

<論 文>

직교이방성 복합재료 원통셸의 자유진동 해석

이 영 신* · 문 흥 기**

(1986년 7월 5일 접수)

Free Vibration Analysis of Orthotropic and Laminated Composite Circular Cylindrical Shells

Young Shin Lee and Hong Key Moon

Key Words; Free Vibration(자유진동), Orthotropy(직교 이방성), Composite Circular Cylindrical Shell(복합재료 원통셸), Frequency Equation(진동수 방정식)

Abstract

A general analytical procedure is developed for evaluating the free vibration characteristics of orthotropic and laminated composite circular cylindrical shells.

The solution is obtained through a direct solution procedure with axial mode displacements presented as simple Fourier series expressions.

On the basis of the various thin shell theories most commonly used, the frequency equation is derived and is expressed in a unified form.

The present analysis can deal with shells which are made of an arbitrary number of bonded layers each with a different thickness and different elastic orthotropic properties, and have classical boundary conditions of any kind.

Several examples are shown with the consideration of the effects of fiber orientations and boundary conditions as well as different shell geometries and material properties.

To verify the validity and accuracy of this analysis, the results are compared with the experimental and analytical results of other workers. Agreement among the various results is found to be fairly good.

1. 서 론

원통셸의 진동문제는 최근에 구조물의 경량화, 고강도화 등에 따라 많은 연구자들에 의해 큰 관심을 끌

어왔다.

Arnold와 Warburton⁽¹⁾의 선구적 연구를 시작으로 많은 연구가 수행 되었으며, 1973년에 Leissa⁽²⁾에 의해 집대성 되었다.

1981년에 Chung⁽³⁾은 임의의 형태의 경계조건을 갖는 등방성 원통셸의 진동특성에 대한 일반적인 해법을 Sanders⁽⁴⁾의 이론에 기초하여 유도하였다. 그는 축방향의 modal displacement를 단순 Fourier 급수로 표현

* 정회원, 충남대학교 공과대학 기계설계공학과

** 정회원, 충남대학교 대학원

할 수 있음을 보였다.

최근에 원통셀은 주름, 보강재 및 복합재료 등으로 제작하게 되었으며 이들은 직교이방성 및 준 직교이방성으로 취급할 수 있는 경우가 많으며 이에 대해서는 국내외적으로 활발한 연구가 수행되고 있다^(5,6). 직교이방성 및 복합재료 원통셀의 진동에 관한 연구는 Dong⁽¹⁾의 연구가 효시가 되고 있다. 그 후 많은 연구자들에 의해 복합재료 원통셀 및 패넌의 진동에 관한 해석이 이루어졌다⁽⁸⁻¹⁴⁾. 그러나 기존의 연구들은 거의 전부가 단순지진된 원통셀이나 패넌에 국한되어 있다.

본 연구에서는 직교이방성 복합재료 원통셀의 진동 방정식을 Sanders⁽⁴⁾, Love⁽¹⁵⁾ 및 Donnell⁽¹⁶⁾의 셀 이론에 기초하여 유도하고 이를 통일된 형태로 표현하였으며 등방성 원통셀에 대한 Chung⁽³⁾의 해석법을 채용하여 임의의 경계조건을 갖는 직교이방성 복합재료 원통셀에 대해서 간편히 이용할 수 있는 유용한 해석방법을 제시하였다.

2. 수학적 공식화

2.1 해석모델

Fig. 1에서 두께 및 탄성특성이 각각 다른 직교이방성 재료의 적층판을 적층시킨 원통셀을 보여준다. 셀 중앙면위의 임의의 점의 위치는 좌표계 (x,y)로 표시하고 반경방향의 좌표는 z이다.

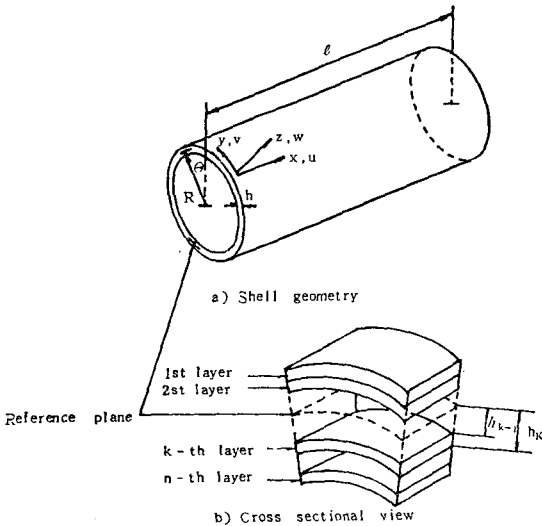


Fig. 1 Coordinate system and structure of the laminated cylindrical shell

또한 중앙면위의 임의의 점에서의 축방향, 원주방향 그리고 반경방향의 변위성분을 각각 u, v, w로 표시한다. 원통셀의 반경은 R, 두께 h 그리고 길이는 L이다.

2.2 운동 방정식

기존 여러 셀이론에 기초한 운동 방정식을 Table 1에 열거된 tracers를 사용하여 표시하면 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} N_{x,x} + N_{y,y} - C_4 R^{-1} M_{x,y} &= \rho r u_{,tt} \\ N_{y,x} + N_{y,y} + C_4 R^{-1} M_{x,y} + C_1 R^{-1} M_{y,y} \\ &= \rho r v_{,tt} \\ M_{x,xx} + 2M_{x,y,y} + M_{y,yy} - R^{-1} N_y &= \rho r w_{,tt} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

여기서 t는 시간이고 관성항 ρr는

$$\rho r = \int_{-h/2}^{h/2} \rho_0 dz = \sum_{k=1}^n \rho_k (h_k - h_{k-1}) \quad (2)$$

로 정의되며 ρ_k는 k번째 적층판의 질량밀도(mass density)이다.

셀 중앙면의 변형률-변위관계식은

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x^0 &= u_{,x} \\ \epsilon_y^0 &= v_{,y} + w R^{-1} \\ \epsilon_{xy}^0 &= u_{,y} + v_{,x} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

곡률변화는

$$\left. \begin{aligned} K_x &= -w_{,xx} \\ K_y &= -w_{,yy} + C_2 R^{-1} v_{,y} \\ K_{xy} &= -2w_{,xy} + C_3 R^{-1} v_{,x} - C_4 R^{-1} u_{,y} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

로 정의된다.

Table 1 Thin shell theory tracers and their values

Theory	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄
Sanders ⁽⁴⁾	1	1	3/2	1/2
Love ⁽¹⁵⁾	1	1	1	0
Donnell ⁽¹⁶⁾	0	0	0	0

적층판의 구성방정식 (constitutive equation)은

$$\left\{ \begin{matrix} N_i \\ M_i \end{matrix} \right\} = \left[\begin{matrix} A_{ij} & B_{ij} \\ B_{ij} & D_{ij} \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} \epsilon_j^0 \\ K_j \end{matrix} \right\}, \quad (i, j=1, 2, 6) \quad (5)$$

이며 A_{ij}, B_{ij} 및 D_{ij}는 각각 셀의 신장, 조합 및 굽힘 강성계수들로 다음과 같이 정의된다.

