

<論 文>

# 적층직교이방성 외팔 원통셸의 자유진동 해석

이 영 신\* · 문 홍 기\*\* · 윤 종 호\*

(1986년 8월 23일 접수)

## Free Vibration Analysis of Clamped-Free Laminated Orthotropic Circular Cylindrical Shells

Young-Shin Lee, Hong-Key Moon and Jong-Ho Yoon

**Key Words:** Free Vibration(자유진동), Orthotropy(직교이방성), Circular Cylindrical Shell(원통셸), Cantilever(외팔), Exact Solution(엄밀해)

### Abstract

Free vibration characteristics of laminated orthotropic circular cylindrical shells with clamped-free boundary condition are investigated.

The solution is obtained through a direct solution procedure with axial mode displacements represented as simple Fourier series expressions.

On the basis of the thin shell theories of Sanders, Love, Loo, Morley and Donnell, the  $4 \times 4$  frequency determinant is derived and is expressed in a unified form.

Various numerical examples determining the natural frequencies of circular cylindrical shells with isotropic material and also with layers of orthotropic elastic material arbitrarily laminated either symmetrically or anti-symmetrically about the shell middle surface. The results obtained compared very well with some available experimental and numerical results.

### 1. 서 론

일단고정 타단자유인 원통셸의 문제는 굴뚝, 유류 또는 폭발 저장탱크나 사일로, 미사일 및 잠수함등의 설계에 있어 실용적인 중요성을 갖고 있다. 이와같은 외팔형 경계조건을 갖는 셸의 진동문제는 최근에 구조물의 경량화, 고 강도화 등에 따라 많은 연구자들에

의해 큰 관심을 끌어들였다.

외팔형 경계조건을 갖는 등방성 원통셸의 연구로써 1970년 Warburton과 Higgs<sup>(1)</sup>는 Flugge 운동 방정식을 사용하여, 엄밀해와 더불어 Rayleigh-Ritz 방법을 적용한 근사해를 유도하였으며 1972년 Tottenham과 Shimizu<sup>(2)</sup>는 matrix progression 방법을 채용하여 이 문제를 해석하였다. 그후 Johns와 Sharma<sup>(3)</sup>, Greif와 Chung<sup>(4)</sup> 및 Sharma<sup>(5,6)</sup> 등은 Rayleigh-Ritz 방법에 의해 원통셸 진동에 대한 전반적인 연구를 보여주었다.

근년에 들어와 원통셸은 주름, 보강판 또는 복합재

\* 정회원, 충남대학교 공과대학 기계설계공학과

\*\* 정회원, 충남대학교 대학원

료 등으로 제작하게 되었는데 이것은 좌굴에 대해 저항력이 높은 특성을 갖고 있기 때문이다. 이경우 주름셀, 보강셀 및 복합재료 셀은 준직교이방성(quasi-orthotropic) 또는 직교이방성셀로 취급되고 있다<sup>(7,8)</sup>. 이러한 직교이방성이나 복합재료 원통셀의 진동에 관한 연구는 국내외적으로 활발히 수행되고 있으며<sup>(9-11)</sup> Dong<sup>(12)</sup>의 연구가 그 효시가 되고 있다. 그러나 이들의 연구는 거의 전부가 단순지지된 원통셀이나 Panel에 국한되어 있다.

본 논문에서는 이전에 제시하였던 연구<sup>(11)</sup>로부터 공학상 응용도가 높은 외팔형 경계조건을 갖는 적층 직교이방성 원통셀의 진동 특성에 대하여 중점적으로 검토하였다. 외팔형 원통셀의 진동수 행렬식을 Sanders, Love, Loo, Morley 및 Donnell의 셀이론에 기초하여 유도하고 이를 통일된 형태로 표현하였으며 셀의 기하학적 매개변수와 재료 물성 및 적층방법에 따른 다양한 수치예를 기존 다른 연구자들이 제시한 해석 및 실험결과와 NASTRAN을 이용한 수치결과와 비교하여 본 해석의 유용성 및 정밀도를 검토하였다. 또한 직교이방성의 특별한 예로 등방성의팔원통셀의 자유진동특성의 수치예를 고려하여 기존연구결과<sup>(5,13-15)</sup>와도 비교하였다.

2. 수학적 공식화

2.1 해석모델

본 연구에서는 Fig. 1에서 보여주는 반경 R, 일정 두께 h인 적층 원통셀을 고려한다. 셀 중앙면위의 임

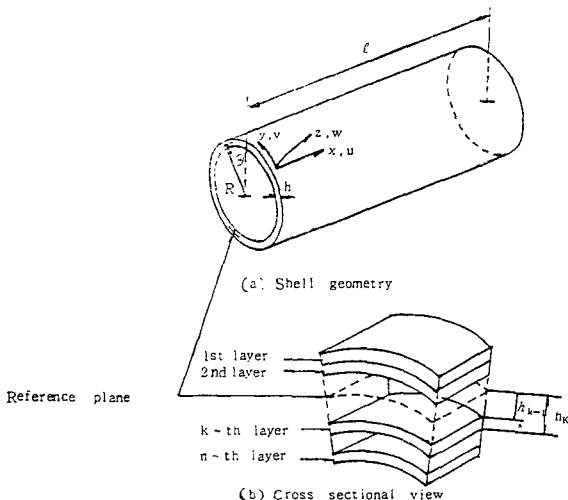


Fig. 1 Coordinate system and structure of the laminated cylindrical shell

의 일점의 위치는 축방향 좌표 및 원주방향 좌표 x 및 y로 표시하고 반경방향의 좌표는 z이다.

