

<論 文>

周期的으로 斷面이 變化하는 完全確立된 亂流再循環 流動과
亂流熱傳達의 數值解析

李 炳 坤* · 崔 英 惇**

(1985 年 11月 日일 接受)

Numerical Analysis of Fully Developed Turbulent Recirculating Flow and Heat
Transfer for the Periodic Variations of Cross Sectional Area

Byung Kon Lee and Young Don Choi

Key Words : Artificial Roughness(人工粗度), Turbulent Flow(亂流流動), Stream Line Curvature Correction(流線曲率修正), QUICK Scheme (QUICK 수치해법), Cyclic TDMA (주기적 TDMA)

Abstract

A numerical method is developed for the solution of fully developed turbulent recirculating flow whose cross-sectional area varies periodically. This enables the flow field analysis to be confined to a single isolated module, without involvement with the entrance region problem.

This method are applied to the analysis of the turbulent flow field and heat transfer in artificially roughened annulus with repeated square rib.

기 호 설 명

A : 차분 방정식의 계수
 C_p : 비 열
 $C_\mu, C_{\epsilon_1}, C_{\epsilon_2}, \sigma_k, \sigma_\epsilon, \kappa$: 난류 모델 상수
 D_h : 수력 직경
 K_1 : 상 수
 Nu : 국부 누셀트수
 \bar{Nu} : 평균 누셀트수
 P, p : 인공조도간의 거리(피치), 압력

P_R : 반복압력
 Pr_t : 난류 프란틀수
 Pr_{eff} : 등가프란틀수
 $P/H, p/h$: 인공조도 피치와 높이 비
 Q : 체적 유량
 \dot{Q}_w : 벽면의 열공급율
 Re : 레이놀즈수 ($= \frac{UD_h}{\nu}$)
 R_s : Residual source
 S : 차분식의 원천항
 T : 온도
 T_R : 반복온도

*정회원, 충북대학교 공과대학 산업안전공학과
**정회원, 고려대학교 공과대학 기계공학과

U, V : 축방향 및 반경방향 속도

Vol : 제어체적의 체적

그리스 문자

β : 평균 압력강하

γ : 온도상승율

θ : 속도의 방향각

ρ : 밀도

λ : 마찰계수

ν : 동점성 계수

μ, μ_t, μ_{eff} : 층류, 난류 및 등가점성계수

Γ_{false} : 수치확산계수

1. 서 론

주기적으로 단면이 변화하는 유동은 Fig. 1 과 같은 관군(管群) 또는 판군(板群)을 갖는 열교환기나 유체 기기등에서 흔히 볼 수 있다. 또 Fig. 2 와 같이 열전달 촉진에 사용되는 핀(fin) 또는 인공조도(人工粗度)가 부착된 곳의 유동도 이러한 예이다.

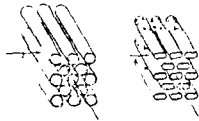


Fig. 1 Examples of periodic flow; tubes and plates

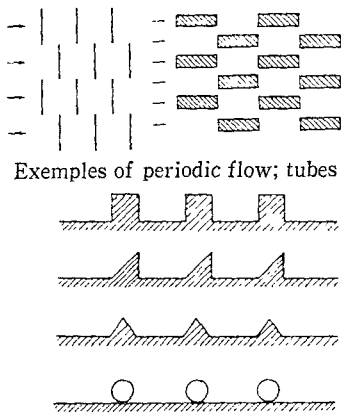


Fig. 2 Examples of periodic flow; artificial roughnesses

이러한 유동장들에서는 장애물 주위에서 주기적으로 유동이 박리되어 주기적인 재순환유동장을 형성하고, 이로 인한 유동의 급속한 혼합으로 입구부(entrance region)는 매우 짧아지고 유동은 급속히 완전 확립되어 완전확립된 유동장의 해석이 중요한 의미를 갖는다.

이 재순환유동장은 타원형 Navier-Stokes 방정식으로 표시되며 이를 수치해석하기 위해서는 일반적으로 입구 및 출구의 경계조건이 필수적으로 주어져야 하며 단면이 일정한 유동인 경우, 입구속도는 아는 값으로 가정하고 출구속도는 완전 확립조건($\frac{\partial U}{\partial x} = 0, V = 0$)을 이용하여 해석한다. 그러나 주기적으로 단면이 변화하는 유동장을 이와같은 입, 출구조건을 사용하여 관 입구에서부터 유동이 완전 확립되는 곳까지 해석하기 위해서는 대단히 많은 계산양이 소요된다.

Patankar는 관군형태의 층류유동에 대해 이러한 주기적인 유동장을 푸는 방법을 제시하였는데^{(1), (2)}, 그는 반복되는 속도와 압력을 이용하여 무차원화한 운동량 방정식의 평균 압력구배를 임의의 값으로 고정하고 한 주기의 유동장에서 출구속도 분포가 입구속도 분포와 같아지는 조건을 이용하여 한 주기만의 유동장을 해석함으로써 완전확립된 유동장을 얻을 수 있었다. 그러나 이 방법은 점성계수가 일정한 유체에 적용될 수 있는 방법으로, 난류점성계수가 위치에 따라 변화하며 난류생성과 소멸이 위치에 따라 크게 변화하는 난류유동의 해석에는 그대로 적용될 수 없다. 본 연구에서는 위의 방법을 수정 발전시켜 완전확립된 난류유동과 열전달장을 해석하였다. 본 연구에서 해석한 유동장은 Fig. 3 과 같이 내관 외면에 직사각형 인공조도를 갖고 외관은 매끈한 이중동심원관내의 유동이며, 해의 정확성을 높이기 위하여 Leschziner & Rodi⁽³⁾의 유선곡률모형을 수정보완하여 사용하였으며 수치해석의 오류확산을 감소시키기 위하여 QUICK 해법을 사용하였다.

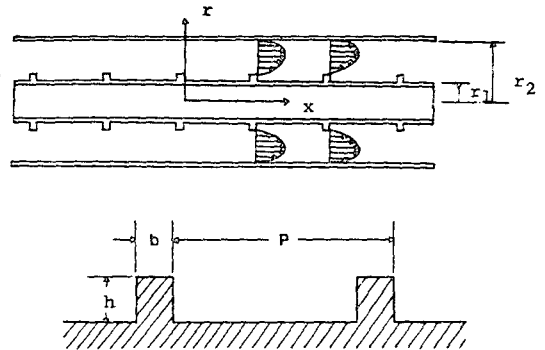


Fig. 3 Flow model and cross-section of annular pipe with repeated square rib

2. 이론해석 및 기본 방정식

2.1 속도, 압력 및 온도의 해석

입구에서 충분히 떨어져 완전확립된 곳에서는 비록

한주기내의 속도는 각 위치마다 다르더라도 매 주기마다 대응하는 위치의 속도는 같다. 즉,

$$U(x, y) = U(x + p, y) = U(x + 2p, y) = \dots \dots$$

$$V(x, y) = V(x + p, y) = V(x + 2p, y) = \dots \dots \quad (1)$$

식(1)에 의하여 완전화립된 유동장의 해석은 임의의 한 주기내에서만 해석하면 된다. 압력은 단면변화가 없는 관유동장에서의 압력 강하와 같은 일정한 평균압력강하(β)와 단면의 변화에 기인된 압력(P_R)의 합으로 표시할 수 있다.

$$p(x, y) = -\beta x + P_R(x, y) \quad (2)$$

식(2)의 반복압력(P_R)은 같은 단면이 매 주기마다 반복되므로 어느 주기에서나 대응하는 위치에서는 같다. 따라서 이러한 속도와 반복압력으로 매치된 운동량 방정식을 이용하면 한주기의 입구와 출구에서 속도 및 반복압력이 같다는 경계조건을 세울 수 있어서 유동장을 해석할 수 있다.