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(1, z, z^2) dz, \quad (i, j=1, 2, 6) \quad (6)$$

각 적층 (lamina)의 평면응력 강성계수는

$$\left. \begin{aligned} Q_{11} &= E_1 / (1 - \nu_{12}\nu_{21}) \\ Q_{12} &= E_2 \nu_{12} / (1 - \nu_{12}\nu_{21}) \\ Q_{22} &= E_2 / (1 - \nu_{12}\nu_{21}) \\ Q_{66} &= G_{12} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

여기서 1, 2 방향은 적층의 x, y 방향과 각각 일치한다. 합응력, 합모멘트 및 전단합응력과 변위와의 관계식은 식(3)과 (4)를 식(5)에 대입하여 다음과 같이 주어진다.

$$\left. \begin{aligned} N_x &= A_{11}u_{,x} + A_{12}(v_{,y} + R^{-1}w) - B_{11}w_{,xx} \\ &\quad - B_{12}(w_{,yy} - C_2R^{-1}v_{,y}) \\ N_y &= A_{12}u_{,x} + A_{22}(v_{,y} + R^{-1}w) - B_{12}w_{,xx} \\ &\quad - B_{22}(w_{,yy} - C_2R^{-1}v_{,y}) \\ N_{xy} &= A_{66}(v_{,x} + u_{,y}) + B_{66}(-2w_{,xy} \\ &\quad + C_3R^{-1}v_{,x} - C_4R^{-1}u_{,y}) \\ M_x &= B_{11}u_{,x} + B_{12}(v_{,y} + R^{-1}w) - D_{11}w_{,xx} \\ &\quad - D_{12}(w_{,yy} - C_2R^{-1}v_{,y}) \\ M_y &= B_{12}u_{,x} + B_{22}(v_{,y} + R^{-1}w) - D_{12}w_{,xx} \\ &\quad - D_{22}(w_{,yy} - C_2R^{-1}v_{,y}) \\ M_{xy} &= B_{66}(v_{,x} + u_{,y}) + D_{66}(-2w_{,xy} \\ &\quad + C_3R^{-1}v_{,x} - C_4R^{-1}u_{,y}) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

무차원 좌표계 및 무차원 매개변수를 아래와 같이 도입하고

$$\left. \begin{aligned} \eta &= x/l, \quad \xi = y/R, \quad 0 \leq \eta, \xi \leq 1 \\ \lambda &= R/l, \quad \bar{\rho}_T = \rho_T R^2 / A_{11} \\ (\bar{A}_{ij}, \bar{B}_{ij}, \bar{D}_{ij}) &= (A_{ij}, B_{ij}/R, D_{ij}/R^2) / A_{11}, \\ &\quad (i, j = 1, 2, 6) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

식(8)과 (9)를 식(1)에 대입하면 변위 u, v, w 만으로 표시되는 운동 방정식을 얻는다.

$$[L]\{\delta\} = \{0\}, \quad \{\delta\} = \{u, v, w\}^T \quad (10)$$

여기서 선형 편미분 연산자 L 은 다음과 같이 무차원 형태로 주어진다.

$$\left. \begin{aligned} L_{11} &= \lambda^2 ()_{,\eta\eta} + (\bar{A}_{66} - 2C_4\bar{B}_{66} + C_4^2D_{66}) ()_{,\xi\xi} \\ &\quad - \bar{\rho}_T ()_{,\xi\xi} \\ L_{12} &= \lambda[\bar{A}_{12} + \bar{A}_{66} + C_2\bar{B}_{12} + (C_3 - C_4)\bar{B}_{66} \\ &\quad - C_3C_4\bar{D}_{66}] ()_{,\eta\xi} \\ L_{13} &= \lambda\bar{A}_{12} ()_{,\eta} - \lambda^2\bar{B}_{11} ()_{,\eta\eta} - \lambda[\bar{B}_{12} \\ &\quad + 2\bar{B}_{66} - 2C_4\bar{D}_{66}] ()_{,\eta\xi\xi} \\ L_{21} &= \lambda[\bar{A}_{12} + \bar{A}_{66} + C_1\bar{B}_{12} + (C_3 - C_4)\bar{B}_{66} \\ &\quad - C_3C_4\bar{D}_{66}] ()_{,\eta\xi} \\ L_{22} &= \lambda^2[\bar{A}_{66} + 2C_3\bar{B}_{66} + C_3^2D_{66}] ()_{,\eta\eta} + [\bar{A}_{22} \\ &\quad + (C_1 + C_2)\bar{B}_{22} + C_1C_2\bar{D}_{22}] ()_{,\xi\xi} - \bar{\rho}_T ()_{,\xi\xi} \\ L_{23} &= (\bar{A}_{22} + C_1\bar{B}_{22}) ()_{,\xi} - (\bar{B}_{22} + C_1\bar{D}_{22}) \\ &\quad ()_{,\xi\xi\xi} - \lambda^2(\bar{B}_{12} + 2\bar{B}_{66} + C_1\bar{D}_{12} + 2C_3\bar{D}_{66}) \\ &\quad ()_{,\eta\eta\xi} \\ L_{31} &= L_{13} \\ L_{32} &= (\bar{A}_{22} + C_2\bar{B}_{22}) ()_{,\xi} - (\bar{B}_{22} + C_2\bar{D}_{22}) \\ &\quad ()_{,\xi\xi\xi} - \lambda^2(\bar{B}_{12} + 2\bar{B}_{66} + C_2\bar{D}_{12} \\ &\quad + 2C_3\bar{D}_{66}) ()_{,\eta\eta\xi} \\ L_{33} &= \bar{A}_{22} ()_{,\xi} - 2\lambda^2\bar{B}_{12} ()_{,\eta\eta} - 2\bar{B}_{22} ()_{,\xi\xi} \\ &\quad + \lambda^4\bar{D}_{11} ()_{,\eta\eta\eta\eta} + 2\lambda^2(\bar{D}_{12} + 2\bar{D}_{66}) ()_{,\eta\eta\xi\xi} \\ &\quad + \bar{D}_{22} ()_{,\xi\xi\xi\xi} + \bar{\rho}_T ()_{,\xi\xi} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

2.3 Modal Function

자유진동의 임의의 mode에서 변위 u, v, w 는 원주방향 mode 수 n 에 대해 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, t) &= \phi_u(x) \cos(ny/R) \sin \omega t \\ v(x, y, t) &= \phi_v(x) \sin(ny/R) \sin \omega t \\ w(x, y, t) &= \phi_w(x) \cos(ny/R) \sin \omega t \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

여기서 mode function ϕ_u, ϕ_v 및 ϕ_w 는 양단에서 축방향으로 구속이 없는 단순지지(SNA-SNA)된 경계조건식(13)을 엄밀하게 만족하는 식(14)와 같이 가정한다.

$$N_x = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad M_x = 0 \quad (x = 0, l) \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_u(x) &= A_{0n} + \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \\ \phi_v(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_{nn} \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \\ \phi_w(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} C_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

원통셀의 가능한 경계조건들은 Table 2에서 보여지는 것처럼 16 가지 형태가 존재하며 이들은 다음과 같은 양들의 조합으로 이루어진다.

$$\left\{ \begin{aligned} N_x \text{ or } u, \quad \hat{N}_{xy} \text{ or } v \\ \hat{Q}_x \text{ or } w, \quad M_x \text{ or } \partial w / \partial x \end{aligned} \right\} x = 0, l \quad (15)$$

여기서 \hat{N}_{xy} 와 \hat{Q}_x 는 단위 길이당의 유효 전단 합응력(effective shear stress resultants)과 Kirchoff의 유효 전단 합력(Kirchoff's effective shear resultants)으로 다음과 같이 정의된다.

$$\hat{N}_{xy} = N_{xy} + C_3R^{-1}M_{xy} \quad (16)$$

$$\hat{Q}_x = M_{x,x} + 2M_{xy,y} \quad (17)$$

식(16)과 (17)을 식(3)~(5)를 적용하여 변위 u, v, w 항으로 표현하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \hat{N}_{xy} &= [A_{66} + (C_3 - C_4)B_{66}R^{-1} - C_3C_4D_{66}R^{-2}]u_{,y} \\ &\quad + [A_{66} + 2C_3B_{66}R^{-1} + C_3^2D_{66}R^{-2}]v_{,x} - [2(B_{66} \\ &\quad + C_3D_{66}R^{-1})]w_{,xy} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \hat{Q}_x &= B_{11}u_{,xx} + 2(B_{66} - C_4D_{66}R^{-1})u_{,yy} \\ &\quad + (B_{12} + C_2D_{12}R^{-1} + 2B_{66} + 2C_3D_{66}R^{-1})v_{,xy} \\ &\quad + B_{12}w_{,x}R^{-1} - D_{11}w_{,xxx} - (D_{12} + 4D_{66})w_{,xyy} \end{aligned} \quad (19)$$

3. 일반해

식(14)와 같이 가정한 mode function은 양단에서 접선방향의 구속이 없는 단순지지(FSNT-FSNT)셀의 경계조건식

$$u = 0, \quad \hat{N}_{xy} = 0, \quad \hat{Q}_x = 0, \quad \partial w / \partial x = 0, \quad (x = 0, l) \quad (20)$$

중 어느 한 항도 만족 시키지 못한다.