또한 중앙면위의 임의의 점에서 축방향, 원주방향 그리고 반경방향의 변위성분을 각각 u, v 및 w로 표시한다. x와 y 방향의 탄성계수는 각각  $E_x$ 와  $E_y$ 이고 전단탄성계수는  $G_{xy}$ 이며 포아송비는 각각  $\nu_x$ 와  $\nu_y$ 이다.

2.2 운동 방정식

기존의 여러 셀이론에 기초한 운동 방정식을 Table 1에 열거된 tracer 들을 사용하여 표시하면 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} N_{x,x} + N_{y,y} - C_4 R^{-1} M_{x,y} &= \rho_T u_{,tt} \\ N_{x,y} + N_{y,x} + C_4 R^{-1} M_{x,y} + C_1 R^{-1} M_{y,y} \\ &= \rho_T v_{,tt} \\ M_{x,xx} + 2M_{x,y,xy} + M_{y,yyy} - R^{-1} N_y &= \rho_T w_{,tt} \end{aligned} \right\} (1)$$

Table 1 Thin shell theory tracers and their values

Theory	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	C <sub>3</sub>	C <sub>4</sub>
Sanders	1	1	3/2	1/2
Love	1	1	1	0
Loo	1	0	1	0
Morley	1	0	0	0
Donnell	0	0	0	0

적층판의 구성 방정식 (constitutive equation)

$$\begin{Bmatrix} N_i \\ M_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{ij} & B_{ij} \\ B_{ij} & D_{ij} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_j^0 \\ \kappa_j \end{Bmatrix} \quad (i, j=1, 2, 6) \quad (2)$$

이며  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$  및  $D_{ij}$ 는 셀의 신장, 조합 및 굽힘 강성계수로 다음과 같이 정의된다.

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(1, z, z^2) dz, \quad (i, j=1, 2, 6) \quad (3)$$

여기서  $Q_{ij}$ 는 각 적층 (lamina)의 평면응력 강성계수로써 아래와 같다.

$$\left. \begin{aligned} Q_{11} &= E_x / (1 - \nu_x \nu_y) \\ Q_{12} &= E_y \nu_x / (1 - \nu_x \nu_y) \\ Q_{22} &= E_y / (1 - \nu_x \nu_y) \\ Q_{66} &= G_{xy} \end{aligned} \right\} (4)$$

무차원 좌표계 및 무차원 매개변수를 아래와 같이 도입하고

$$\left. \begin{aligned} \eta &= x/l, \quad \zeta = y/R, \quad 0 \leq \eta, \zeta \leq 1 \\ \lambda &= R/l, \quad \bar{\rho}_T = \rho_T R^2 / A_{11} \\ (\bar{A}_{ij}, \bar{B}_{ij}, \bar{D}_{ij}) &= (A_{ij}, B_{ij}/R, D_{ij}/R^2) / A_{11}, \\ &(i, j=1, 2, 6) \end{aligned} \right\} (5)$$

식 (5)를 식 (1)에 대입하여 변위 u, v 및 w 만으로

표시되는 식 (6)과 같은 변위운동 방정식을 얻는다.

$$[L]\{\delta\} = \{0\}, \quad \{\delta\} = \{u, v, w\}^T \quad (6)$$

여기서  $[L]$ 은 선형편미분 연산자로 무차원 형태로 주어진다<sup>(11)</sup>.

### 2.3 모우드 함수(Modal Functions)

자유진동의 임의의 모우드에서 변위  $u$ ,  $v$  및  $w$ 는 원주방향 모우드수  $n$ 에 대해 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, t) &= \phi_u(x) \cos(ny/R) \sin \omega t \\ v(x, y, t) &= \phi_v(x) \sin(ny/R) \sin \omega t \\ w(x, y, t) &= \phi_w(x) \cos(ny/R) \sin \omega t \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

여기서 축방향 모우드 함수  $\phi_u$ ,  $\phi_v$ , 및  $\phi_w$ 는 양단지지(SNA-SNA) 셀의 경계조건 식 (8)을 엄밀하게 만족하는 식 (9)와 같이 가정한다.

$$N_x=0, \quad v=0, \quad w=0, \quad M_x=0 \quad (\text{at } x=0, l) \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_u(x) &= A_{2n} + \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \cos(m\pi x/l) \\ \phi_v(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} B_{mn} \sin(m\pi x/l) \\ \phi_w(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} C_{mn} \sin(m\pi x/l) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

### 3. 일반 해

식 (9)와 같이 가정한 모우드 함수는 양단에서 접선 방향의 구속이 없는 단순지지(FSNT-FSNT)셀의 경계조건 식 (10) 중 어느 한 항도 만족시키지 못한다.

$$u=0, \quad \hat{N}_{xy}=0, \quad \hat{Q}_x=0, \quad \partial w/\partial x=0 \quad (x=0, l) \quad (10)$$

여기서 유효 전단 합응력  $\hat{N}_{xy}$ 와  $\hat{Q}_x$ 는 아래와 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \hat{N}_{xy} &= N_{xy} + C_3 R^{-1} M_{xy} \\ &= [A_{66} + (C_3 - C_4) B_{66} R^{-1} - C_3 C_4 D_{66} R^{-2}] u_{,y} \\ &\quad + [A_{66} + 2C_3 B_{66} R^{-1} + C_3^2 D_{66} R^{-2}] v_{,x} \\ &\quad - [2(B_{66} + C_3 D_{66} R^{-1})] w_{,xy} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \hat{Q}_x &= M_{x,x} + 2M_{xy} \\ &= B_{11} u_{,xx} + 2(B_{66} - C_4 D_{66} R^{-1}) u_{,xy} \\ &\quad + (B_{12} + C_2 D_{12} R^{-1} + 2B_{66} + 2C_3 D_{66} R^{-1}) v_{,xy} \\ &\quad + B_{12} w_{,x} R^{-1} - D_{11} w_{,xxx} - (D_{12} + 4D_{66}) w_{,xy} \end{aligned} \quad (12)$$

따라서 식 (9)를 사용하여 FSNT 셀에 대한 일반해를 유도함으로써 이로부터 특정한 경계조건에 대한 엄밀해를 얻을 수 있다.