온도는 매주기마다 ΔT 만큼씩 평균온도가 상승한다.

단위길이당 온도상승율(γ)은 일정 열유속(constant heat flux) 조건에서는,

$$\gamma = \frac{\Delta T}{L} = \frac{\dot{Q}_w}{mC_p L} \quad (3)$$

이고 이 값은 초기조건에서 결정된다.

이 γ 를 이용하여 유체의 온도를 평균온도상승과 매 주기마다 반복되는 온도(T_R)로 구분하면 임의점의 온도는 다음식으로 표시된다.

$$T(x, y) = \gamma \cdot x + T_R(x, y) \quad (4)$$

식(4)를 에너지 방정식에 대입하여 온도를 반복온도(T_R)로 매치하면 입구 및 출구에서의 반복온도가 같은 경계조건이 성립되어 온도장을 해석할 수 있다.

2.2 기본 지배 방정식

본 해석에서 사용한 기본 방정식들은 다음과 같다.

연속 방정식

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho U) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\rho V) = 0 \quad (5)$$

축방향 운동량 방정식

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho U \cdot U) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\rho V \cdot U) = -\frac{\partial P_R}{\partial x}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu_{eff} \left(2 \frac{\partial U}{\partial x} \right) \right] + \beta$$

$$+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \mu_{eff} \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial r} \right) \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x}(\rho k) \quad (6)$$

반경방향운동량 방정식

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho U \cdot V) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\rho V \cdot V) = -\frac{\partial P_R}{\partial r}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu_{eff} \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial r} \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

$$\left[r \mu_{eff} \left(2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) \right] - 2 \mu_{eff} \frac{V}{r^2} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial r}(\rho k) \quad (7)$$

열 에너지 방정식

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho U T_R) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\rho V T_R) = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\left(\frac{\mu_{eff}}{Pr_{eff}} \frac{\partial T_R}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\mu_{eff}}{Pr_{eff}} \frac{\partial T_R}{\partial r} \right)$$

$$- \rho U \gamma \quad (8)$$

난류 운동에너지 방정식

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho U k) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\rho V k) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu_{eff}}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x} \right)$$

$$+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\mu_{eff}}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial r} \right) + P_k - \rho \varepsilon \quad (9)$$

난류 운동에너지 소멸율 방정식

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho U \varepsilon) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\rho V \varepsilon) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu_{eff}}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right)$$

$$+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\mu_{eff}}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right)$$

$$+ C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (10)$$

여기서,

$$P_k = \mu_t \left[2 \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{V}{r} \right)^2 \right. \right.$$

$$\left. \left. + \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 \right\} \right] \quad (11)$$

난류 점성계수

$$\mu_{eff} = \mu + \mu_t, \quad \mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (12)$$

식(10), (11), (12)의 난류 모델 상수는 Table 1과 같다.⁽⁴⁾

Table 1 Values of $k-\varepsilon$ model coefficients

C_μ	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$	σ_k	σ_ε	k
0.09	1.44	1.92	1.0	$\frac{k^2}{(C_{\varepsilon 2} - C_{\varepsilon 1}) C_\mu^2}$	0.4187

2.3 유선곡률(流線曲率)에 대한 난류 모델의 수정

최근 유선이 평행하지 않고 곡선적으로 변화하는 유동장에서는 그 유선의 곡률로 인하여 유동장은 더 크게 변형되고 이 추가된 변형물은 그 유동장의 난류특성에 큰 영향을 주는 것으로 알려졌다^{(5), (6)}. 그러나 표준 $k-\varepsilon$ 난류 모델은 이러한 유선 곡률에 대한 영향이 고려되어 있지 않아 이를 고려하여 $k-\varepsilon$ 난류모델을 수

정하려는 노력이 기울여지고 있다. 본 연구에서는 이러한 모델중 HL Model⁽⁵⁾, LPS Model⁽⁶⁾, LR Model⁽³⁾에 대하여 비교해 본 결과 LR Model이 가장 실험결과에 잘 일치하는 것을 알았으나 이 모델유도과정에 불합리한 점이 발견하여 이를 수정하여 다음과 같은 우선फल수정식을 사용하였다⁽⁷⁾.

$$C_{\mu} = \frac{C_{\mu 0}}{1 + 4 K^2_1 \frac{k^2}{\epsilon^2} \frac{\partial U_s}{\partial n} \frac{U_s}{R}} \quad (13)$$

여기서, $C_{\mu 0}$ 는 표준 $k-\epsilon$ 모델의 값 0.09 이고 U_s 는 접선 방향의 속도, R 은 유선의 곡률이다.

3. 수치해석

수치해석은 기본방정식들을 차분식으로 변환하고 압력 방정식 및 압력수정 방정식을 사용하는 SIMLER Scheme⁽⁸⁾을 사용하였다. 수치해법은 Hybrid Scheme 및 Leonard의 QUICK Scheme⁽⁹⁾을 변환하는 격자계에 확장하여 사용하였으며 모서리 제어체적(Corner Control Volume)에서의 차분 방정식은 특별히 고려하였다.

3.1 변화하는 격자계에 대한 QUICK Scheme

기본 방정식들의 비선형항을 수치해석하는 기존의 Upwind Scheme, Hybrid Scheme 등은 수치확산을 불가피하게 유발시킨다. 이를 근본적으로 배제하기 위하여 Leonard는 일정기간의 격자계에 대하여 제어체적상의 값을 기존의 선형보간(linear interpolation) 대신에 2차 곡선으로 보간하는 QUICK Scheme을 제안하였는데 본 연구에서는 이를 부록 A와 같이 간격이 변화하는 격자계에 대하여 확장하였다. 그 차분방정식은 $A_P U_P = A_E U_E + A_W U_W + A_S U_S + (S_C + S_P U_P) \times$

$$Vol + S_{Cq} + S_{Pq} U_P \quad (14)$$

로 표시되며, Central Difference Scheme에 $S_{Cq} + S_{Pq} U_P$ 항만 추가한 형태이다.

경계조건의 대입은 Fig. A1에서 선택되는 속도가 경계에서 한 칸 이상 경계밖으로 벗어나면 추가되는 항을 0으로 놓아 Central Difference Scheme으로 하며 반칸만 벗어나면 경계속도를 대신 선택하고 간격을 반으로 줄이는 것외에는 기존 Scheme의 경계조건이 그대로 적용된다. 반경방향 운동량 방정식의 V -속도에 대해서도 이와같은 방법으로 차분화한다.