따라서 식(14)를 사용하여 FSNT 셀에 대한 일반해

Table 2 Boundary conditions of cylindrical shell

Case	Code	Description	Boundary conditions
1	C	Clamped	$u \quad v \quad w \quad \partial w / \partial x$
2	CNA	Clamped with no axial constraints	$N_x \quad v \quad w \quad \partial w / \partial x$
3	CNT	Clamped with no tangential constraints	$u \quad \hat{N}_{xy} \quad w \quad \partial w / \partial x$
4	CNAT	Clamped with no axial, tangential constraints	$N_x \quad \hat{N}_{xy} \quad w \quad \partial w / \partial x$
5	SS	Simply-supported	$u \quad v \quad w \quad M_x$
6	SNA	Simply-supported with no axial constraints	$N_x \quad v \quad w \quad M_x$
7	SNT	Simply-supported with no tangential constraints	$u \quad \hat{N}_{xy} \quad w \quad M_x$
8	SNAT	Simply-supported with no axial, tangential constraints	$N_x \quad \hat{N}_{xy} \quad w \quad M_x$
9	FS	Freely-supported	$u \quad v \quad \hat{Q}_x \quad \partial w / \partial x$
10	FSNA	Freely-supported with no axial constraints	$N_x \quad v \quad \hat{Q}_x \quad \partial w / \partial x$
11	FSNT	Freely-supported with no tangential constraints	$u \quad \hat{N}_{xy} \quad \hat{Q}_x \quad \partial w / \partial x$
12	FSNAT	Freely-supported with no axial tangential constraints	$N_x \quad \hat{N}_{xy} \quad \hat{Q}_x \quad \partial w / \partial x$
13	FAT	Free with axial, tangential constraints	$u \quad v \quad \hat{Q}_x \quad \partial w / \partial x$
14	FT	Free with tangential constraints	$N_x \quad v \quad \hat{Q}_x \quad M_x$
15	FA	Free with axial constraints	$u \quad \hat{N}_{xy} \quad \hat{Q}_x \quad M_x$
16	F	Free	$N_x \quad \hat{N}_{xy} \quad \hat{Q}_x \quad M_x$

를 유도 함으로써 이로부터 특정한 경계조건에 대한 엄밀해를 얻을 수 있다.

식 (12) 와 그 도함수를 변위 운동 방정식 (10) 에 대입 하여 식 (14) 의 계수들을 구하면 다음과 같다.

$$A_{0n} = \frac{1}{2(a_{21} - \Omega)} \left[a_1(\bar{u}_0 + \bar{u}_1) - a_3(v_0 + v_1) - a_4(w_0 + w_1) + a_{31}(\bar{w}_0 + \bar{w}_1) \right], \quad \Omega \neq a_{21} \quad (21)$$

$$\begin{pmatrix} A_{mn} \\ B_{mn} \\ C_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_\alpha & a_\beta & a_r \\ b_\beta & b_r \\ S_{\gamma mn} & c_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1[\bar{u}_0 + \bar{u}_1(-1)^n] - a_3[v_0 + v_1(-1)^n] \\ -(a_{31}m^2 + a_4) \cdot [w_0 + w_1(-1)^n] \\ + a_{31}[\bar{w}_0 + \bar{w}_1(-1)^n] \\ - a_5m[v_0 + v_1(-1)^n] - a_7m[w_0 + w_1(-1)^n] \\ a_{31}[\bar{u}_0 + \bar{u}_1(-1)^n] - a_{7n}[v_0 + v_1(-1)^n] - (a_9m^2 + a_{10}m) \cdot [w_0 + w_1(-1)^n] \\ + a_9m[\bar{w}_0 + \bar{w}_1(-1)^n] \end{pmatrix}, \quad \square_{mn} \neq 0 \quad (22)$$

여기서

$$\left. \begin{aligned} a_\alpha &= (S_{22}S_{33} - S_{23}S_{22}) / \square_{mn}, \\ a_\beta &= (S_{13}S_{32} - S_{12}S_{33}) / \square_{mn}, \\ a_r &= (S_{12}S_{23} - S_{13}S_{22}) / \square_{mn}, \\ b &= (S_{11}S_{33} - S_{13}^2) / \square_{mn}, \\ b_r &= (S_{13}S_{21} - S_{11}S_{23}) / \square_{mn}, \\ c_r &= (S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21}) / \square_{mn} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

이코

$$\square_{mn} = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ & S_{22} & S_{23} \\ S_{\gamma mn} & & S_{33} \end{vmatrix} = b_1m^8 + b_2m^6 + b_3m^4 + b_4m^2 + b_5 \quad (24)$$

여기서

$$\left. \begin{aligned} S_{11} &= a_1m^2 + a_{21} - \Omega, \quad S_{12} = a_{3m}, \\ S_{13} &= a_{31}m^3 + a_4m \\ S_{22} &= a_5m^2 + a_{61} - \Omega, \quad S_{23} = a_7m^2 + a_8, \\ S_{33} &= a_9m^4 + a_{10}m^2 + a_{12} - \Omega \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= (a_1a_9 - a_{31}^2)a_5 \\ b_2 &= a_1a_5a_{10} - a_1a_7^2 - a_3^2a_9 + (a_1a_6 + a_2a_5)a_9 \\ &\quad + (2a_3a_7 - 2a_4a_5 - a_{31}a_6)a_{31} \\ b_3 &= 2a_3a_4a_7 - a_4^2a_5 - 2a_1a_7a_8 - a_3^2a_{10} + a_2a_6a_9 \\ &\quad + (a_1a_6 + a_2a_5)a_{10} + a_1a_5a_{11} - a_2a_7^2 + 2 \cdot \\ &\quad (a_3a_8 - a_4a_6)a_{31} \\ b_4 &= 2a_3a_4a_8 - a_1a_8^2 + a_2a_6a_{10} + (a_1a_6 + a_2a_5) \cdot \\ &\quad a_{11} - a_4^2a_6 - 2a_2a_7a_8 - a_3^2a_{11} \\ b_5 &= a_2a_6a_{11} - a_2a_6^2 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

여기서 이 용한 다른 상수들은 다음과 같은 값이다.

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= (\lambda\pi)^2, \quad a_2 = a_{21} - \Omega \\ a_{21} &= [\bar{A}_{66} - 2C_4\bar{B}_{66} + C_4^2\bar{D}_{66}]n^2, \\ a_3 &= (-a\pi) [\bar{A}_{12} + \bar{A}_{66} + C_2\bar{B}_{12} + (C_3 - C_4)\bar{B}_{66} \\ &\quad - C_3C_4\bar{D}_{66}]n \\ a_{31} &= -(\lambda\pi)^3\bar{B}_{11} \\ a_4 &= -(\lambda\pi) [(\bar{B}_{12} + 2\bar{B}_{66} - 2C_4\bar{D}_{66})n^2 + \bar{A}_{12}] \\ a_5 &= (\lambda\pi)^2 [\bar{A}_{66} + 2C_3\bar{B}_{66} + C_3^2\bar{D}_{66}] \\ a_6 &= a_{61} - \Omega, \\ a_{61} &= [\bar{A}_{22} + (C_1 + C_2)\bar{B}_{22} + C_1C_2\bar{D}_{22}]n^2 \\ a_7 &= (\lambda\pi)^2 [\bar{B}_{12} + 2\bar{B}_{66} + C_1\bar{D}_{12} + 2C_3\bar{D}_{66}]n \\ a_8 &= [(\bar{A}_{22} + C_1\bar{B}_{22}) + (\bar{B}_{22} + C_1\bar{D}_{22})n^2]n \\ a_9 &= (\lambda\pi)^4\bar{D}_{11}, \\ a_{10} &= (\lambda\pi)^2 [2(\bar{D}_{12} + 2\bar{D}_{66})n^2 + 2\bar{B}_{12}] \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$a_{11} = a_{12} - \Omega, \quad a_{12} = [\bar{D}_{22}n^4 + 2\bar{B}_{22}n^2 + \bar{A}_{22}]$$

$$\Omega = (\omega/\omega_0)^2, \quad \omega_0^2 = E_1/\rho r R^2 (1 - \nu_{12}\nu_{21})$$

식 (21)과 (22)에 포함된 규정되지 않은 양 v_0, v_i, w_0, w_i 은 기하학적 경계차와 관련하여 다음같이 된다.

$$\left. \begin{aligned} v_0 &= -\frac{2}{\pi \sin(ny/R)} v(0, y), \\ v_i &= \frac{2}{\pi \sin(ny/R)} v(i, y) \\ w_0 &= -\frac{2}{\pi \sin(ny/R)} w(0, y), \\ w_i &= \frac{2}{\pi \sin(ny/R)} w(i, y) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