식 (7)과 그 포함수를 변위 운동 방정식 (6)에 대입하여 식 (9)의 계수들을 FSNT 셀에 대한 8개의 경계

치  $v_0, v_l, w_0, w_l, \hat{N}_x^0, \hat{N}_x^l, \hat{M}_x^0$  및  $\hat{M}_x^l$  성분으로 표시하면 아래와 같다<sup>(11)</sup>.

$$A_{0n} = \frac{1}{2(a_{21} - \Omega)} \left\{ q_1(v_0 + v_l) + q_4(w_0 + w_l) - \frac{2}{l}(\hat{N}_x^0 + \hat{N}_x^l) \right\}, \quad \Omega \neq a_{21} \quad (13)$$

$$\left( \begin{matrix} A_{nn} \\ B_{nn} \\ C_{nn} \end{matrix} \right) = \left( \begin{matrix} a_\alpha & a_\beta & a_\gamma \\ b_\alpha & b_\beta & b_\gamma \\ c_\alpha & c_\beta & c_\gamma \end{matrix} \right) \left( \begin{matrix} q_1[v_0 + v_l(-1)^n] \\ + (q_4 - a_3/m^2)[w_0 + w_l(-1)^n] - 2R^2/l \\ [\hat{N}_x^0 + \hat{N}_x^l(-1)^n] \\ q_2 m[v_0 + v_l(-1)^n] \\ + q_5 m[w_0 + w_l(-1)^n] \\ q_3 m[v_0 + v_l(-1)^n] \\ + q_6 m[w_0 + w_l(-1)^n] \\ - 2R^2/l[\hat{M}_x^0 + \hat{M}_x^l] \\ (-1)^n \end{matrix} \right), \quad \square_{mn} \neq 0 \quad (14)$$

여기에서

$$\square_{mn} = \left\{ \begin{matrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{matrix} \right\} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} S_{11} &= a_1 m^2 + a_{21} - \Omega, \quad S_{12} = a_3 m, \\ S_{13} &= a_{31} m^3 + a_4 m \\ S_{21} &= \bar{a}_3 m, \quad S_{22} = a_5 m^2 + a_{61} - \Omega, \\ S_{23} &= a_7 m^2 + a_8 \\ S_{31} &= S_{13}, \quad S_{32} = \bar{a}_7 m^2 + a_8, \\ S_{33} &= a_9 m^4 + a_{10} m^2 + a_{12} = \Omega \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} a_\alpha &= (S_{22} S_{33} - S_{23} S_{22}) / \square_{mn}, \\ a_\beta &= (S_{13} S_{32} - S_{12} S_{33}) / \square_{mn}, \\ a_\gamma &= (S_{12} S_{23} - S_{13} S_{22}) / \square_{mn}, \\ b_\alpha &= (S_{23} S_{13} - S_{21} S_{33}) / \square_{mn}, \\ b_\beta &= (S_{11} S_{33} - S_{13}^2) / \square_{mn}, \\ b_\gamma &= (S_{13} S_{21} - S_{11} S_{23}) / \square_{mn}, \\ C_\alpha &= a_\gamma, \\ C_\beta &= (S_{12} S_{13} - S_{11} S_{33}) / \square_{mn}, \\ C_\gamma &= (S_{11} S_{22} - S_{12} S_{21}) / \square_{mn} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

이며, 여기서 이용한 다른 상수들은 다음과 같은 값이다

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= (\lambda\pi)^2 \\ a_{21} &= [\bar{A}_{66} - 2C_4 \bar{B}_{66} - C_4^2 \bar{D}_{66}] n^2 \\ a_2 &= a_{21} - \Omega \\ a_3 &= -(\alpha\pi)^2 [\bar{A}_{12} + \bar{A}_{66} + C_2 \bar{B}_{12} + (C_3 - C_4) \cdot \\ &\quad \bar{B}_{66} - C_3 C_4 \bar{D}_{66}] n \\ \bar{a}_3 &= -(\lambda\pi)_{12} [\bar{A}_{12} + \bar{A}_{66} + C_1 \bar{B}_{12} + (C_3 - C_4) \cdot \\ &\quad \bar{B}_{66} - C_3 C_4 \bar{D}_{66}] n \\ a_{31} &= -(\lambda\pi)^3 \bar{B}_{11} \\ a_4 &= -(\lambda\pi) [(\bar{B}_{12} + 2\bar{B}_{66} - 2C_4 \bar{D}_{66}) n^2 + \bar{A}_{12}] \\ a_5 &= (\lambda\pi)^2 [A_{66} + 2C_3 \bar{B}_{66} + C_3^2 \bar{D}_{66}] \\ a_{61} &= [\bar{A}_{22} + (C_1 + C_2) \bar{B}_{22} + C_1 C_2 \bar{D}_{22}] n^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 a_7 &= (\lambda\pi)^2 [\bar{B}_{12} + 2\bar{B}_{66} + C_1\bar{D}_{12} + 2C_3\bar{D}_{66}]n \\
 \bar{a}_7 &= (\lambda\pi)^2 [\bar{B}_{12} + 2\bar{B}_{66} + C_2\bar{D}_{12} + 2C_3\bar{D}_{66}]n \\
 a_8 &= [(\bar{A}_{22} + C_1\bar{B}_{22}) + (\bar{B}_{22} + C_1\bar{D}_{22})n^2]n \\
 \bar{a}_8 &= [(\bar{A}_{22} + C_2\bar{B}_{22}) + (\bar{B}_{22} + C_2\bar{D}_{22})n^2]n \\
 a_9 &= (\lambda\pi)^4 \bar{D}_{11} \\
 a_{10} &= (\lambda\pi)^2 [2(\bar{D}_{12} + 2\bar{D}_{66})n^2 + 2\bar{B}_{12}] \\
 a_{12} &= [\bar{D}_{22}n^4 + 2\bar{B}_{22}n^2 + \bar{A}_{22}] \\
 a_{11} &= a_{12} - \Omega \\
 \Omega &= (w/w_0)^2, \quad w_0^2 = E_x/\rho_T R^2 (1 - \nu_x \nu_y)
 \end{aligned} \right\} (18)$$