기존 Scheme에서의 수치확산계수에 대하여 Davis 등은⁽¹⁰⁾ 근사적으로 다음식을 제안하였는데, 본 해석에서는 이 식을 이용하여 기존 Scheme들에서 생길 수

있는 수치확산을 정량적으로 구해 보았다.

$$\Gamma_{false} = \frac{\rho U \Delta x \Delta y \sin 2\theta}{4(\Delta y \sin^2 \theta + \Delta x \cos^2 \theta)} \quad (15)$$

3.2 Corner Scheme

단면이 변화하는 유동장에서 Staggered Grid를 사용하면 Fig. 4와 같이 모서리에서 반은 벽면에 걸치고 반은 유동장에 놓이는 제어체적이 생기게 된다.

이 모서리 주위의 유동은 매우 복잡한데 이 모서리 제어체적 차분식을 정확히 해주지 않으면 전체 수치해가 부정확해진다⁽¹¹⁾.

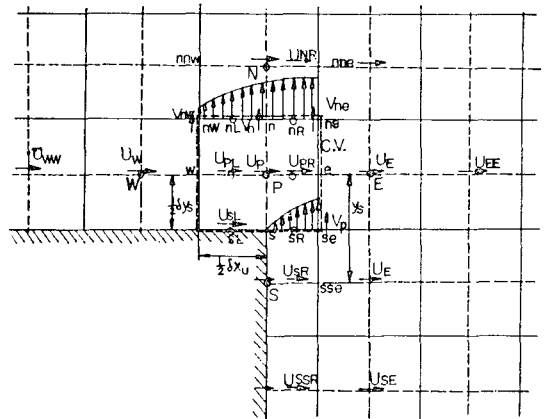


Fig. 4 Corner scheme of U velocity

본 해석의 유동장에는 앞뒤의 인공조도에 이러한 모서리가 있어 이를 부록 B와 같이 고려하였다. 이것은 Hybrid Scheme의 축방향 운동량 방정식에 대한 것이나 반경방향 운동량 방정식 및 QUICK Scheme에 대해서도 이와 같은 방법으로 고려하였다.

3.3 운동량 방정식의 수치해석

식 (6), (7)의 운동량 방정식을 풀기 위해서는 일반적인 재순환유동과 달리 반복압력 (P_R)외에 평균압력구배 (β)를 알아야 한다. 이 β 는,

$$\beta = \frac{P(x, y) - P(x + L, y)}{L} = \lambda \frac{\rho v^2 R^2}{2 D h^2} \quad (16)$$

과 같이 레이놀즈수의 함수로 처음에 가정을 하나 이 가정된 값은 정확한 값이 아니므로 운동량방정식을 풀어 속도를 구해도 구하고자 하는 레이놀즈수와 일치하는 유량이 나오지 않는다. 층류유동에 대해 Patankar는^{(11), (12)} β 를 임의의 값으로 고정하고 점성계수를 변화시키는 방법을 제안하였다. 무차원화한 층류운동 방정식에서 층류점성계수는 레이놀즈수로 무차원화 되어

점성계수의 변화는 곧 레이놀즈수의 변화로 나타나므로 그 유량 차이 만큼 점성계수를 변화시키는 방법이다. 그러나 본 해석과 같은 난류유동의 난류 점성계수는 층류유동과는 달리 일정하지 않으며 유동장의 난류 생성에 따라 크게 변화하므로 이러한 방법을 사용할 수 없다. 그래서 본 해석에서는 매 반복 계산마다 초기 값으로 주어진 레이놀즈수에 대한 유량(Q_0)과 가정된 β 를 사용하여 계산한 유량(Q)의 제곱과의 차이를 다음과 같이 over-relaxation 하여 β 를 수정하는 방법을 사용하였다.

$$\beta_{NEW} = \beta_{OLD} \times \left[1 + \alpha \left\{ \left(\frac{Q_0}{Q} \right)^2 - 1 \right\} \right] \quad (17)$$

여기서 α 는 over-relaxation factor로 많은 수치실험 결과 30~40이 가장 적합함을 알 수 있었다. 또 수렴을 촉진시키기 위하여 Fig. 5와 같이 각 방향마다

다 한번은 y 축 방향으로 Cyclic TDMA⁽¹⁾로 풀고 또한 한번은 x 축 방향으로 일반적인 TDMA로 풀어서 경계 조건의 영향이 빨리 내부 격자점으로 확산되게 하였다.

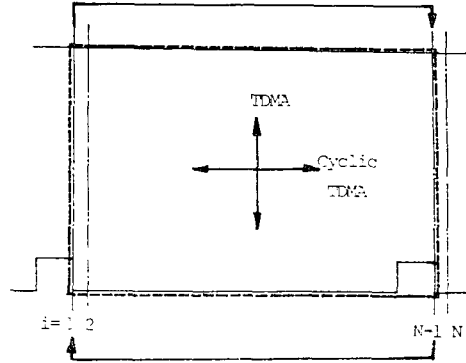
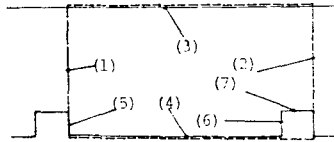


Fig. 5 Direction of TDMA and Cyclic TDMA

Table 2 Summary of boundary conditions



	U	V	P_R	P'	k	ϵ	T_R
(1) Inlet	U_{outlet}	V_{outlet}	P_R outlet	P' outlet	k outlet	ϵ outlet	T_R outlet
(2) Outlet	U inlet	V inlet	P_R inlet	P' inlet	k inlet	ϵ inlet	T_R inlet
(3) Outer Wall	$U_b=0$ W.F.	$V_N=0$	$A_N=0$	$A_N=0$	W.F.	W.F.	Adiabatic ($dT_R/dr=0$)
(4) Inner Wall	$U_b=0$ W.F.	$V_s=0$	$A_s=0$	$A_s=0$	W.F.	W.F.	Constant Heat Flux
(5) Front Roughness Vertical Wall	$U_w=0$	$V_b=0$ W.F.	$A_w=0$	$A_w=0$	W.F.	W.F.	W.F.
(6) Rear Roughness Vertical Wall	$U_e=0$	$V_b=0$ W.F.	$A_e=0$	$A_e=0$	W.F.	W.F.	W.F.
(7) Roughness Upper Wall	$U_b=0$ W.F.	$V_s=0$	$A_s=0$	$A_s=0$	W.F.	W.F.	W.F.

W.F. means Wall Function

3.4 경계조건 및 수렴조건

본 해석에서 사용한 경계조건은 Table 2와 같다.

Fig. 5와 Table 2에서 보는 바와 같이 반복되는 경계조건으로 인하여 수치계산은 초기에 입출구 값을 같게 가정하고 계산된 출구 값을 다시 입구 경계조건으로

로 놓고 반복 계산한다. 이에 따라 본 해석에서는 다음의 residual source (R_s)로 표시되는 일반적인 제순환유동의 수렴과 동시에 3·1절에서 언급한 평균 압력구배(β)를 수렴시켜야 한다. β 의 수렴조건은 다음과 같이 엄격한 상대오차를 설정하였는데, 그 이유는 β 값이 유량을 결정하므로 β 가 매우 작은 값이나 변하면 속도 분포가 변하기 때문이다.