나머지 4개의 양 $\bar{u}_0, \bar{u}_i, \bar{w}_0, \bar{w}_i$ 은 아직 규정되지 않은 N_x, M_x 와 다음식으로 관련되어 있다.

$$\left\{ \begin{aligned} N_x(0, y) \\ -N_x(i, y) \end{aligned} \right\} = -\frac{l}{2R^2} \left[a_1 \begin{Bmatrix} \bar{u}_0 \\ \bar{u}_i \end{Bmatrix} - (a_3 + q_1) \begin{Bmatrix} v_0 \\ v_i \end{Bmatrix} \right]$$

$$- (a_4 + q_4) \begin{Bmatrix} w_0 \\ w_i \end{Bmatrix} + a_{31} \begin{Bmatrix} \bar{w}_0 \\ \bar{w}_i \end{Bmatrix} \cos(ny/R) \quad (29)$$

$$\left\{ \begin{aligned} M_x(0, y) \\ -M_x(i, y) \end{aligned} \right\} = \frac{l^2}{2R^2} \left[a_{31} \begin{Bmatrix} \bar{u}_0 \\ \bar{u}_i \end{Bmatrix} + q_{23} \begin{Bmatrix} v_0 \\ v_i \end{Bmatrix} + q_{13} \begin{Bmatrix} w_0 \\ w_i \end{Bmatrix} \right]$$

$$+ a_9 \begin{Bmatrix} \bar{w}_0 \\ \bar{w}_i \end{Bmatrix} \cos(ny/R) \quad (30)$$

식 (21)과 (22)를 FSNT 셀에 대한 8개의 경계치 $v_0, v_i, w_0, w_i, \bar{N}_x^0, \bar{N}_x^i, \bar{M}_x^0, \bar{M}_x^i$ 성분으로 표시하기 위해 식 (29)와 (30)을 식 (21)과 (22)에 대입하면 아래와 같다.

$$A_{0n} = \frac{1}{2(a_{21} - \Omega)} [q_1(v_0 + v_i) + q_4(w_0 + w_i) - \frac{2}{l} (\bar{N}_x^0 + \bar{N}_x^i)], \quad \Omega \neq a_{21} \quad (31)$$

$$\left\{ \begin{aligned} A_{nn} \\ B_{nn} \\ C_{nn} \end{aligned} \right\} = \left(\begin{array}{cc|cc} a_\alpha & a_\beta & a_r & \\ & & & b_\beta & b_l \\ S_{y,nn} & & & & c_r \end{array} \right) \left\{ \begin{aligned} q_1[v_0 + v_i(-1)^n] + (q_4 - a_{31}m^2)[w_0 + w_i(-1)^n] - \frac{2R^2}{l} [\bar{N}_x^0 + \bar{N}_x^i(-1)^n] \\ q_2m[v_0 + v_i(-1)^n] + q_3m[w_0 + w_i(-1)^n] \\ q_5m[v_0 + v_i(-1)^n] + q_6m[w_0 + w_i(-1)^n] - \frac{2R^2}{l} [w_0 + w_i(-1)^n] - \frac{2R^2}{l} m[\bar{M}_x^0 + \bar{M}_x^i(-1)^n] \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

여기서

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{N}_x^0 &= \frac{N_x(0, y)}{\cos(ny/R)}, \quad \bar{N}_x^i = -\frac{N_x(i, y)}{\cos(ny/R)} \\ \bar{M}_x^0 &= -\frac{\pi M_x(0, y)}{l \cos(ny/R)}, \quad \bar{M}_x^i = \frac{\pi M_x(i, y)}{l \cos(ny/R)} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

식 (14)와 그 도함수를 FSNT 셀의 경계조건 식 (20)에 대입하여 다음과 같은 8개의 방정식을 얻는다.

$$A_{0n} + \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} = 0 \quad (34. a)$$

$$A_{0n} + \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} (-1)^m = 0 \quad (34. b)$$

$$\frac{\pi}{l} \left[\frac{w_0 + w_i}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \{w_0 + w_i(-1)^m + mC_{mn}\} \right] = 0 \quad (34. c)$$

$$\frac{\pi}{l} \left[\frac{w_0 + w_i}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \{w_0 + w_i(-1)^m + mC_{mn}\} (-1)^m \right] = 0 \quad (34. d)$$

$$q_1 A_{0n} + q_2 \left(\frac{v_0 + v_i}{2} \right) + q_3 \left(\frac{w_0 + w_i}{2} \right) + \sum_{m=1}^{\infty} [q_1 A_{mn} + q_2 \{v_0 + v_i(-1)^m + mB_{mn} + q_3 \{w_0 + w_i(-1)^m + mC_{mn}\} \}] = 0 \quad (34. e)$$

$$q_1 A_{0n} + q_2 \left(\frac{v_0 + v_i}{2} \right) + q_3 \left(\frac{w_0 + w_i}{2} \right) + \sum_{m=1}^{\infty} [q_1 A_{mn} + q_2 \{v_0 + v_i(-1)^m + mB_{mn} + q_3 \{w_0 + w_i(-1)^m + mC_{mn}\} (-1)^m \}] = 0 \quad (34. f)$$

$$q_4 A_{0n} + q_3 \left(\frac{v_0 + v_i}{2} \right) - q_{18} \left(\frac{w_0 + w_i}{2} \right) - \frac{2R^2}{l} \left(\frac{\bar{M}_x^0 + \bar{M}_x^i}{2} \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \left[(q_4 - a_{31}m^2) A_{mn} + q_{23} B_{mn} + q_3 \{v_0 + v_i(-1)^m + mB_{mn}\} + q_{13} m C_{mn} - a_9 \{w_0 + w_i(-1)^m + mC_{mn}\} m^2 - q_{18} \{w_0 + w_i(-1)^m + mC_{mn}\} - \frac{2R^2}{l} \{ \bar{M}_x^0 + \bar{M}_x^i(-1)^m \} \right] = 0 \quad (34. g)$$

$$q_4 A_{0n} + q_3 \left(\frac{v_0 + v_i}{2} \right) - q_{18} \left(\frac{w_0 + w_i}{2} \right) - \frac{2R^2}{l} \left(\frac{\bar{M}_x^0 + \bar{M}_x^i}{2} \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \left[(q_4 - a_{31}m^2) A_{mn} + q_{23} B_{mn} + q_3 \{v_0 + v_i(-1)^m + mB_{mn}\} + q_{13} m C_{mn} - a_9 \{w_0 + w_i(-1)^m + mC_{mn}\} m^2 - q_{18} \{w_0 + w_i(-1)^m + mC_{mn}\} - \frac{2R^2}{l} \{ \bar{M}_x^0 + \bar{M}_x^i \} (-1)^m \right] = 0 \quad (34. h)$$

식 (31)과 (32)를 식 (34)에 대입하여 다음과 같은 제차 진동수 방정식(homogeneous frequency equation)을 얻게 된다.

$$[e_{i,j}] \{ \bar{N}_x^0, \bar{N}_x^i, \bar{M}_x^0, \bar{M}_x^i, v_0, v_i, w_0, w_i \}^T = \{0\}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, 8) \quad (35)$$

식 (35)가 non-trivial solution을 갖기 위해서는 행렬의 행렬식(determinant)이 '0'가 되어야 하므로

$$|e_{i,j}| = 0, \quad (i, j = 1, 2, \dots, 8, e_{i,i} = e_{i,i}) \quad (36)$$

와 같은 진동수 행렬식(frequency determinant)을 얻

는다. 이 진동수 행렬식의 자요소는 아래와 같이 무한 급수로 표현된다.