식 (9)와 같이 가정한 모우드 함수와 그 도함수를 FSNT 셀의 경계조건식 (10)에 대입하여 다음과 같이 8개의 방정식을 얻는다.

$$A_{0n} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{nn} = 0 \quad (19. a)$$

$$A_{0n} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{nn} (-1)^n = 0 \quad (19. b)$$

$$\frac{\pi}{l} \left\{ \frac{\omega_0 + \omega_l}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{w_0 + w_l (-1)^n + mC_{nn}\} \right\} = 0 \quad (19. c)$$

$$\frac{\pi}{l} \left\{ \frac{w_0 + w_l}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{w_0 + w_l (-1)^n + mC_{nn}\} (-1)^n \right\} = 0 \quad (19. d)$$

$$\begin{aligned}
 q_1 A_{0n} + q_2 \left( \frac{v_0 + v_l}{2} \right) + \bar{q}_3 \left( \frac{w_0 + w_l}{2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \\
 [q_1 A_{nn} + q_2 \{v_0 + v_l (-1)^n + mB_{nn}\} \\
 + q_3 \{w_0 + w_l (-1)^n + mC_{nn}\}] = 0 \quad (19. e)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_1 A_{0n} + q_2 \left( \frac{v_0 + v_l}{2} \right) + \bar{q}_3 \left( \frac{w_0 + w_l}{2} \right) \\
 + \sum_{n=1}^{\infty} [q_1 A_{nn} + q_2 \{v_0 + v_l (-1)^n + mB_{nn}\} \\
 + q_3 \{w_0 + w_l (-1)^n + mC_{nn}\}] (-1)^n = 0 \quad (19. f)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_4 A_{0n} + \bar{q}_3 \left( \frac{v_0 + v_l}{2} \right) - q_{18} \left( \frac{w_0 + w_l}{2} \right) \\
 - \frac{2R^2}{l} \left( \frac{\tilde{M}_x^0 + \tilde{M}_x^l}{2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (q_4 - v_{31}m^2) \cdot \right. \\
 A_{nn} + q_{23}mB_{nn} + \bar{q}_3 \{v_0 + v_l (-1)^n + mB_{nn}\} \\
 + q_{13}mC_{nn} - a_9 \{w_0 + w_l (-1)^n + mC_{nn}\} m^2 \\
 \left. - q_{18} \{w_0 + w_l (-1)^n + mC_{nn}\} \right. \\
 \left. - \frac{2R^2}{l} [\tilde{M}_x^0 + \tilde{M}_x^l (-1)^n] \right\} = 0 \quad (19. g)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_4 A_{0n} + q_3 \left( \frac{v_0 + v_l}{2} \right) - q_{18} \left( \frac{w_0 + w_l}{2} \right) \\
 - \frac{2R^2}{l} \left( \frac{\tilde{M}_x^0 + \tilde{M}_x^l}{2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (q_4 - a_{31}m^2) \cdot \right. \\
 A_{nn} + q_{23}mB_{nn} + q_3 \{v_0 + v_l (-1)^n + mB_{nn}\} \\
 \left. + q_{13}mC_{nn} - a_9 \{w_0 + w_l (-1)^n + mC_{nn}\} m^2 \right.
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
 - \bar{b}_{18} \{w_0 + w_l (-1)^n + mC_{nn}\} \\
 - \frac{2R^2}{l} [\tilde{M}_x^0 + \tilde{M}_x^l (-1)^n] \right\} (-1)^n = 0 \quad (19. h)
 \end{aligned}$$

여기서 사용된 다른 상수들의 값은 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned}
 q_1 &= \lambda\pi [\bar{A}_{66} + (C_3 - C_4)\bar{B}_{66} - C_3C_4\bar{D}_{66}]n \\
 q_{13} &= -(\lambda\pi)^2 (\bar{B}_{12} + \bar{D}_{12}n^2) \\
 q_{18} &= (\lambda\pi n)^2 4\bar{D}_{66} \\
 q_2 &= -a_5 \\
 q_{23} &= -(\lambda\pi)^2 (\bar{B}_{12} + C_2\bar{D}_{12})n \\
 q_3 &= -(\lambda\pi)^2 (2\bar{B}_{66} + C_1\bar{D}_{12} - C_2\bar{D}_{12} \\
 &\quad + 2C_3\bar{D}_{66})n \\
 \bar{q}_3 &= -(\lambda\pi)^2 (2\bar{B}_{66} + 2C_3\bar{D}_{66})n \\
 q_4 &= \lambda\pi [\bar{A}_{66} + (C_3 - C_4)\bar{B}_{66} - C_3C_4\bar{D}_{66}]n
 \end{aligned} \right\} (20)$$

식 (13)과 (14)를 식 (19)에 대입하여 다음과 같은 진동수 방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned}
 [e_i, j] \{ \tilde{N}_x^0, \tilde{N}_x^l, \tilde{M}_x^0, \tilde{M}_x^l, v_0, v_l, w_0, w_l \}^T \\
 = \{0\}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, 8) \quad (21)
 \end{aligned}$$

식 (21)의 non-trivial solution은 행렬의 행렬식이 '0'이 되어야 한다.

$$|e_i, j| = 0 \quad (22)$$

이 식에서 그 고유치 (eigenvalue)가 셀의 고유진동수를 결정하는 특성방정식의 해가 되며 이 진동수 행렬식의 각 요소는 무한급수로 표현된다.