수렴조건 1 : $\sum |R_\beta| < CR_{\beta,ref}$

여기서 $R_\beta = (A_\beta - S_\beta)\phi_\beta - (\sum A_{nb}\phi_{nb} + S_c)$ 이고

C는 10^{-3} order 이다.

수렴조건 2 :

$$\left| \frac{\beta_{NEW} - \beta_{OLD}}{\beta_{OLD}} \right| \leq 10^{-5} \quad (\text{적어도 10 회 반복계산하는 동안})$$

이러한 β 및 R_β 의 수렴에 대한 하나의 계산예를 Fig. 6에 도시하였다.

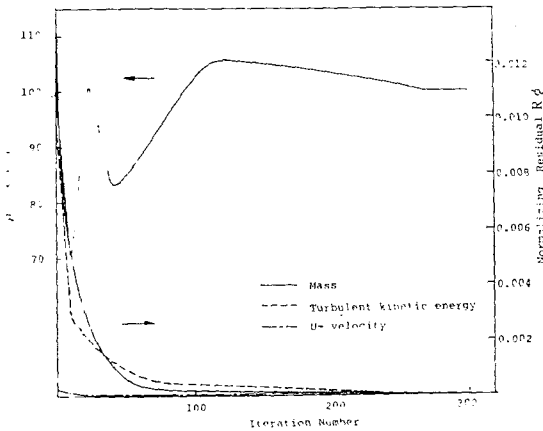


Fig. 6 Convergence of mean pressure gradient (β) and residual sources

Fig. 6에서와 같이 실제로 β 가 수렴될 때에는 R_β 의 수렴은 문제가 되지 않음을 알 수 있었다.

4. 해석결과 및 고찰

Fig. 7, 8은 $Re=30,000$ 이고 피치비가 각각 15와 20일 때 표준 $k-\epsilon$ 모델과 유선곡률 수정한 경우에 대하여 한 주기내의 속도분포를 도시한 것이다. 실험치⁽¹³⁾는 동일한 위치에서의 비교가 곤란하여 한 주기내의 속도를 평균한 평균속도와 비교하였다. Fig. 7~Fig. 10에서 우측단의 속도분포에 대한 실험값과 해석값은 한 주기의 속도 분포를 평균한 것이다.

이러한 실험치와의 비교에서 표준 $k-\epsilon$ 모델에 의한 수치해는 인공조도가 있는 내관 쪽에서는 실험치보다 약간 작고 외관쪽에서는 약간 크게 예측되었으나 본 유선곡률로 수정한 경우는 실험치와 잘 일치하였다.

이것은 인공조도 부근의 박리 및 재순환유동으로 유선이 곡률을 갖게 되어 난류응력과 변형율에 변화가 생겨 난류점성계수가 변화하는데 표준 $k-\epsilon$ 난류모델에서는 이 영향이 고려되지 않았기 때문이다. Fig. 9와 Fig. 10은 레이놀즈수가 39,000이고 피치비가 각각 5와 20일 때에 QUICK Scheme과 Hybrid Scheme으로 계산한 속도분포를 도시한 것으로 인공조도 위의 주유

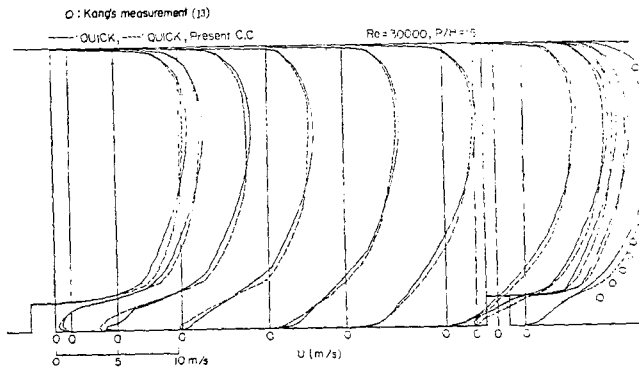


Fig. 7 Axial-velocity profile for $Re=30,000$, $P/H=15$

동장에서는 차이가 매우 적는데 이것은 Fig. 13, 14에 나타나 있는 바와 같이 유선의 곡률이 대단히 작기 때문이다. 그러나 인공조도 부근의 유동장에서의 속도 분포는 큰 차이가 있음을 알 수 있다. 이것은 인공조도 부근은 재순환유동에 의해서 유선의 곡률이 커져서 격자와 유선과의 경사각(θ)이 커져서 Hybrid Scheme에서 수치확산이 증대되었기 때문이다.

Fig. 11은 식 (15)에 의해 계산한 수치확산계수와 실제확산계수와와의 비이다. 수치확산계수는 식 (15)에 의하면 격자의 크기에 따라 변하므로 동일한 단위 격자에 대해 비교하기 위하여 격자 크기로 나누어 도시하면 Fig. 12와 같다. Fig. 12에서, 피치비 5이하에서 확산계수비의 급격한 증가는 인공조도 사이의 독립된 재순환유동(cavity flow)으로 격자에 경사진 속도의

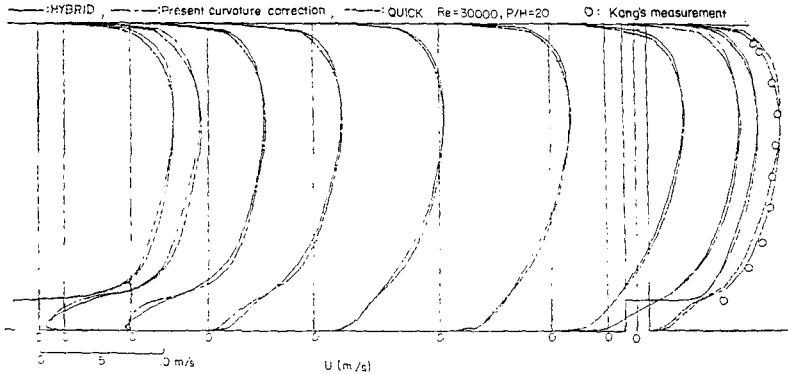


Fig. 8 Axial-velocity profile for $Re=30,000, P/H=20$

비율이 증가된 때문으로 생각된다.

Fig. 13, Fig. 14는 유동함수를 도식한 것으로서, 대략 피치비 5까지는 유동이 재부착되지 않고 인공조도 사이에서 cavity flow를 보이며, 그 이상의 피치비에

서는 앞의 인공조도에서 박리되어 재부착되며 다시 뒤의 인공조도 앞에서 박리되어 앞에서는 크고 강한 재순환유동역이, 뒤에서는 작고 약한 재순환 유동역이 형성된다.