$$\begin{aligned}
 e_{1,1} &= \frac{1}{2a_2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m, & e_{1,2} &= \frac{1}{2a_2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m (-1)^m \\
 e_{1,3} &= \sum_{m=1}^{\infty} a_r m, & e_{1,4} &= \sum_{m=1}^{\infty} a_r m (-1)^m \\
 e_{1,5} &= \frac{q_1}{2a_2} + \sum_{m=1}^{\infty} \{q_1 a_m + q_2 a_{\beta} m + q_3 a_r m\} \\
 e_{1,6} &= \frac{q_1}{2a_2} + \sum_{m=1}^{\infty} \{q_1 a_m + q_2 a_{\beta} m + q_3 a_r m\} (-1)^m \\
 e_{1,7} &= \frac{q_4}{2a_2} + \sum_{m=1}^{\infty} \{(q_4 - a_{31} m^2) a_m + q_5 a_{\beta} m \\
 &\quad + q_6 a_r m\} \\
 e_{1,8} &= \frac{q_4}{2a_2} + \sum_{m=1}^{\infty} \{(q_4 - a_{31} m^2) a_m + q_5 a_{\beta} m \\
 &\quad + q_6 a_r m\} (-1)^m \\
 e_{2,2} &= e_{1,1}, & e_{2,3} &= e_{1,4}, & e_{2,4} &= e_{1,3}, & e_{2,5} &= e_{1,6} \\
 e_{2,6} &= e_{1,5}, & e_{2,7} &= e_{1,8}, & e_{2,8} &= e_{1,7} \\
 e_{3,3} &= \sum_{m=1}^{\infty} c_r m^2, & e_{3,4} &= \sum_{m=1}^{\infty} c_r m^2 (-1)^m \\
 e_{3,5} &= \sum_{m=1}^{\infty} \{q_1 a_r m + q_2 b_r m^2 + q_3 c_r m^2\} \\
 e_{3,6} &= \sum_{m=1}^{\infty} \{q_1 a_r m + q_2 b_r m^2 + q_3 c_r m^2\} (-1)^m \\
 e_{3,7} &= \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \{(q_4 - a_{31} m^2) a_r m + q_5 b_r m^2 \\
 &\quad + q_6 c_r m^2 + 1\} \\
 e_{3,8} &= \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \{(q_4 - a_{31} m^2) a_r m + q_2 b_r m^2 \\
 &\quad + q_6 c_r m^2 + 1\} (-1)^m \\
 e_{4,4} &= e_{3,3}, & e_{4,5} &= e_{3,6}, & e_{4,6} &= e_{3,5}, & e_{4,7} &= e_{3,8}, \\
 & & e_{4,8} &= e_{3,7} \\
 e_{5,5} &= \frac{q_1^2}{2a_2} + \frac{q_2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \{q_1^2 a_m + q_2^2 b_{\beta} m^2 \\
 &\quad + q_3^2 c_r m^2 + 2q_1 q_2 a_{\beta} m + 2q_2 q_3 b_r m^2 \\
 &\quad + 2q_1 q_3 a_r m + q_2\} \\
 e_{5,6} &= \frac{q_1^2}{2a_2} + \frac{q_2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \{q_1^2 a_m + q_2^2 b_{\beta} m^2 \\
 &\quad + q_3^2 c_r m^2 + 2q_1 q_2 a_{\beta} m + 2q_2 q_3 b_r m^2 \\
 &\quad + 2q_1 q_3 a_r m + q_2\} (-1)^m \\
 e_{5,7} &= \frac{q_1 q_4}{2a_2} + \frac{q_3}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \{(q_4 - a_{31} m^2) (q_1 a_m \\
 &\quad + q_2 a_{\beta} m + q_3 a_r m) + q_5 (q_1 a_{\beta} m + q_2 b_{\beta} m^2 \\
 &\quad + q_3 b_r m^2) + q_6 (q_1 a_r m + q_2 b_r m^2 + q_3 c_r m^2) \\
 &\quad + q_3\} \\
 e_{5,8} &= \frac{q_1 q_4}{2a_2} + \frac{q_3}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \{(q_4 - a_{31} m^2) (q_1 a_m \\
 &\quad + q_2 a_{\beta} m + q_3 a_r m) + q_5 (q_1 a_{\beta} m + q_2 b_{\beta} m^2 \\
 &\quad + q_3 b_r m^2) + q_6 (q_1 a_r m + q_2 b_r m^2 + q_3 c_r m^2) \\
 &\quad + q_3\} (-1)^m
 \end{aligned}$$

(37)

$$\begin{aligned}
 e_{6,6} &= e_{5,5}, & e_{6,7} &= e_{5,8}, & e_{6,8} &= e_{5,7} \\
 e_{7,7} &= \frac{q_4^2}{2a_2} - \frac{q_{18}}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \{(q_4 - a_{31} m^2) \\
 &\quad \{(q_4 - a_{31} m^2) a_m + q_5 a_{\beta} m + q_6 a_r m\} \\
 &\quad + q_5 \{(q_4 - a_{31} m^2) a_{\beta} m + q_5 b_{\beta} m^2 + q_6 b_r m^2\} \\
 &\quad + q_6 \{(q_4 - a_{31} m^2) a_r m + q_5 b_r m^2 + q_6 c_r m^2\} \\
 &\quad - a_3 m^2 - q_{18}\} \\
 e_{7,8} &= \frac{q_4^2}{2a_2} - \frac{q_{18}}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \{(q_4 - a_{31} m^2) \\
 &\quad \{(q_4 - a_{31} m^2) a_m + q_5 a_{\beta} m + q_6 a_r m\} \\
 &\quad + q_5 \{(q_4 - a_{31} m^2) a_{\beta} m + q_5 b_{\beta} m^2 + q_6 b_r m^2\} \\
 &\quad + q_6 \{(q_4 - a_{31} m^2) a_r m + q_5 b_r m^2 + q_6 c_r m^2\} \\
 &\quad - a_3 m^2 - q_{18}\} (-1)^m \\
 e_{8,8} &= e_{7,7}
 \end{aligned}$$

(37)

여기서 사용된 다른 상수들은 다음과 같은 값이다.

$$\begin{aligned}
 q_1 &= \lambda \pi [\bar{A}_{66} + (C_3 - C_4) \bar{B}_{66} - C_3 C_4 \bar{D}_{66}] n \\
 q_{12} &= (\lambda \pi)^2 [\bar{B}_{12} + (\bar{D}_{12} + 4\bar{D}_{66}) n^2] \\
 q_{13} &= -(\lambda \pi)^2 (\bar{B}_{12} + \bar{D}_{12} n^2) \\
 q_{18} &= (\lambda \pi n)^2 4\bar{D}_{66} \\
 q_2 &= -a_5 \\
 q_{23} &= -(\lambda \pi)^2 (\bar{B}_{12} + C_2 \bar{D}_{12}) n \\
 q_3 &= -(\lambda \pi)^2 (2\bar{B}_{66} + C_1 \bar{D}_{12} - C_2 \bar{D}_{12} \\
 &\quad + 2C_3 \bar{D}_{66}) n \\
 q_4 &= \lambda \pi [\bar{A}_{66} + (C_3 - C_4) \bar{B}_{66} - C_3 C_4 \bar{D}_{66}] n \\
 q_5 &= -a_7 \\
 q_6 &= -[a_5 m^2 + (\lambda \pi)^2 \{(\bar{D}_{12} + 4\bar{D}_{66}) n^2 + \bar{B}_{12}\}]
 \end{aligned}$$

(38)

4. 진동수 행렬식(Frequency Determinant)

식(36)은 양단에서 접선 방향의 구속없이 자유지지된 경계조건(FSNT-FSNT)에 기초하여 얻어진 8×8 진동수 행렬식이다. 이러한 행렬식으로 부터 대수적 고유치 문제에 대한 상세한 공식화 과정을 거치지 않고 16개의 가능한 조합의 경계조건에 대한 진동수 행렬식을 얻을 수 있다. 이것은 식(36)에서 필요없는 행과 열을 유지하여 얻어진다. 따라서 다른 경계조건을 갖는 셀에 대해서는 FSNT 셀에 대한 행렬식보다 작은 크기의 행렬식을 얻게된다.

4.1 양단에서 축 방향의 구속이 없는 단순지지 셀(SNA-SNA)

축 방향 mode function 식(14)는 SNA 셀의 경계조건들을

$$N_x=0, \quad v=0, \quad w=0, \quad M_x=0 \quad (x=0, l) \quad (39)$$

항대항으로 만족시키므로 모든 경계조건들중에서 가장 단순한 경우로서 운동 방정식으로부터 아래와 같은 3×3 진동수 행렬식이 직접 얻어진다.

$$\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ & S_{22} & S_{23} \\ S_{ymn} & & S_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad (40)$$

식(40)에서 진동수 행렬식의 인자는 무한급수 형태가 아니고 대수항으로 된다.