#### 4. 진동수 행렬식 (Frequency Determinant)

식 (22)는 FSNT 셀의 경계조건들을 만족하는 진동수 행렬식으로서 외팔형 (C-F) 셀에 대해서는 이 식에서 필요없는 행과 열을 제외하여 얻어진다.

일단고정 타단자유 (C-F)인 외팔형 원통셀의 경계조건은

$$u=0, v=0, w=0, \partial w/\partial x=0 \text{ at } x=0 \quad (23. a)$$

$$N_x=0, \tilde{N}_x=0, \tilde{Q}_x=0, M_x=0 \text{ at } x=l \quad (23. b)$$

으로 부가해야될 경계조건은  $x=0$ 에서  $u=0$ 와  $\partial w/\partial x=0$ 이며,  $x=l$ 에서  $\tilde{N}_x=0$ 와  $\tilde{Q}_x=0$ 가 된다. 또한 불필요하게 만족되는 경계조건은  $x=0$ 에서  $N_x=0$ 와  $M_x=0$ 이고,  $x=l$ 에서  $v=0$ 와  $w=0$ 이다. 따라서 식 (22)에서  $\tilde{N}_x^0, \tilde{M}_x^0, v_l$ 과  $w_l$ 에 관련된 행과열을 유지하여 아래와 같은  $4 \times 4$  진동수 행렬식을 얻게 된다.

$$\begin{vmatrix}
 e_{1,1} & e_{1,3} & e_{1,6} & e_{1,8} \\
 e_{3,1} & e_{3,3} & e_{3,6} & e_{3,8} \\
 e_{6,1} & e_{6,3} & e_{6,6} & e_{6,8} \\
 e_{8,1} & e_{8,3} & e_{8,6} & e_{8,8}
 \end{vmatrix} = 0 \quad (24)$$

여기서

$$\begin{aligned}
 e_{1,1} &= \frac{1}{2a_2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \\
 e_{1,3} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n m \\
 e_{1,6} &= \frac{q_1}{2a_2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{q_1 a_n + q_2 a_n m \\
 &\quad + q_3 a_n m\} (-1)^n \\
 e_{1,8} &= \frac{q_4}{2q_2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{(q_4 - a_{31} m^2) a_n \\
 &\quad + q_5 a_n m + q_6 a_n m\} (-1)^n \\
 e_{3,1} &= e_{1,3} \\
 e_{3,3} &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n m^2 \\
 e_{3,6} &= \sum_{n=1}^{\infty} \{q_1 a_n m + q_2 C_n m^2 + q_3 C_n m^2\} (-1)^n \\
 e_{3,8} &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{(q_4 - a_{31} m^2) a_n m + q_5 C_n m^2 \\
 &\quad + q_6 C_n m^2 + 1\} (-1)^n \\
 e_{6,1} &= \frac{q_1}{2a_2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{q_1 a_n + q_2 b_n m + \bar{q}_3 a_n m\} \cdot \\
 &\quad (-1)^n \\
 e_{6,3} &= \sum_{n=1}^{\infty} \{q_1 a_n m + q_2 b_n m^2 + q_3 C_n m\} (-1)^n \\
 e_{6,6} &= \frac{q_1^2}{2a_2} + \frac{q_2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{q_1^2 a_n + q_2^2 b_n m^2 \\
 &\quad + q_3 C_n m^2 + (a_n + b_n) q_1 q_2 m + q_2 \cdot \\
 &\quad (q_3 b_n + \bar{q}_3 C_n) m^2 + q_1 (q_3 + \bar{q}_3) a_n m + q_2\} \\
 e_{6,8} &= \frac{q_1 q_4}{2a_2} + \frac{\bar{q}_3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{(q_4 - a_{31} m^2) (q_1 a_n \\
 &\quad + q_2 b_n m + \bar{q}_3 a_n m) + q_5 (q_1 a_n m + q_2 b_n m^2 \\
 &\quad + \bar{q}_3 C_n m^2) + q_6 (q_1 a_n m + q_2 b_n m^2 \\
 &\quad + \bar{q}_3 C_n m^2) + \bar{q}_3\} \\
 e_{8,1} &= \frac{q_4}{2a_2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{(q_4 - a_{31} m^2) a_n + \bar{q}_5 b_n m \\
 &\quad + q_6 a_n m\} (-1)^n \\
 e_{8,3} &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{(q_4 - a_{31} m^2) a_n m^2 + \bar{q}_5 b_n m^2 \\
 &\quad + q_6 C_n m^2 + 1\} (-1)^n \\
 e_{8,6} &= \frac{q_1 q_4}{2a_2} + \frac{\bar{q}_3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{(q_4 - a_{31} m^2) \\
 &\quad (q_1 a_n + q_2 a_n m + q_3 a_n m) \\
 &\quad + \bar{q}_5 (q_1 b_n m + q_2 b_n m^2 + q_3 b_n m^2) \\
 &\quad + q_6 (q_1 a_n m + q_2 C_n m^2 + q_3 C_n m^2) + \bar{q}_3\} \\
 e_{8,8} &= \frac{q_4^2}{2a_2} - \frac{q_{18}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [(q_4 - a_{31} m^2) \cdot \\
 &\quad \{(q_4 - a_{31} m^2) a_n + q_5 a_n m \\
 &\quad + q_6 a_n m\} + \bar{q}_5 \{(q_4 - a_{31} m^2) b_n m \\
 &\quad + q_5 b_n m^2 + q_6 b_n m^2\} + q_6 \{(q_4 - a_{31} m^2) a_n m \\
 &\quad + q_5 C_n m^2 + q_6 C_n m^2\} - a_n m^2 - q_{18}]
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

5. 수치예 및 고찰

본 연구에서 고려한 원통셸의 재료특성은 Table 2 와 같다.