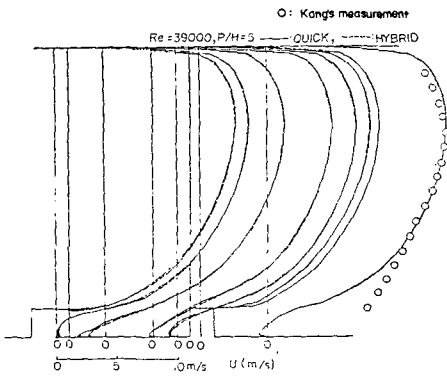


Fig. 9 Axial-velocity profile for $Re=39,000, P/H=5$

Fig. 15는 평균압력구배(β)의 피치비에 따른 변화를 도식한 것으로써 곡률수정을 한 경우는 실험결과와 비교적 잘 일치함을 알 수 있다. 이 평균 압력구배는 대략 $P/H=7.5$ 에서 최대가 되고 피치비가 커지거나 작아질수록 감소하는데 그 이유는 피치비가 커지면 인공조도가 서로 멀어져 매끈한 관유동에 가까워지고, 피치비가 7.5이하로 적어지면 완전히 독립된 재순환유동이 발생하여 인공조도가 유동에 미치는 저항이 감소하기 때문이다. 이러한 속도 및 압력의 예측에서 본 수치 해석방법은 매우 적합한 것으로 나타났으며 이와 유사한 주기적으로 단면이 변화하는 완전확립된 난류 재순환유동장의 해석에 유용하게 응용될 수 있을 것이다.

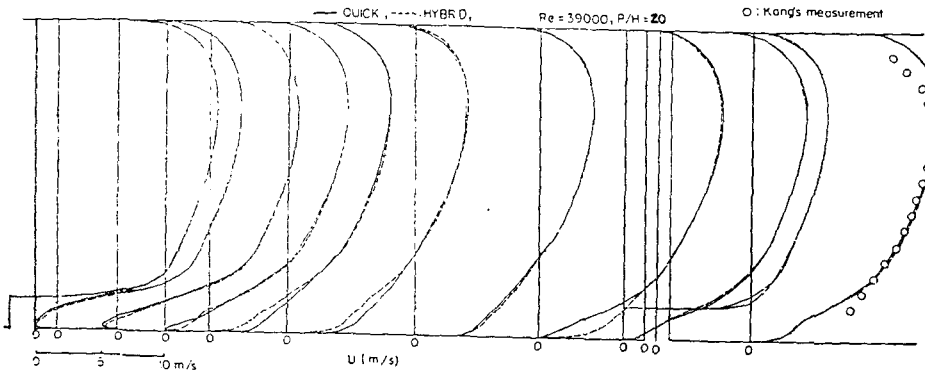


Fig. 10 Axial-velocity profile for $Re=39,000, P/H=20$

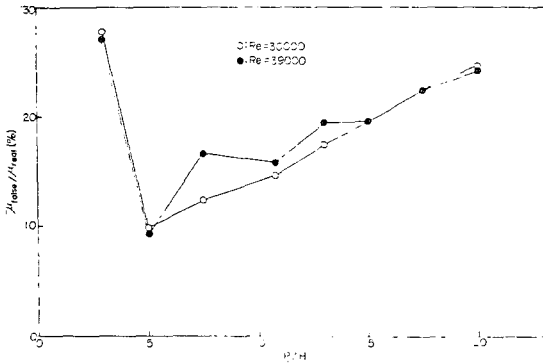


Fig. 11 Relative numerical diffusion coefficient with respect to P/H

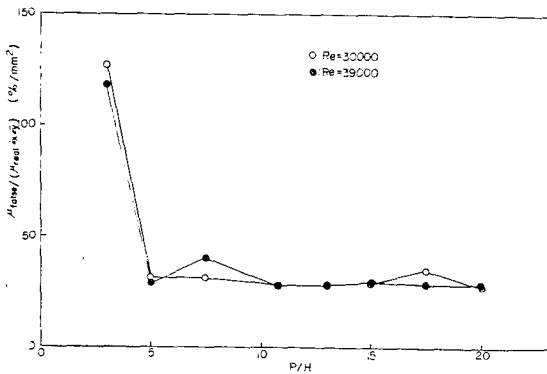


Fig. 12 Relative numerical diffusion coefficient per average grid area with respect to P/H

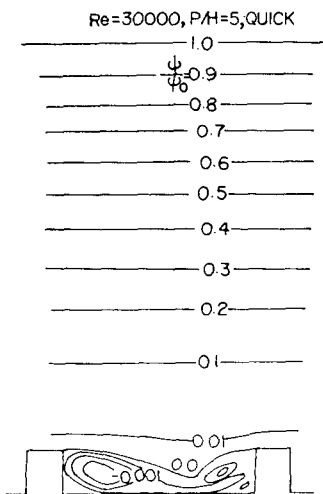


Fig. 13 Stream function, $Re=30,000$, $P/H=5$

Fig. 16 은 $Re=39000$, $P/H=10.8$ 일때 난류운동에너지를 도시한 것으로 인공조도 부근에서 큰 난류운동에너지가 발생함을 볼 수 있다.

Fig. 17 은 한 주기내의 벽면 온도상승을 나타낸 것으로서 특히 앞의 인공조도 밀면부근에서 벽면온도가 급격히 높아지는 것은 인공조도 뿌리 부근에 정체된 유체에 의한 것으로 이것이 열전달을 저해하는 가장 큰 요인이다.

이에 따라 Fig. 18의 한 주기내 국부 누셀트수는 앞뒤 인공 조도 뿌리부근에서 급격히 감소하며 대략 박리된 유동이 재부착되는 점 부근에서 최대값을 갖는다.

Fig. 19는 각각의 피치비에 대한 평균 누셀트수를 도시한 것으로서 대략 재부착점과 재박리점이 일치하는 피치비 부근에서 가장 열전달이 잘 되며 그 이하의 피치비에서는 인공조도 사이의 독립된 재순환 유동역으로 인한 유동정체가 열전달을 저해하여 열전달계