4.2 양단에서 축 방향의 구속이 있는 단순지지 셀(SS-SS)

SS 셀의 경계조건은

$$u=0, v=0, w=0, M_x=0 \quad (x=0, l) \quad (41)$$

이 조건에서 부가해야될 경계조건은 양단에서 $u=0$ 이고, 식(39)에서 불필요한 경계조건은 양단에서 $N_x=0$ 가 된다. 따라서 진동수 행렬식은 식(36)으로부터 \tilde{N}_x^0 와 \tilde{N}_x^l 인 행과 열을 유지하여 아래와 같이 2×2 행렬식을 얻게된다.

$$\begin{vmatrix} e_{1,1} & e_{1,2} \\ S_{ymn} & e_{2,2} \end{vmatrix} = 0 \quad (42)$$

4.3 일단은 축 방향 구속이 있고 타단은 축 방향 구속이 없는 단순지지 셀(SS-SNA)

이 경우의 경계조건은

$$\left. \begin{aligned} u=0, v=0, w=0, M_x=0 \quad (x=0) \\ N_x=0, v=0, w=0, M_x=0 \quad (x=l) \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

으로 이 조건 가운데 $x=0$ 에서 $u=0$ 인 경계조건을 제외하고는 가해진 mode function 을 항대항으로 자동적으로 만족한다. 따라서 진동수 행렬식은 아래와 같이 간단해진다.

$$e_{1,1} = \frac{1}{2a_2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0 \quad (44)$$

4.4 양단이 고정된 셀(C-C)

셀의 양단이 고정된 경우의 경계조건은

$$u=0, v=0, w=0, \partial w/\partial x=0 \quad (x=0, l) \quad (45)$$

이 조건 중에서 mode function 이 불필요하게 만족시키는 경계조건은 양단에서 $N_x=0$ 와 $M_x=0$ 이며 부가해야될 경계조건은 양단에서 $u=0$ 와 $\partial w/\partial x=0$ 가 된다.

따라서 진동수 행렬식은 식(36)으로부터 $\tilde{N}_x^0, \tilde{N}_x^l, \tilde{M}_x^0$ 및 \tilde{M}_x^l 에 대한 행과 열을 유지하여 구한다.

$$\begin{vmatrix} e_{1,1} & e_{1,2} & e_{1,3} & e_{1,4} \\ & e_{2,2} & e_{2,3} & e_{2,4} \\ S_{ymn} & & e_{3,3} & e_{3,4} \\ & & & e_{4,4} \end{vmatrix} = 0 \quad (46)$$

4.5 양단이 자유인 셀(F-F)

이때의 경계조건은

$$N_x=0, \tilde{N}_x=0, \tilde{Q}_x=0, M_x=0 \quad (x=0, l) \quad (47)$$

으로 원치않는 기하학적 경계조건(geometric boundary conditions)은 양단에서 $v=0$ 와 $w=0$ 이며, 부가해야되는 자연 경계조건(natural boundary conditions)은 양단에서 $\tilde{N}_x=0$ 와 $\tilde{Q}_x=0$ 가 된다.

따라서 식(36)에서 v_0, v_l, w_0 및 w_l 에 관련된 행과 열을 유지하여 아래와 같은 4×4 진동수 행렬식을 얻는다.

$$\begin{vmatrix} e_{5,5} & e_{5,6} & e_{5,7} & e_{5,8} \\ & e_{6,6} & e_{6,7} & e_{6,8} \\ S_{ymn} & & e_{7,7} & e_{7,8} \\ & & & e_{8,8} \end{vmatrix} = 0 \quad (48)$$

4.6 일단 고정 타단 자유인 셀(C-F)

의괄형 원통셀의 경계조건은

$$\left. \begin{aligned} u=0, v=0, w=0, \partial w/\partial x=0 \quad (x=0) \\ N_x=0, \tilde{N}_x=0, \tilde{Q}_x=0, M_x=0 \quad (x=l) \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

으로 부가해야될 경계조건은 $x=0$ 에서 $u=0$ 와 $\partial w/\partial x=0$ 이며 $x=l$ 에서 $\tilde{N}_x=0$ 와 $\tilde{Q}_x=0$ 가 된다. 또한 불필요하게 만족되는 경계조건은 $x=0$ 에서 $N_x=0$ 와 $M_x=0$ 이고 $x=l$ 에서 $v=0$ 와 $w=0$ 이다.

따라서 식(36)에서 $\tilde{N}_x^0, \tilde{M}_x^0, v_l$ 및 w_l 에 관련된 행과 열을 유지하여 아래와 같은 4×4 진동수 행렬식을 얻는다.

$$\begin{vmatrix} e_{1,1} & e_{1,3} & e_{1,6} & e_{1,8} \\ & e_{3,3} & e_{3,6} & e_{3,8} \\ S_{ymn} & & e_{6,6} & e_{6,8} \\ & & & e_{8,8} \end{vmatrix} = 0 \quad (50)$$

이상과 같이 언급한 경계조건외의 다른 경계조건을 갖는 모든 셀문제는 가장 일반적인 진동수 행렬식(36)으로부터 기하학적 경계조건 및 자연 조건들을 부가하거나 불필요한 경우는 삭제함으로써 모든 경계조건을 엄밀하게 만족하는 진동수 행렬식이 얻어진다.

Table 3 은 가능한 16개의 경계조건에 부가하거나 삭제해야되는 경계조건들을 목록화 한 것이다.

5. 수치예 및 고찰

본 해석법의 유용성 및 정밀도를 고찰하기 위하여 γ 존 연구에서와 동일한 기하학적 매개변수와 직교이력성 인자들을 채택하여 비교하였으며, 급수들은 충분한 수렴성이 이루어지도록 검토하여 급수 m 을 50 항까지

Table 3 Shell geometrical boundary conditions to be altered on using assumed mode functions

Case	Code	Forced to zero	Released
1	C	$u, \partial w/\partial x$	—
2	CNA	$\partial w/\partial x$	—
3	CNT	$u, \partial w/\partial x$	v
4	CNAT	$\partial w/\partial x$	v
5	SS	u	—
6	SNA	—	—
7	SNT	u	v
8	SNAT	—	v
9	FS	$u, \partial w/\partial x$	w
10	FSNA	$\partial w/\partial x$	w
11	FSNT	$u, \partial w/\partial x$	v, w
12	FSNAT	$\partial w/\partial x$	v, w
13	FAT	u	w
14	FT	—	w
15	FA	u	v, w
16	F	—	v, w

Table 4 Mechanical properties of materials used

Material	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	G_{12} (GPa)	ν_{12}	ρ_0 (kg/m ³)
ISOTROPIC	68.95	68.95	29.78	0.315	2,714.5
POXY-GLASS	45.23	8.05	3.00	0.272	2,433.3
POXY-GLASS-TEEL	109.43	8.33	3.09	0.310	4,535.6
POXY-GLASS-TEEL-BORON (I)	188.46	8.40	3.12	0.272	2,433.3
POXY-GLASS-TEEL-BORON (II)	138.06	8.30	3.08	0.279	2,715.4
ORON-EPOXY (I)	217.18	18.62	5.17	0.280	2,051.9
ORON-EPOXY (II)	206.90	18.62	4.48	0.280	2,048.0
RAPHITE-POXY	40.0	1.0	0.5	0.25	—

선택하였다.

본 연구에서 고려한 원통셸의 재료특성은 Table 4와 같다.

Fig. 2는 여러 경계조건을 갖는 등방성 원통셸의 고진동수를 원주방향 파동수 n 에 대해 도시한 것으로 Eswall & Naumann⁽¹⁷⁾의 실험결과와의 최대오차는 6% 정도였다.

Fig. 3과 Fig. 4는 단순지지된 Graphite-Epoxy 2층 원통셸에서 non-shallow shells 이론(Sanders, Love)과 shallow shells 이론(Donnell)을 이용하여 구한 진동수

들 사이의 오차를 나타낸 것으로 이들사이의 오차는 다음 식으로 정의되는 오차계수를 사용하여 표시하였다.

$$\epsilon = \left[1 - \frac{\text{non-shallow shell 이론치}}{\text{Shallow shell 이론치}} \right] \times 100(\%) \quad (51)$$

이들 사이의 오차는 $l/R, h/R$ 이 증가할 수록 커지며 최저진동수를 갖는 원주방향 파동수 n 에서 최대의 오차를 갖는다. 또한 $0^\circ/90^\circ$ 적층셸의 경우가 $0^\circ/0^\circ$ 적층셸에 비해 약 2배 정도의 오차를 갖게 됨을 알 수 있는데 이것은 셸의 신장(stretching)과 굽힘(bending) 사이에 일어나는 결합효과(coupling effects)에 기인된 것이다.