Table 2 Mechanical properties of used materials

Material	Properties	$E_x$ (GPa)	$E_y$ (GPa)	$G_{xy}$ (GPa)	$\nu_x$	$\rho_0$ (kg/m <sup>3</sup> )
BORON-EPOXY (I)		217.18	18.62	5.17	0.28	2051.9
BORON-EPOXY (II)		206.90	18.62	4.48	0.28	2048.0
GRAPHITE-EPOXY		40.0	1.0	0.5	0.25	—
STEEL		210.0	210.0	145.83	0.28	7800.0
ALUMINUM		68.95	68.95	50.33	0.315	2714.5

수치연산은 Sanders 이론에 기초하여 수행하였으며 급수들은 충분한 수렴성을 검토하여 급수  $m$  을 50 항 까지 채택하였다.

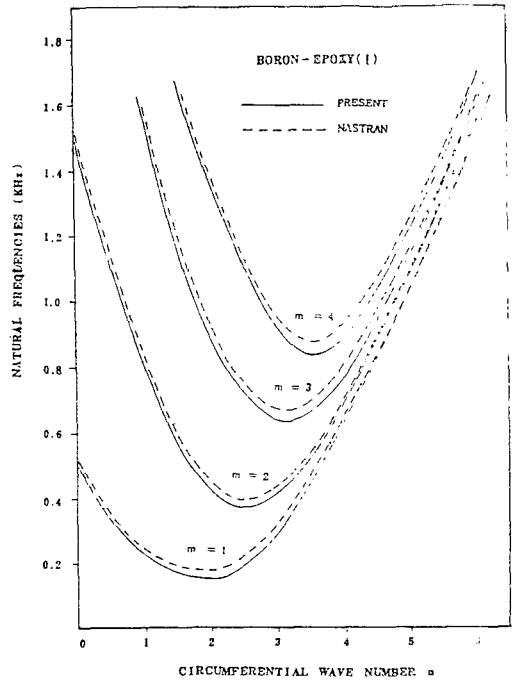


Fig. 2 Comparison of natural frequencies(KHz) for two layers 0°/90° cross-ply BORON-EPOXY (I) Shell ( $R/h=82.7, l/R=12.7$ )

Fig. 2는 직교이방성적층판을  $0^\circ/90^\circ$  cross-ply로 적층시킨 BORON-EPOXY (I)셀에 대해서 현재의 해석결과와 NASTRAN 프로그램을 사용하여 구한 수치결과를 비교한 것이다. 현재의 해석결과는 NASTRAN 결과보다 항상 낮은 값을 가지며 이들 사이의 오차는  $n$ 이 증가할수록 점차 커지고 최저진동수가 일어나는  $n$ 값에서 최대오차를 갖게되며 그후 점차 줄어들어 보여 준다.

Fig. 3과 4는  $\theta^\circ/0^\circ/\theta^\circ$ 로 적층된 BORON-EPOXY (II)셀에서 적층판의 적층각도 ( $\theta$ )가 셀의 고유진동수에 미치는 영향을 보여준다.

Fig. 5와 6은 3층 적층셀에서 직교이방성 매개변수  $E_x/E_y$ 에 따른 셀의 고유진동수의 변화를 도시한 것이다.  $E_x/E_y$  값이 커질수록 최저진동수가 발생하는 위치는 점차 높은 원주방향의 파동수로 옮겨진다. 최저고유진동수는  $0^\circ/0^\circ/0^\circ$  적층셀에서  $E_x/E_y$  값이 작을수록 높은 값을 갖게 되며,  $0^\circ/90^\circ/0^\circ$  적층셀에서는  $E_x/E_y=1$ 에서 최대가 됨을 알 수 있다.

Table 3과 4는 등방성원통셀 ( $E_x=E_y=E, \nu_x=\nu_y=\nu$ )에 대해 기존의 실험 및 이론결과들과 현재의 수치결과를 비교한 것이다. 현 해석결과와 이들사이에는 매우 잘 일치함을 알 수 있으며 Table 3의 STEEL 셀의 경

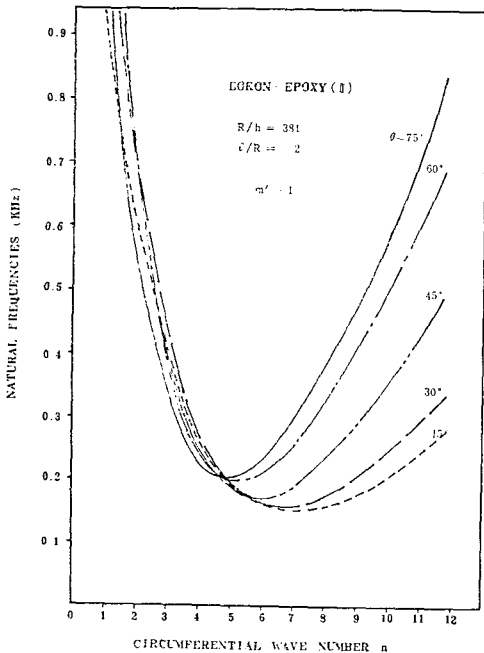


Fig. 3 Effect of lamination arrangement on the natural frequencies(KHz) for three layers  $\theta^\circ/0^\circ/\theta^\circ$  cross-ply BORON-EPOXY (II) Shell ( $R/h=381, l/R=2$ )

