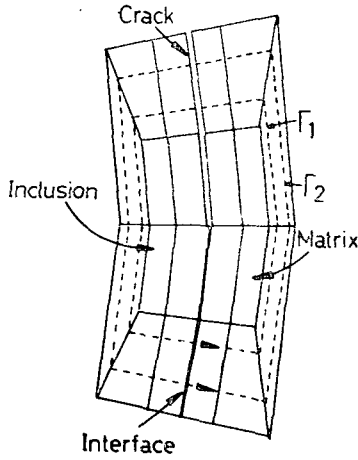


Fig. 4(b) Crack tip detail of finite element mesh

Table 1  $J_{IA}, L_I$  integrals calculated for 6 paths around the crack tip[Integration paths are illustrated in Fig. 4(a) and Fig. 4(b)]

| Paths | Integrals  | $J_{IA}$                | $L_I$                   |
|-------|------------|-------------------------|-------------------------|
|       | $\Gamma_1$ | 0.0547KJm <sup>-2</sup> | 0.05752Jm <sup>-1</sup> |
|       | $\Gamma_2$ | 0.0532                  | 0.05782                 |
|       | $\Gamma_3$ | 0.0445                  | 0.05773                 |
|       | $\Gamma_4$ | 0.0403                  | 0.05771                 |
|       | $\Gamma_5$ | 0.0215                  | 0.05767                 |
|       | $\Gamma_6$ | 0.0172                  | 0.05765                 |

선단에 가까와 질수록  $L_I$  적분으로부터 구한  $J_{IA}=0.0577\text{KJm}^{-2}$ 에 접근하고 있음을 알 수 있다.

$G_2=1000\text{MPa}$ ,  $\nu_1=\nu_2=0.3$ 으로 고정하고  $G_1$ 을 변화시켜 가면서 응력확대계수를 구하였다. 각  $G_1$ 값에 대해서 6개의 적분경로에 대한  $L_I$  적분을 구하고 이 값들의 평균 값을 개재물의 반지름  $R$ 로 나누면  $J_{IA}$ 를 얻을 수 있고,  $J_{IA}$ 를 식 (19)에 대입하면  $K_{IIA}$ 를 구할 수 있다. Fig. 5에는 이렇게 구한  $K_{IIA}$ 에  $G_1$ 에 따른 변화를 점으로 도시하였다. 식 (22)에 의해 계산된  $(K_{IIA})_\infty$ 도 함께 실선으로 표시하였다. 두 값이 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.  $G_1$ 이 커질수록 응력확대 계수가 커지고  $G_1$ 이 작아질수록 응력 확대 계수가 점차 작아지고 있다.

Fig. 6은  $R=1\text{mm}$ ,  $G_1=2000\text{MPa}$ ,  $G_2=1000\text{MPa}$ ,  $\nu_1=\nu_2=0.3$ 일 경우에  $W/R$ 에 따른 응력확대계수의 변화를 표시한 것이다.  $W/R$ 이 커질수록 식 (26)에 의해 변해 계산된 무한고체에 관한 이론치  $(K_{IIA})_\infty$ 에 점차 가까이 접근함을 알 수 있다.

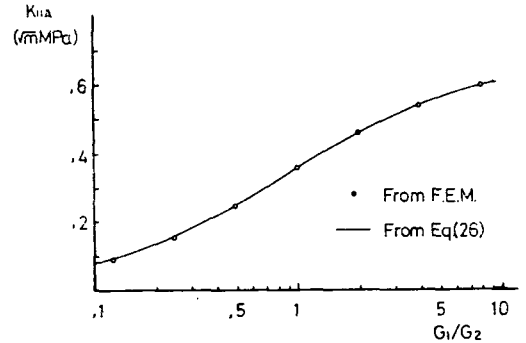


Fig. 5 Variation of  $K_{IIA}$  with  $G_1/G_2$ . ( $G_2=1000\text{MPa}$ ,  $\nu_1=\nu_2=0.3$ ,  $\theta=\pi/2$ , and  $W/R=l/R=10$  in F.E.M. analysis)

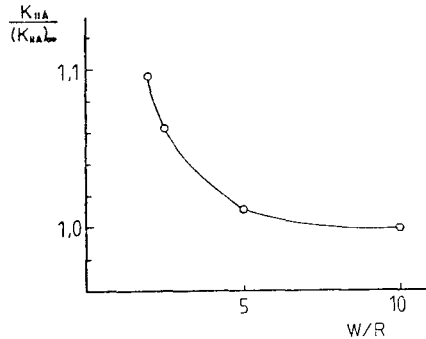


Fig. 6 Variation of  $K_{IIA}/(K_{IIA})_\infty$  with  $W/R$ . ( $G_1=2000\text{MPa}$ ,  $G_2=1000\text{MPa}$ ,  $\nu_1=\nu_2=0.3$ ,  $\theta=\pi/2$ )

### 5. 결 론

(1) 각기 균질한 두 등방성 재료가 계면을 이루고 있고 계면이 좌표의 원점을 중심으로 한 원호를 이루고 있다고 하자. 이때 계면이 완전히 접합 되었거나, 마찰이 없는 접촉을 하고 있거나, 서로 분리되어 트렉션이 작용하지 않는다고 하면, 계면을 내부에 포함하고 있는 폐경로에 대하여  $L$ 적분은 0이 된다. 즉, 보존법칙을 만족한다. 또한 원호의 계면에 존재하는 균열에서 균열 선단을 도는 적분 경로에 대해  $L$ 적분은 무관하다.