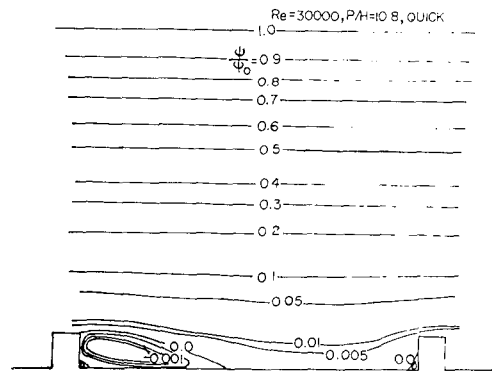


Fig. 14 Stream function, $Re=30,000$, $P/H=10.8$

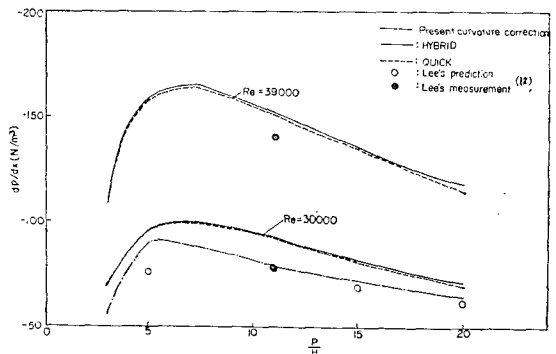


Fig. 15 Mean pressure gradient with respect to pitch ratio P/H

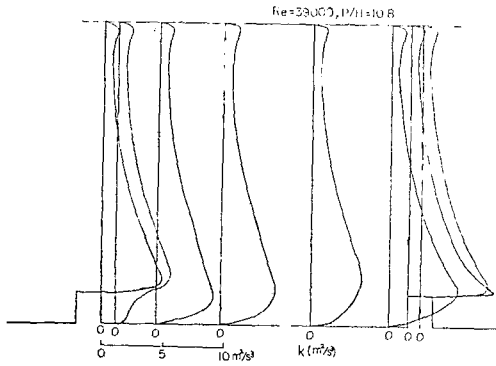


Fig. 16 Turbulent kinetic energy for $Re=39,000$, $P/H=10.8$

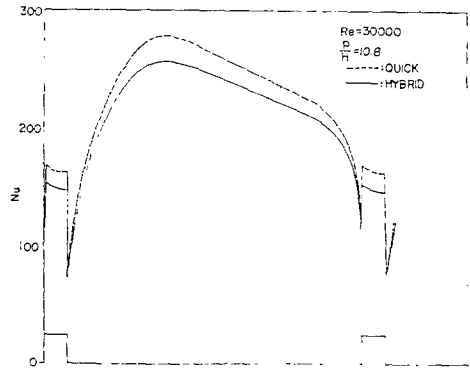


Fig. 18 Nusselt number for $Re=30,000$, $P/H=10.8$

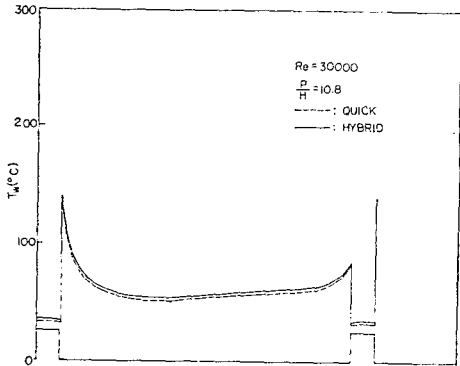


Fig. 17 Wall temperature at the rough wall, $Re=30,000$, $P/H=10.8$

이 적합하지 않았기 때문이다. 이식은 난류 프란틀수를 벽면으로부터의 거리의 함수로 나타내 주고 혼합거리 모델과 함께 사용하면 열전달 계수를 비교적 정확히 예측해 준다고 알려져 있어서^(12,14) 본 해석에서 $k-\epsilon$ 방정식 모델로 난류 열전달을 해석할 때 일반적으로 사용하는 $P_{rt}=0.9$ 대신 사용하였다. 그러나 그 결과 누셀트수가 실험값보다 낮게 나왔는데 이것은 난류 프란틀수가 높게 책정되었다는 것을 의미한다. 식(16)은 벽면 부근에서 난류 프란틀수를 $P_{rt}=0.9$ 보다 약 2배 크게 책정해 주고 벽에서 멀리 떨어진 곳에서는 보다 약간 작게 책정해 준다. 따라서 식(16)을 사용하는 대신 $P_{rt}=0.9$ 를 사용하여 열전달을 해석하면 좀더 실험치에 가까운 예측결과를 얻을 수 있을 것으로 기대된다.

수가 급격히 감소한다. 또 피치비 10 이상에서는 인공 조도간의 거리가 멀어져 매끈한 관유동에 가까워져서 인공조도로 인한 난류생성이 열전달에 기여하는 효과가 감소되어 열전달계수는 점차로 감소한다. 이러한 누셀트수의 예측에서는 QUICK Scheme과 Hybrid Scheme의 차이가 현저하다.

Fig. 19에서 본 해석에 의해 예측한 평균 누셀트수들은 공통적으로 Kang의 측정치⁽¹³⁾보다 낮은 값을 갖는 것을 알 수 있다. 이것은 본 해석에서 난류 프란틀수의 모델로 사용한 Crawford and Kays의 관계식

$$P_{rt} = \left[\frac{\alpha^2}{2} + 0.2 \alpha P_{rt} - (0.2 P_{rt})^2 (1.0 - \exp(-\alpha / (0.2 \cdot P_{rt}))) \right]^{-1}$$

여기서 $P_{rt} = (\nu_t/\nu) P_r$, $\alpha = \sqrt{1/P_{rt,ref}}$, $P_{rt,ref} = 0.86$ (16)

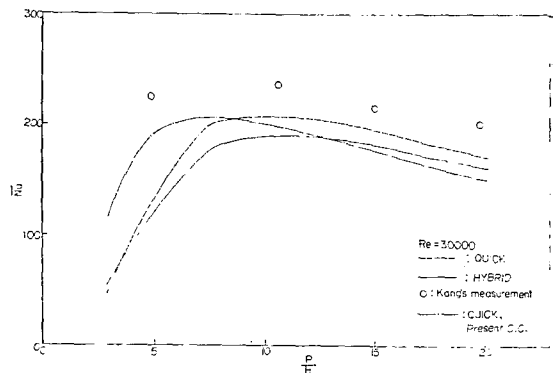


Fig. 19 Comparison of predicted average Nusselt number with those of Kang's measurements for $Re=30,000$

5. 결 론

- (1) 주기적으로 단면이 변화하는 완전확립된 난류 재순환유동장 및 난류열전달장을 수치해석하는 방법을 제시하였다.
- (2) QUICK Scheme을 간격이 변화하는 격자계에 확장하였으며 속도의 방향이 변하는 재순환유동 및 열전달의 예측에서 QUICK Scheme이 우수함을 확인하였다.
- (3) LR Model을 수정하여 유선곡률에 의한 C_μ 의 수정식을 제안하였으며 이 수정식에 의한 속도 및 압력장의 예측은 실험결과와 잘 일치하였다.
- (4) 평균압력구배는 피치비 7.5 부근에서 최대가 되며 피치비가 커지거나 작아질수록 감소한다.
- (5) 인공조도 밀면의 모서리에서는 정체된 유동장으로 인하여 벽면 온도가 급상승하며, 이 현상은 앞의 인공조도에서 현저하며 앞의 인공조도 밀면 모서리에서 최대벽면온도를 갖는다.
- (6) 한 주기내에서는 유선이 재부착되는 곳에서 누셀트수가 최대가 되며 유동이 재부착되는 피치비 7.5~10에서 가장 열전달이 잘 된다.

후 기

본 연구는 1983년도 한국과학재단 연구비로 수행된 것이며 이의 관계자 여러분께 깊은 감사를 드립니다.

참 고 문 헌

- (1) S.V. Patankar, C. Liu and E.M. Sparrow, Fully Developed and Heat Transfer in Ducts Having Streamwise-periodic Variations of Cross Sectional Area, Trans. of ASME J. Heat Transfer, Vol. 99, p. 180, 1977
- (2) S.V Patankar and. C. Prakash, An Analysis of the Effect of Plate Thickness on Laminar Flow and Heat Transfer in Interrupted Plate Passage, Int. J. Heat Transfer, Vol. 24, No. 11, pp. 1801~1810, 1981
- (3) M.A. Leschziner and W. Rodi, Calculation of Annular and Twin Parallel Jets Using Various Discretization Schemes and Turbulence Model