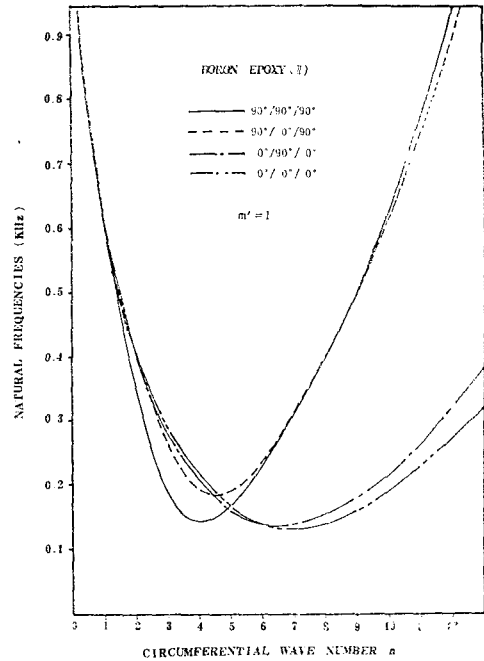


Fig. 4 Effect of lamination arrangement on the natural frequencies(KHz) for a three layered BORON-EPOXY (II) Shell ( $R/h=381, l/R=2$ )

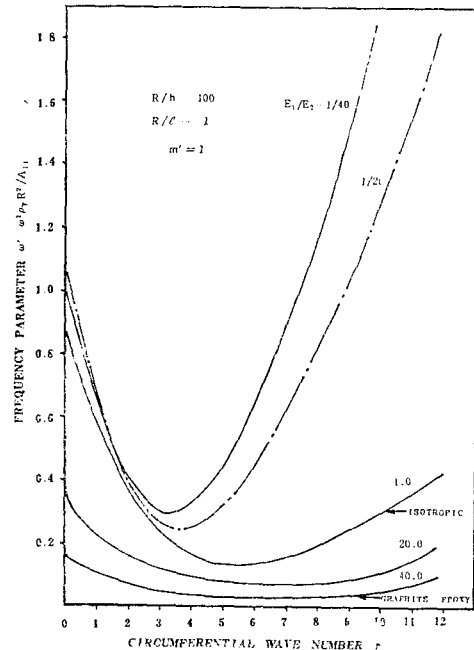


Fig. 5 Frequency parameter  $\bar{\omega}$  for a three layered  $0^\circ/0^\circ/0^\circ$  cylindrical shell

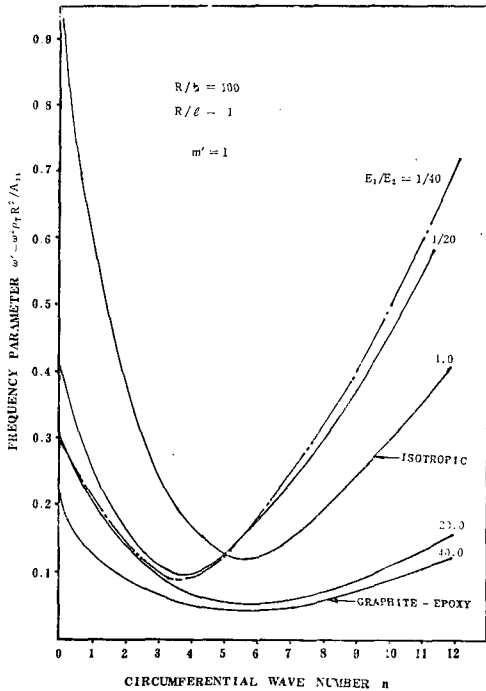


Fig. 6 Frequency parameter  $\bar{\omega}$  for a three layered  $0^\circ/90^\circ/0^\circ$  cylindrical shell

우 축방향 파동수  $m=1$ 에서 실험결과와의 최대오차는 원주방향 파동수  $n=2$ 일때 6% 이내이고, FEM 결과와의 최대오차는 2% 이내이다.

Table 3 Natural frequencies (Hz) for isotropic STEEL Shell ( $l=502\text{mm}$ ,  $R=63.5\text{mm}$ ,  $h=1.63\text{mm}$ )

$n$	Method	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$
2	Expt.*	293.0	827.0	1894.8	—
	Theory**	319.5	1019.7	2398.9	3963.2
	FEM***	316.2	948.6	2225.5	3716.5
	Present	311.4	947.4	2236.3	3741.7
3	Expt.	760.0	886.0	1371.0	2155.0
	Theory	769.8	930.4	1515.4	2428.3
	FEM	768.1	920.9	1484.6	2378.9
	Present	763.2	914.5	1465.8	2340.8
4	Expt.	1451.0	1503.0	1673.0	2045.0
	Theory	1465.8	1525.0	1730.3	2158.0
	FEM	1462.7	1521.0	1729.5	2168.6
	Present	1457.8	1517.5	1717.2	2130.2

5	Expt.	2336.0	2384.0	2480.0	2667.0
	Theory	2367.1	2409.2	2513.4	2722.6
	FEM	2362.3	2402.9	2512.1	2735.1
	Present	2356.7	2400.8	2507.5	2716.1
6	Expt.	3429.0	3476.0	3546.0	3667.0
	Theory	3470.3	3509.8	3586.6	3724.3
	FEM	3463.6	3499.9	3581.1	3728.3
	Present	3457.1	3498.5	3580.3	3722.0