(2) 무한의 기지에 원형 개재물이 존재하고 기지와의 경계면에 균열이 존재하는 문제에서 접촉역이 작은 경우는 진동하는 응력장을 나타내는 해로부터  $L$ 적분의 성질을 이용하여 접촉역을 가정하였을 때의 응력확대계수를 간단한 식으로 표시할 수 있었다.

(3) 유한의 기지에 원형 개재물이 존재하는 경우에 대하여 F.E.M.으로  $L$ 적분을 구하여 응력확대계수를 구하였다.  $W=l=10R$ 인 경우  $L$ 적분으로부터 구한

응력확대계수와 무한 거지에 대한 이론해는 거의 유사한 값을 보였다.

참 고 문 헌

(1) M.L. Williams, "The Stresses around a Fault or Crack in Dissimilar Media", Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 49, pp. 199~204, 1959

(2) F. Erdogan, "Stress Distribution in Bonded Dissimilar Materials with Cracks", ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 32, pp. 403~410, 1965

(3) J.R. Rice, G.C. Sih, "Plane Problems of Cracks in Dissimilar Media", ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 32, pp. 418~423, 1965

(4) A.H. England, "A Crack Between Dissimilar Media", ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 32, pp. 400~402, 1965

(5) M. Gotoh, "Some Problems of Bonded Anisotropic Plates with Cracks along the Bond", International Journal of Fracture Mechanics, Vol. 3, pp. 253~265, 1967

(6) A.B. Perlman, G.C. Sih, "Elastostatic Problems of Curvilinear Cracks in Bonded Dissimilar Materials", International Journal of Engineering Science, Vol. 5, pp. 845~867, 1967

(7) A.H. England, "An Arc Crack around a Circular Elastic Inclusion", ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 33, pp. 637~640, 1966

(8) M. Toya, "A Crack Along the Interface of a Circular Inclusion Embedded in an Infinite Solid", Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 22, pp. 325~348, 1974

(9) M. Comninou, "The Interface Crack", ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 44, pp. 631~636, 1977

(10) M. Comninou, "The Interface Crack in a Shear Field", ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 45, pp. 287~290, 1978

(11) M. Comninou, D. Schmueser, "The Interface Crack in a Combined Tension-Compression and Shear Field", ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 46, pp. 345~348, 1979

(12) L.M. Keer, S.H. Chen, M. Comninou, "The Interface Penny-Shaped Crack Reconsidered", International

Journal of Engineering Science, Vol. 16, pp. 765~772, 1978

(13) J.K. Knowles, E. Sternberg, "On a Class of Conservation Laws in Linearized and Finite Elastostatics", Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol. 44, pp. 187~211, 1972

(14) B. Budiansky, J.R. Rice, "Conservation Laws and Energy-Release Rates", ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 40, pp. 201~203, 1973

(15) T.K. Hellen, W.S. Blackburn, "The Calculation of Stress Intensity Factors for Combined Tension and Shear Loading", International Journal of Fracture, Vol. 11, pp. 605~617, 1975

(16) L.B. Freund, "Stress Intensity Factor Calculations Based on a Conservation Integral", International Journal of Solids and Structures, Vol. 14, pp. 241~250, 1978

(17) S. Kubo, "An Application of M-Integral to Cracks in Dissimilar Elastic Materials", International Journal of Fracture, Vol. 20, R27~R30, 1982

(18) R.E. Smelser, M.E. Gurtin, "On the J-Integral for Bi-Material Bodies", International Journal of Fracture, Vol. 13, pp. 382~384, 1977

(19) J. Dundurs, M. Comninou, "Some Consequences of the Inequality Conditions in Contact and Crack Problems", Journal of Elasticity, Vol. 9, pp. 71~82, 1979

(20) J. Dundurs, "Edge-Bonded Dissimilar Orthogonal Elastic Wedges Under Normal and Shear Loading", ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 36, pp. 650~652, 1969

(21) E. Hinton, D.R.J. Owen, "Finite Element Programming", Academic Press, London, 1977

(22) N.I. Muskhelishvili, "Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity", P. Noordhoff, Groningen, 1963

부 록

부록 A:  $J$  적분의 보존법칙

균질성의 탄성재료 내에 존재하는 폐경로에 대해  $J_1, J_2$  적분이 0이 된다는 것은 잘 알려진 사실<sup>(13)</sup>이지만, 경로 내부에 계면이 존재할 경우는 항상 0이 되