- Variations, Trans. of ASME Journal of Fluids Eng., Vol. 103, June, p. 352, 1981
- (4) B.E. Launder and D.B. Spalding, The Numerical Computation of Turbulent Flows, Comp. Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 3, pp. 269, 1974
- (5) K. Hanjalic and B.E. Launder, Sensitizing the Dissipation Equation to Irrotational Strains, Trans. of ASME, Journal of Fluids Engineering, March, Vol. 102, pp. 34~40, 1980
- (6) B.E. Launder, C.H. Priddin and B.S. Sharma, The Calculation of Turbulent Boundary Layers on Spinning and Curved Surfaces, Trans. of ASME, Journal of Fluids Engineering, Vol. 99, pp. 231~239, 1977
- (7) 이병곤, 인공조도를 갖는 이중동심원관의 난류 재순환유동과 열전달 해석, 고려대학교 박사학위 논문, 1985
- (8) S.V. Patankar, Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, McGraw Hill, 1980
- (9) D.P. Leonard, A Stable and Accurate Convective Modelling Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 19, pp. 59~98, 1979
- (10) G. de Vahl Davis and G.D. Mallinson, False Diffusion in Numerical Fluid Mechanics, Univ. of New South Wales, School of Mech. and Ind. eng. Rept. 1972/FMT/1
- (11) F. Durst and A.K. Rastogi, Theoretical and Experimental Investigations of Turbulent Flows with Separation, Turbulent Shear Flows Symposium, The Pennsylvania State Univ., p. 208, 1977
- (12) 이기만, 인공조도가 있는 이중동심원관내에서의 난류 열전달 실험, 고려대학교 석사학위논문, 1982
- (13) 강정석, 인공조도가 이중동심원관내의 난류 열전달에 미치는 영향에 관한 실험, 고려대학교 석사학위논문, 1983
- (14) M.E. Crawford and W.M. Kays, STAN-5, A Program for Numerical Computation of Two Dimensional Internal/External Boundary Layer Flows, Report HMT-23, Standford Univ., 1975

부 록 A

x 방향 운동량 방정식을 staggered 된 제어체적에 대해 적분하면,

$$\begin{aligned} & \left[\frac{(\rho U)_p}{CE} U_p - \frac{(\rho U)_w}{CW} U_w \right] \Delta y + \left[\frac{(\rho V)_{nw}}{CN} U_{nw} - \frac{(\rho V)_{sw}}{CS} U_{sw} \right] \Delta x = \left(\Gamma_p \frac{U_{i+1} - U_i}{\Delta x_1} - \Gamma_w \frac{U_i - U_{i-1}}{\Delta x_2} \right) \Delta y \\ & + \left(\Gamma_{nw} \frac{U_{i,j-1} - U_{i,j}}{\Delta y_1} - \Gamma_{sw} \frac{U_{i,j} - U_{i,j-1}}{\Delta y_2} \right) \Delta x + (S_u + S_p, U_{i,j}) \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (A1)$$

식 (A1)에서 대류항의 비선형속도, U_p , U_w , U_{nw} , U_{sw} 를 Fig. A1과 같이 2차곡선으로 가정하면,

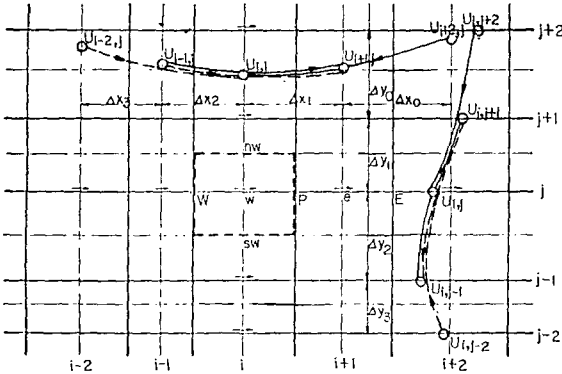


Fig. A1 QUICK Scheme in non-uniform grids

$$U(x) = ax^2 + bx + c \quad (A2)$$

로 표시되며 한 예로 $U_p(U_{i+1/2,j})$ 는 $U_{i,j}$ 및 $U_{i+1,j}$ 의 $U_{i+1/2,j}$ 의 방향에 따라 상류속도 $U_{i-1,j}$ 또는 $U_{i+2,j}$ 중 하나를 택하여 3 점에 대해 식 (A1)을 적용하고 이 식들에서 상수 a, b, c 를 결정한다. 또 $x_{i+1/2}$ 는 weighting factor (f_e)를 이용하여 치환한다. $U_w(U_{i+1/2,j})$ 에 대하여도 이와 같이 하면 $U_{i+1/2,j}$ 와 $U_{i-1/2,j}$ 는 다음과 같이 표시된다.

여기서 C^u, C^v 는 x, y 방향의 제어체적 경계면으로 출입하는 유량이다.

(1) $C^u \geq 0$ 인 경우

$$\begin{aligned} U_{i+1/2,j} &= f_e U_{i,j} + (1-f_e) U_{i+1,j} + \frac{f_e(1-f_e)}{\Delta x_1 + \Delta x_2} \\ & \left\{ \Delta x_1 \left(1 + \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} \right) U_{i+1,j} - \Delta x_1 U_{i,j} - \frac{\Delta x_1^2}{\Delta x_2} U_{i-1,j} \right\} \end{aligned} \quad (A3)$$

$$U_{i-1/2,j} = f_w U_{i,j} + (1-f_w) U_{i-1,j} + \frac{f_w(1-f_w)}{\Delta x_2 + \Delta x_3}$$

$$\left\{ \Delta x_2 \left(1 + \frac{\Delta x_2}{\Delta x_3} \right) U_{i-1,j} - \Delta x_2 U_{i,j} - \frac{\Delta x_2^2}{\Delta x_3} U_{i-2,j-2} \right\} \quad (A4)$$

여기서 f_e, f_w 는

$$\begin{aligned} f_e &= \frac{x_{i+1} - x_e}{x_{i+1} - x_i} \\ f_w &= \frac{x_w - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \end{aligned} \quad (A5)$$

이다.

(2) $C^u < 0$ 인 경우

$$\begin{aligned} U_{i+1/2,j} &= f_e U_{i,j} + (1-f_e) U_{i-1,j} + \frac{f_e(1-f_e)}{\Delta x_1 + \Delta x_2} \\ & \left\{ \Delta x_2 \left(1 + \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} \right) U_{i,j} - \Delta x_2 U_{i-1,j} - \frac{\Delta x_2^2}{\Delta x_1} U_{i+1,j} \right\} \end{aligned} \quad (A6)$$

$$\begin{aligned} U_{i-1/2,j} &= f_w U_{i,j} + (1-f_w) U_{i-1,j} + \frac{f_w(1-f_w)}{\Delta x_1 + \Delta x_2} \\ & \left\{ \Delta x_2 \left(1 + \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} \right) U_{i,j} - \Delta x_2 U_{i-1,j} - \frac{\Delta x_2^2}{\Delta x_1} U_{i+1,j} \right\} \end{aligned} \quad (A7)$$

또 $U_{nw}(U_{i,j+1/2})$ 와 $U_{sw}(U_{i,j-1/2})$ 에 대해서도 이와 유사한 다음의 식을 얻을 수 있다.