\* Experimental frequencies are taken from ref.<sup>(13)</sup>

\*\* Theoretical frequencies are taken from ref.<sup>(5)</sup>

\*\*\* Numerical frequencies are taken from ref.<sup>(14)</sup>

Table 4 Natural frequencies (Hz) for isotropic ALUMINUM Shell ( $l=625.5\text{mm}$ ,  $R=242.3\text{mm}$ ,  $h=0.648\text{mm}$ )

$n$	Method	$m=1$	$m=2$	$m=3$
2	Expt.*	—	—	—
	Theory**	333.9	1407.7	2235.3
	Present	323.2	1224.5	2200.2
3	Expt.	150.0 (157.0)	—	—
	Theory	175.5	873.6	1639.1
	Present	169.8	770.3	1578.6
4	Expt.	107.0	—	—
	Theory	111.7	571.4	1204.1
	Present	108.0	515.0	1144.4
5	Expt.	89.0 (91.0)	—	—
	Theory	94.2	399.3	901.1
	Present	91.5	367.7	853.9
6	Expt.	102.0	276.0	—
	Theory	105.8	302.2	694.0
	Present	103.7	283.7	659.6
7	Expt.	130.0	240.0	—
	Theory	134.0	254.7	555.2
	Present	132.1	243.7	531.0
8	Expt.	166.0	227.0 (231.0)	—
	Theory	171.7	244.2	467.6
	Present	169.8	237.6	450.9
9	Expt.	208.0	246.0	400.0
	Theory	216.4	260.8	421.0
	Present	214.4	256.8	409.8

10	Expt.	260.0	281.0	—
	Theory	267.0	296.1	408.2
	Present	264.9	293.5	401.1
11	Expt.	317.0	337.0	409.0 (412.0)
	Theory	323.3	344.1	422.7
	present	321.0	342.0	418.3
12	Expt.	374.0	393.0 (396.0)	—
	Theory	385.0	401.2	457.9
	Present	382.6	399.4	455.2

\* Experimental frequencies are taken from ref. (15)

\*\* Theoretical frequencies are taken from ref. (5)

### 6. 결 론

(1) 적층직교이방성 외팔원통셀의 자유진동 문제에 대한 엄밀해법이 제시되었다.

(2) 본 해석의 적용예가 각종 수치예를 통하여 보여졌으며, 기존연구 및 NASTRAN 결과들과 비교하여 본 해석의 유용성 및 정밀도가 충분히 입증되었다.

(3) 직교이방성의 특별한 예로 등방성 외팔원통셀의 자유진동 특성도 고찰되었다.

### 후 기

본 연구는 1985년도 한국과학재단의 연구비에 의하여 연구되었으며, 관계자 여러분께 감사드립니다.

### 參 考 文 獻

(1) G.B. Warburton and J. Higgs, "Natural Frequencies of Thin Cantilever Cylindrical Shells," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 11, pp. 335~338, 1970

(2) H. Tottenham and K. Shimizu, "Analysis of the Free Vibration of Cantilever Cylindrical Elastic Shells by the Matrix Progression Method," *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 14, pp. 293~310, 1972

(3) C.B. Sharma and D.J. Johns, "Free Vibration of Cantilever Circular Cylindrical Shells-A Comparative Study," *Journal of Sound and Vibration*,

Vol. 25, No. 3, pp. 433~449, 1972

(4) R. Greif and H. Chung, "Vibrations of Constrained Cylindrical Shells," *AIAA Journal*, Vol. 13, No. 9, pp. 1190~1198, 1975

(5) C.B. Sharma, "Calculation of Natural Frequencies of Fixed-Free Circular Cylindrical Shells," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 35, No. 1, pp. 55~76, 1974

(6) C.B. Sharma, "Free Vibration of Clamped-Free Circular Cylinders," *Thin-Walled Structures*, Vol. 2, pp. 175~193, 1984

(7) O. A. Marzouk and G. Abdel-Sayed, "Linear Theory of Orthotropic Cylindrical Shells," *Journal of Structural Division, Proc. of ASCE*, Vol. 99, No. ST 11, pp. 2287~2306, 1973

(8) J. Schwaighofer, "Orthotropic Cylindrical Shells under Line Load," *Journal of Applied Mechanics* Vol. 46, pp. 356~362, 1979

(9) J.B. Greenberg and Y. Stavsky, "Vibrations of Laminated Filament-Wound Cylindrical Shells," *AIAA Journal*, Vol. 36, pp. 1055~1062, 1980

(10) K.P. Soldatos, "Free Vibrations of Antisymmetric Angle-Ply Laminated Circular Cylindrical Panels," *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, Vol. 36, pp. 207~221, 1983

(11) 이영신, 문홍기, "직교이방성 복합재료 원통셀의 진동해석" 대한기계학회 논문집 제 10 권, 제 5 호, pp. 758~769, 1986

(12) S.B. Dong, "Free Vibrations of Laminated Orthotropic Cylindrical Shells," *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 44, pp. 1628-1635 1968

(13) P.A.T. Gill, "Vibration of Clamped-Free Circular Cylindrical Shells," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 25, pp. 501~502, 1972

(14) 김현실, 이영환, "유한요소법에 의한 회전하는 얇은 축대칭셀의 진동에 관한 연구", 대한기계학회 논문집, 제 9 권, 제 4 호, pp. 487~496, 1985

(15) J.L. Sewall and E.C. Naumann, "An Experimental and Analytical Vibration Study of Thin Cylindrical Shells with and without Longitudinal Stiffeners," *NASA TND-4705*, 1968