지는 않는다. 우선  $J_1$  적분에 대하여 0이 되는 조건, 즉 보존법칙을 만족하는 조건에 대해 살펴보기로 한다. 각기 균질성의 두 탄성재료가 계면을 이루고 있고 계면은  $x_1$  축과 평행하다고 한다. 즉 Fig. 1에서 계면이  $x_1$  축과 평행한 직선이라고 하고 또한 Fig. 1에서와 같이  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ 의 적분 경로를 생각한다.  $\Gamma_1$ 과  $\Gamma_3$ 로 이루어진 적분 경로와  $\Gamma_2$ 와  $\Gamma_4$ 로 이루어진 적분 경로는 각각 균질 재료에 대한 폐적분 경로이므로 각각의 적분 경로에 대한  $J_1$  적분은 0이다. 또한 계면이  $x_1$  축과 평행하므로  $\Gamma_3, \Gamma_4$ 에 대해서는  $n_1=0$ 이 되고 이들의 결과로부터 다음과 같은 관계를 얻게된다:

$$\int_{\Gamma} (...) ds = \int_{\Gamma_1} (...) ds + \int_{\Gamma_2} (...) ds \\ = - \int_A^B \left[ \sigma_{i2} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right] ds. \quad (A-1)$$

여기서 (...)는  $J_1$  적분의 정의식에서의 피적분함수가 생략된 것이며  $[f(s)]$ 는 식 (6)과 같은 정의로 사용되었다.

계면이 완전히 접합된 경우, 마찰이 없는 접촉인 경우, 또는 두 재료가 분리되어 트랙션이 작용되지 않는 경우에 대해 고려하면 식 (A-1)의 우변이 모두 0이 됨을 알 수 있다. 즉, 보존법칙을 만족함을 알 수 있다.  $J_2$ 에 대해서도 동일하게 생각하면 계면이  $x_2$  축과 평행할 때 보존 법칙을 만족하게 됨을 알 수 있다.

### 부록 B: 균열문제에의 응용

Fig. 2(a)에서 계면을  $x_1$  축과 평행한 직선이라고 가정하고 2.2절에서와 동일하게 적분경로  $\Gamma_A, \Gamma_B$  및  $\Gamma$ 를 가정한다.  $\Gamma_A, \Gamma_B$  및  $\Gamma$ 에서 계산된  $J_1$  적분을 각기  $J_A, J_B, J_r$ 라고 하면 부록 A의 결과로부터  $J_A, J_B, J_r$ 는 각각 적분 경로에 무관함을 알 수 있다.

Fig. 2(b)에서 계면을  $x_1$  축과 평행한 직선이라 하고 적분 경로  $\Gamma'$ 에서 계산된  $J_1$  적분을  $J'_r$ 라고 하면 부

록 A의 결과로부터  $J'_r$ 도 적분경로에 무관함을 알 수 있다.

### 부록 C: 식 (19)의 유도

$J^* = J_1 - iJ_2, D = u_1 + iu_2, T = T_1 + iT_2$ 라고 하면 식 (8)은

$$J^* = \oint \left( iwd\bar{z} - T \frac{\partial \bar{D}}{\partial z} ds - \bar{T} \frac{\partial D}{\partial z} ds \right) \quad (A-2)$$

로 표현할 수 있다. <sup>(15)</sup> 여기서  $z = x_1 + ix_2$ 이고 분자위의 가로줄(bar)은 공액복소수를 의미한다. Muskhelishvili의 응력함수<sup>(22)</sup>  $\phi(z), \psi(z)$ 와 다음과 같은 관계를 가지는 응력함수  $\Omega(z), \chi(z)$ 를 도입해 보자. 즉

$$\Omega(z) = \phi(z) \\ \chi(z) = \psi(z) + z\phi'(z). \quad (A-3)$$

응력과 변위를  $\Omega(z), \chi(z)$ 로 표현한 후 식 (A-2)에 대입하면,

$$J^* = \frac{i(1+\kappa)}{2G} \left\{ \text{Re} \oint \Omega'^2(z) dz - \oint \Omega'(z) \chi'(z) dz \right. \\ \left. + 1/2 \oint d[\Omega'^2(z)(z-\bar{z})] \right\} \quad (A-4)$$

가 된다. 직선 계면 균열 문제에서 접촉역을 가정한 경우 균일선단 부근에서의 응력장은 다음과 같다<sup>(9)</sup>:

$$\Omega_1'(z) = -i \frac{(1-\beta)K_{IIA}}{2\sqrt{2\pi}} Z^{-1/2} \\ \chi_1'(z) = i \frac{(1+\beta)K_{IIA}}{2\sqrt{2\pi}} Z^{-1/2} \\ \Omega_2'(z) = -i \frac{(1+\beta)K_{IIA}}{2\sqrt{2\pi}} Z^{-1/2} \\ \chi_2'(z) = i \frac{(1-\beta)K_{IIA}}{2\sqrt{2\pi}} Z^{-1/2}. \quad (A-5)$$

여기서 하첨자 1은 재료 1에서의 응력함수, 2는 재료 2에서의 응력함수이다.

식 (A-5)를 식 (A-4)에 대입하면 식 (19)가 얻어진다.