(3) $C^v \geq 0$ 인 경우

$$\begin{aligned} U_{i,j+1/2} &= 0.5 U_{i,j} + 0.5 U_{i,j+1} + \frac{0.25}{\Delta y_1 + \Delta y_2} \\ & \left\{ \Delta y_1 \left(1 + \frac{\Delta y_1}{\Delta y_2} \right) U_{i,j} - \Delta y_1 U_{i,j+1} \right. \\ & \left. - \frac{\Delta y_1^2}{\Delta y_2} U_{i,j-1} \right\} \end{aligned} \quad (A8)$$

$$\begin{aligned} U_{i,j-1/2} &= 0.5 U_{i,j} + 0.5 U_{i,j-1} + \frac{0.25}{\Delta y_2 + \Delta y_3} \\ & \left\{ \Delta y_2 \left(1 + \frac{\Delta y_2}{\Delta y_3} \right) U_{i,j-1} - \Delta y_2 U_{i,j} \right. \\ & \left. - \frac{\Delta y_2^2}{\Delta y_3} U_{i,j-1} \right\} \end{aligned} \quad (A9)$$

(4) $C^v < 0$ 인 경우

$$\begin{aligned} U_{i,j+1/2} &= 0.5 U_{i,j} + 0.5 U_{i,j+1} + \frac{0.25}{\Delta y_0 + \Delta y_1} \\ & \left\{ \Delta y_2 \left(1 + \frac{\Delta y_1}{\Delta y_0} \right) U_{i,j+1} - \Delta y_1 U_{i,j} \right. \\ & \left. - \frac{\Delta y_1^2}{\Delta y_0} U_{i,j+2} \right\} \end{aligned} \quad (A10)$$

$$\begin{aligned} U_{i,j-1/2} &= 0.5 U_{i,j} + 0.5 U_{i,j-1} + \frac{0.25}{\Delta y_1 + \Delta y_2} \Delta y_2 \\ & \left(1 + \frac{\Delta y_2}{\Delta y_1} \right) U_{i,j} - \Delta y_2 U_{i,j-1} \\ & - \frac{\Delta y_2^2}{\Delta y_1} U_{i,j+1} \end{aligned} \quad (A11)$$

위 속도 식들에서 우변 첫째항과 둘째항은 Central Difference Scheme과 같으며, 우변의 나머지 항들 중

$U_{i,j}$ 를 포함하는 항의 계수들을 각각 $S_{p_{ee}}, S_{p_{ew}}, S_{p_{en}}, S_{p_{es}}$ 라하고 나머지 항들을 $S_{c_{qe}}, S_{c_{qw}}, S_{c_{qn}}, S_{c_{qs}}$ 라 하면 식 (A 1)은 다음의 차분 방정식으로 표시된다.

$$CE[f_e U_{i,j} + (1-f_e) U_{i+1,j} + S_{p_{ee}} U_{i,j} + S_{c_{qe}}] - DE(U_{i+1,j} - U_{i,j}) - CW[f_w U_{i,j} + (1-f_w) U_{i-1,j} + S_{p_{ew}} U_{i,j} + S_{c_{qw}}] + DW(U_{i,j} - U_{i-1,j}) + CN(0.5 U_{i,j} + 0.5 U_{i,j+1} + S_{p_{en}} U_{i,j} + S_{c_{qn}}] - DN(U_{i,j+1} - U_{i,j}) - CS[0.5 U_{i,j} + 0.5 U_{i,j-1} + S_{p_{es}} U_{i,j} + S_{c_{qs}}] + DS(U_{i,j} - U_{i,j-1}) = (S_c + S_p U_p) Vol \quad (A 12)$$

$$A_p U_p = A_E U_E + A_W U_W + A_N U_N + A_S U_S + U_p S_{p_e} + S_{c_e} + (S_c + S_p U_p) Vol \quad (A 13)$$

여기서, $S_{c_e} \equiv -CE \cdot S_{c_{qe}} + CW \cdot S_{c_{qw}} - CN \cdot S_{c_{qn}} + CS \cdot S_{c_{qs}}$
 $S_{p_e} \equiv -CE \cdot S_{p_{ee}} + CW \cdot S_{p_{ew}} - CN \cdot S_{c_{qn}} + CS \cdot S_{c_{qs}}$
 $Vol \equiv \Delta x \Delta y$
 $C \equiv \rho U \Delta y$ (또는 $\rho V \Delta x$)
 $D \equiv \frac{\Gamma}{\Delta x}$ (또는 $\frac{\Gamma}{\Delta y}$) 이며 A 는 속도 계수 이고 e, w, n, s 는 방향을 나타낸다.

부 록 B

Fig. 4의 Corner control volume에서 축방향운동량 정방식(6)의 좌면 두번째 항을 다음과 같이 두 구간으로 나누어 적분한다.

$$\int_w^n \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \left(\rho V U - \mu_{eff} \frac{\partial U}{\partial r} \right) \right\} dr dx = \int_w^e \left\{ r \left(\rho V U - \mu_{eff} \frac{\partial U}{\partial r} \right) \right\}_s dx = \left\{ r \left(\rho V U - \mu_{eff} \frac{\partial U}{\partial r} \right) \right\}_n \Delta x - \int_w^e \left\{ r \left(\rho V U - \mu_{eff} \frac{\partial U}{\partial r} \right) \right\}_s dx - \int_p^e \left\{ r \left(\rho V U - \mu_{eff} \frac{\partial U}{\partial r} \right) \right\}_s dx \quad (B1)$$

제 (I) 항은 정규형으로 차분화하면 되며,

제 (II) 항은 좌측의 반제어 체적에 대한 적분으로 south control face에서는 대류항은 없고 확산항만 있으므로

$$(II) = -A_{SL}(0 - U_{PL}) \quad (B2)$$

여기서, $A_{SL} = D_{SL} = \mu_{eff} s_L \frac{1}{2} \frac{\delta x_u}{\delta y_s}$

$$U_{PL} = \frac{1-f_w}{2} U_w + \frac{1+f_w}{2} U_p$$

이다.

제 (III) 항은 우측 반제어 체적에 대한 적분으로 대류 항 및 확산항이 공존하므로

$$(III) = -A_{SR}(U_{SR} - U_{PR}) \quad (B3)$$

여기서

$$A_{SR} = [|0.5 C_{SR}|, D_{SR}] + 0.5 C_{SR}$$

$$U_{SR} = \frac{1-f_e}{2} U_{SE}$$

$$U_{PR} = \frac{1-f_e}{2} U_E + \frac{1+f_e}{2} U_p$$

$$C_{SR} = \rho_{SR} \cdot \frac{1}{2} V_p \cdot \frac{1}{2} A_s$$

$$D_{SR} = \mu_{effSR} \frac{1}{2} A_s / \delta y_s$$

따라서 축방향운동량 방정식에 대한 차분 방정식은

$$(A_E + A_W + A_N) U_p = (A_E - A_{SE}) U_E + (A_W - A_{SW}) U_w + A_N U_N + (A_{SSU} + S_u Vol) + (S_p Vol - A_{sp}) U_p \quad (B4)$$

여기서

$$A_{SE} = A_{SR} \frac{1-f_e}{2}$$

$$A_{SW} = A_{SL} \frac{1-f_w}{2}$$

$$A_{ssu} = A_{SR} \frac{1-f_e}{2} U_{SE}$$

$$A_{sp} = A_{SL} \frac{1+f_w}{2} + A_{SR} \frac{1+f_e}{2}$$

$$f_w = \frac{Ww}{PW}, \quad f_e = \frac{eE}{PE}$$

이다.