Table 5는 multifiber 복합재료 원통셸에 대한 수치예로써 Shivakumar와 Murthy⁽⁹⁾의 해석결과와 잘 일치함을 보여준다.

Fig. 5와 Table 6는 Boron-Epoxy (I) 2층 적층셸에서 다양한 경계조건에 따른 현재의 해석결과와 NASTRAN PROGRAM을 사용하여 구한 수치결과를 비교한 것이다. NASTRAN CODE 사용시 유한요소 grid는 셸의 축방향으로 96개 원주방향으로 72개로 분할하였다. 현재의 해석결과는 NASTRAN 결과보다 항상 낮은 값을 갖는다. 단순지지된 경우에서 이들 사이의 최대오차는 $0^\circ/0^\circ$ 적층일때 2.0%이고 $0^\circ/90^\circ$ 적층일

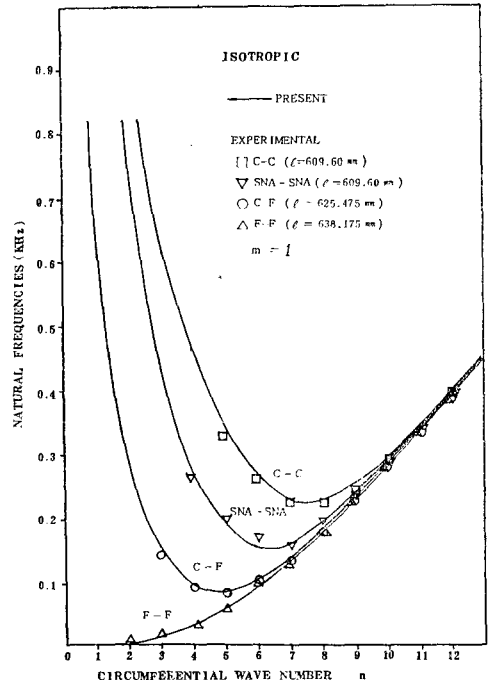


Fig. 2 Analytical and experimental frequencies of homogeneous isotropic cylindrical shell

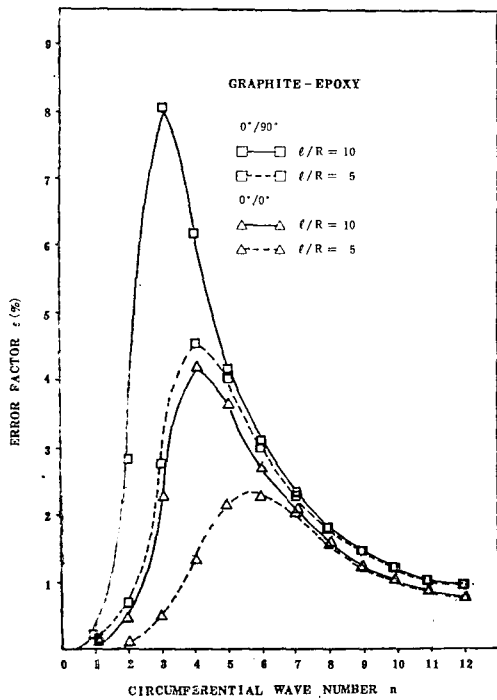


Fig. 3 Natural frequencies associated with shallow and non-shallow shell theories for a two-layered cylindrical shell ($R/h=100$)

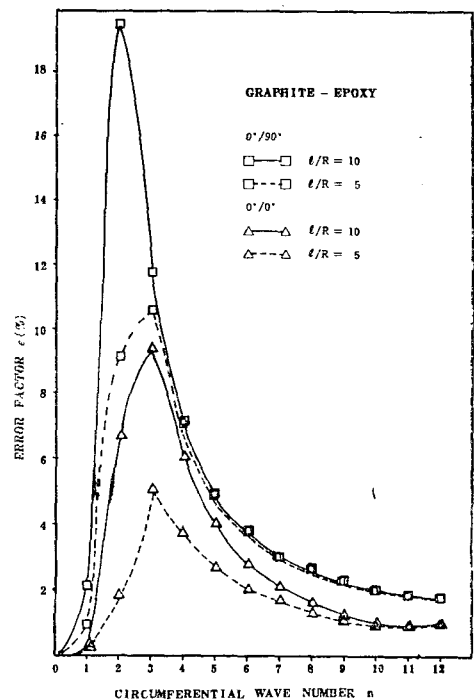


Fig. 4 Natural frequencies associated with shallow and non-shallow shell theories for a two-layered cylindrical shell ($R/h=20$)

Table 5 Comparison of fundamental natural frequencies (in Hz) of multifiber composite shells with simply supported boundary condition ($R/h=500, l/R=10$)

n	Case I		Case II		Case III		Case IV	
	Ref. (9)	Present	Ref. (9)	Present	Ref. (9)	Present	Ref. (9)	Present
0	—	48.4032	—	32.5112	—	44.5666	—	41.9511
1	—	26.4341	—	20.2419	—	29.0951	—	26.7336
2	—	11.2990	9.9412	9.9421	15.4208	15.4317	13.5929	13.6044
3	5.8604	5.8835	5.4943	5.4960	8.9610	8.9703	7.6759	7.6833
4	4.0356	4.0454	3.6407	3.6393	5.9734	5.9766	5.0837	5.0887
5	4.1160	4.1326	3.2188	3.2254	4.9842	4.9885	4.3647	4.3769
6	5.2992	5.3194	3.7610	3.7610	5.4098	5.4206	4.9387	4.9466
7	7.0586	7.0816	4.8352	4.8352	6.7362	6.7399	6.2609	6.2730
8	9.1963	9.2274	6.2257	6.2316	8.5705	8.5839	8.0363	8.0467
9	11.6571	11.6980	7.8665	7.8708	10.7830	10.7964	10.1372	10.1469
10	14.4242	14.4742	9.7213	9.7252	13.3025	13.3187	12.5153	12.5299
11	17.4880	17.5489	11.7744	11.9844	16.1096	16.1281	15.1580	15.1791
12	20.8469	20.9195	14.0370	14.0442	19.1928	19.2152	18.0638	18.0879
13	24.5010	24.5846	16.4943	16.5027	22.5511	22.5758	21.2277	21.2533
14	28.4480	28.5437	19.1488	19.1591	26.1793	26.2080	24.6419	24.6937
15	32.6840	32.7965	21.9993	22.0129	30.0738	30.1107	28.3101	28.3486

Case I : Epoxy-Glass(0*.4 : 0.6)

Case II : Epoxy-Glass-Steel(0.4 : 0.12 : 0.48)

Case III : Epoxy-Glass-Steel-Boron(I)(0.4 : 0.12 : 0.096 : 0.384)

Case IV : Epoxy-Glass-Steel-Boron(II)(0.4 : 0.24 : 0.144 : 0.216)

* Fiber volume fraction

Table 6 Comparison of fundamental natural frequencies(in Hz) of cylindrical shell with various boundary condition for two layers 0°/90° cross-ply BORON-EPOXY (I) ($R/h=82.7$, $l/R=12.7$)

n	SNAT-SNAT			SNA-SNA			CNA-SNAT			SS-SNAT			C-C		
	P	N	ε	P	N	ε	P	N	ε	P	N	ε	P	N	ε
1	494.99	499.31	0.87	531.74	538.94	1.34	512.02	517.79	1.11	569.82	574.74	0.86	655.79	663.11	1.10
2	249.10	262.99	5.28	250.67	264.94	5.39	250.43	264.60	5.36	310.13	320.05	3.10	373.43	382.63	2.40
3	358.90	373.76	3.95	359.04	373.87	3.97	359.40	374.28	3.98	376.23	389.78	3.48	400.27	412.39	2.94
4	662.46	677.97	2.29	662.46	677.98	2.29	662.46	678.21	2.32	666.27	681.73	2.27	672.56	687.64	2.24
5	1069.23	1090.07	1.91	1069.23	1090.07	1.92	1069.36	1090.20	1.92	1070.86	1091.22	1.90	1072.26	1093.08	1.90
6	1568.71	1599.29	1.91	1568.71	1599.29	1.91	1568.76	1599.37	1.91	1570.56	1599.72	1.82	1575.56	1600.46	1.56
7	2159.39	2204.76	2.06	2159.40	2204.76	2.06	2159.42	2204.81	2.06	2159.77	2204.95	2.05	2161.87	2205.30	1.97
8	2840.99	2907.31	2.28	2841.00	2907.31	2.28	2841.11	2907.34	2.28	2841.47	2907.40	2.27	2841.11	2907.59	2.29

* P : Present Results, N : Nastran Results

$$\epsilon = \left(1 - \frac{P}{N}\right) \times 100$$

Table 7 Comparison of lowest natural frequencies(in Hz) of cylindrical shell with various boundary conditions for three layers θ°/0°/θ° BORON-EPOXY (II) ($R/h=381$, $l/R=2$)

		CC	CNA	CNT	CNAT	SS	SNA	SNT	SNAT
0°/0°/0°	Sheinman*	261.41	235.46	259.32	235.19	254.80	226.94	242.40	218.72
	Present	261.13	235.22	258.64	234.83	254.65	226.92	241.33	218.05
15°/0°/15°	Sheinman	337.63	269.78	331.90	268.82	332.57	261.29	311.90	250.53
	Present	337.05	269.40	330.86	268.33	332.13	260.97	310.58	250.02
30°/0°/30°	Sheinman	397.58	288.88	393.20	288.59	392.44	281.82	375.37	273.79
	Present	395.96	288.13	391.16	287.83	391.04	281.13	373.19	272.76
45°/0°/45°	Sheinman	446.24	316.63	442.78	316.28	442.25	311.77	428.07	303.90
	Present	443.79	315.57	439.56	315.18	440.13	310.83	424.61	302.05
60°/0°/60°	Sheinman	487.64	348.29	481.47	347.24	485.55	345.08	465.86	336.86
	Present	485.70	347.27	477.35	345.68	483.99	344.27	462.92	335.73
75°/0°/75°	Sheinman	465.54	365.36	458.97	362.86	464.13	362.70	442.88	348.89
	Present	464.63	364.59	445.58	362.26	463.52	362.26	441.36	348.08
90°/0°/90°	Sheinman	370.71	325.57	368.26	325.16	368.67	322.75	356.46	316.67
	Present	370.07	324.90	365.07	323.40	368.43	322.57	355.49	316.17

* FEM Results, Ref. (14)

** Numbers in parenthesis denote the circumferential mode

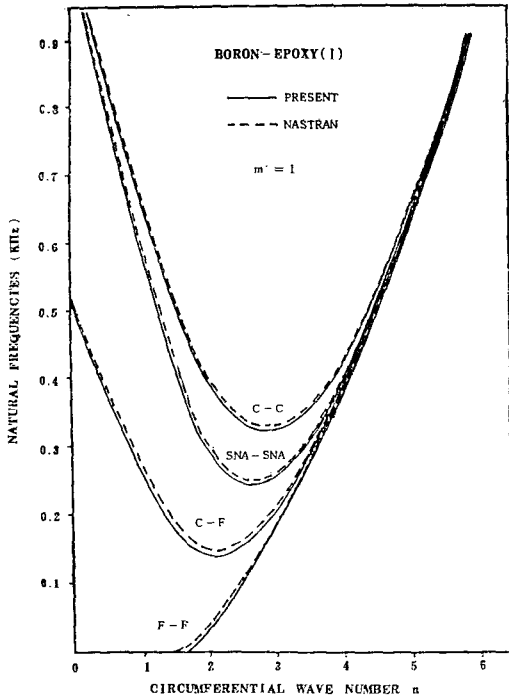


Fig. 5 Comparison of fundamental natural frequencies (in Hz) of cylindrical shell with various boundary conditions for two layers $0^\circ/0^\circ$ BORON-EPOXY (I) ($R/h=82.7$, $l/R=12.7$)

때 5.4% 이다.

Table 7은 $\theta^\circ/0^\circ/\theta^\circ$ 로 적층된 Boron-Epoxy (II)셀에서 다양한 경계조건에 따른 최저 고유진동수를 구한 것으로 유한요소 해법을 사용한 Sheinman과 Grief⁽¹⁴⁾의 연구 결과와 1.0% 이내의 오차를 보여주었다.

6. 결 론

직교이방성 복합재료 원통셀의 자유진동 문제의 해석에 관한 본 연구의 결과를 요약하면 다음과 같다.

(1) 직교이방성 복합재료 원통셀의 자유진동 문제의 엄밀 해석에 대한 일반 해법이 제시되었다.

(2) 진동수 방정식을 기존의 여러 셀 이론에 기초하여 유도하고 이를 통일된 형태로 표현하였다.

(3) 본 해석에서 유도된 진동수 행렬식은 임의의 형태로 적층된, 임의의 경계조건을 갖는 원통셀에 적용될 수 있다.

(4) 본 해석의 적용예가 각종 수치예를 통하여 보여졌으며, 기존연구 및 NASTRAN 결과들과 비교하여 본 해석의 유용성 및 정밀도가 충분히 입증되었다.

후 기

본 연구는 1985년도 한국과학재단의 연구비에 의하여 연구되었으며, 관계자 여러분께 깊은 감사를 드립니다.

참 고 문 헌

- (1) Arnold, R.N., and Warburton, G.B., "Flexural Vibrations of the Walls of Thin Cylindrical Shells Having Freely Supported Ends", *Proceedings of the Royal Society London*, A197, pp. 238~256, 1948
- (2) Leissa, A.W., "Vibration of Shells", *NASA SP-288*, 1973
- (3) Chung, H., "Free Vibration Analysis of Circular Cylindrical Shells", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 74, No. 3, pp. 331~350, 1981
- (4) Sanders, J.L., Jr., "An Improved First Approximation Theory for Thin Shells", *NASA Report 24*, 1959
- (5) Schwaighofer, J., and Microys, H.F., "Orthotropic Cylindrical Shells under Line Load", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 46, pp. 356~362, 1979
- (6) 이영신, 박정화, 응장우, "국부하중을 받는 직교 이방성 원통셀의 해석", 대한기계학회논문집, 제 8권, 제 5호, pp. 408~415, 1984
- (7) Dong, S.B., "Free Vibrations of Laminated Orthotropic Cylindrical Shells", *Journal of Acoustical Society of America*, Vol. 44, pp. 1628~1635, 1968
- (8) Bert, C.W., Baker, J.L., and Egle, D.M., "Free Vibrations of Multilayer Anisotropic Cylindrical Shells", *Journal of Composite Material*, Vol. 3, pp. 480~499, 1969
- (9) Shivakumar, K.N., and Krishna Murty, A.V., "Vibrations of Multifiber Composite Shells-Some Numerical results", *Journal of Structural Mechanics*, Vol. 4, No. 4, pp. 379~393, 1976
- (10) Sadasiva Rao, Y.V.K., and Raju, P.C., "Vibrations of Antisymmetrically Laminated Cylindrical Shells", *Developments in Composite Materials-1*. Applied Science Publishers, pp. 37~54, 1977

- (11) Greenberg, J.B., and Stavsky, Y., "Vibrations of Laminated Filament-Wound Cylindrical Shells", *AIAA Journal*, Vol. 36, pp.1055~1062, 1980
- (12) Soldatos, K.P., "Free Vibrations of Antisymmetric Angle-ply Laminated Circular Cylindrical Panels", *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, Vol. 36, pp.207~221, 1983
- (13) Soldatos, K.P., "A Comparison of Some Shell Theories used for the Dynamic Analysis of Cross-Ply Laminated Circular Cylindrical Panels", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 97, No. 2, pp. 305~317, 1984
- (14) Izhak Sheinman and Shoshana Greif., "Dynamic Analysis of Laminated Shells of Revolution", *Journal of Composite Materials*, Vol. 18, pp. 200~214, 1984
- (15) Love, A.E.H., "A Treatise on the Mathematical theory of Elasticity", 1944 Dover Publications, 4th ed.
- (16) Donnell, L.H., "Stability of Thin-Walled Tubes Under Torsion", *NACA Report 479*
- (17) Sewall J.L., and Naumann, E.C., "An Experimental and Analytical Vibration Study of Thin Cylindrical Shells with and without Longitudinal Stiffeners", *NASA TND-4705*, Sep. 16, 1968