大韓機械學會論文集 第10卷 第3號, pp. 383~391, 1986.

<論 文>

鐘形셸의 두께變化 및 非對稱效果에 따른 振動 모우드 解析에 관한 硏究

鄭 錫 柱* · 孔 昌 德** · 廉 永 夏***

(1986年 3月 19日 接受)

Modal Analysis of the Bell Type Shell with Thickness and Asymmetric Effects

Suk Choo Chung, Chang Duck Kong and Young Ha Yum

Key Words: Modal Analysis(모우드解析), Bell-Type Shell(鐘形셸), 3-D Mode Shape(3次元모우드形態), Thickness and Asymmetric Effects(두께 및 비대칭效果), Finite Element Method(有限要素法)

Abstract

Mode shapes and natural frequencies of the bell type shell are analyzed numerically by the finite element method.

The impulse hammer method and the Fast Fourier Transform analyzer are used for the experimental test. All types of mode shapes are expressed by the computer graphics.

Numerical solutions are good agreement with the experimental results.

The sustaining sound of the typical bell-type shell depend upon the first flexural mode (0~2 mode) and the second flexural mode (0~3 mode), and their mode shapes are independent upon thickness Dangjwas, holes, and added mass effects.

Asymmetric effects by Dangjwas, holes and added mass give rise to beat frequencies, and the added mass is found to be most effective.

記 號 說 明

$\{a\}$	: 모우드벡터
B	: 變形率形狀函數
$[C]$	: 減衰매트릭스
D	: 탄성매트릭스
$F(j\omega)$	: 入力스펙트럼
$H(j\omega)$	: 應答函數
h	: 要素두께
$\|J\|$	: Jacobian 값
$[K]$	: 剛性매트릭스
$[M]$	: 質量매트릭스
N	: 形狀函數
$P(t)$	: 時間函數인 外力
u, v	: 面內變位
$\dot{u}$	: 速 度
$\ddot{u}$	: 加速度
w	: 처짐變位

* 正會員, 京畿工業開放大學 機械設計學科
** 正會員, 檀國大學校 大學院
*** 正會員, 서울大學校 工科大學 機械設計學科

W_i : Gauss 數値積分 加重値
$X(j\omega)$: 出力스펙트럼
X, Y, Z : 全體座標系
α, β : 回轉成分
ξ, η, ζ : 要素局部座標系
λ : 固有値
ω : 固有振動數

1. 緖 論

鐘形셸 構造物은 이미 靑銅器文化時期부터 製造利用되어 왔으나 이에 대한 解析的 硏究는 19世紀末 Rayleigh[1]에 의해 始作되었다. Love[2]는 굽힘모우드만 考慮한 Rayleigh 理論을 修正하였고, Timoshenko[3], Flügge[4], Novozhilov[5], Arnold와 Warbuton[6], Goldberg와 Bogdanoff[7], Kalins[8] 및 Leissa[9]等에 의해 解析的으로 發展시켜왔다. 1960年代 中半 以後 컴퓨터에 의한 數値解析法(F.E.M. 또는 F.D.M.)을 이용해 Percy, Pian, Klein과 Navaratna[10], Sen과 Gould[11], Johnes와 strome[12]등이 軸對稱셸에 대한 모우드 解析을 하였다.

鐘形셸 構造物로서 西洋 敎會鐘에 대한 硏究는 Jones[13]와 Curtiss[14]등에 의해 進行되었고 東洋의 梵鐘에 대한 硏究는 Aoki와 Yamashita[15,16], Komatsuzawa[17]등에 의해 울림周波數 矯正, 餘韻의 調整등에 관한 實驗的 硏究가 進行되었다. 最近 國內에서도 普信閣鐘의 鑄造를 前後하여 鐘셸 構造物의 振動 硏究가 活潑히 試圖되고 있으나[19~25] 3차원 모우드形態에 관한 硏究는 아직 초기단계에 지나지 않는다.

打音을 重要視하는 서양종의 振動樣式과는 달리 韓國鐘은 餘韻 즉, 基本音을 중요시하고 있다. 그런데 基本音은 몇 개의 基本굽힘모우드에 의해 支配됨을 알 수 있다. 따라서 本 論文에서는 이들 基本모우드형태가 檢討되었고 또한 두께효과와 非對稱性 效果에 따른 固有振動周波數, 모우드形態, 울림주파수의 변화를 數値的 解析과 實驗的 解析方法에 의해 比較檢討되었다. 數値解析方法은 有限要素法으로 利用된 프로그램은 NASTRAN[26,27]프로그램이고 모우드의 형태는 Tectronics 컴퓨터그래픽을 이용하여 나타내었다. 實驗的 方法은 衝擊햄머법과 F.F.T. 分析裝置(Fast Fourier Transformation Analyzer)를 利用하였다.

2. 數値解析方法

數値解析에 利用된 方法은 有限要素法이고, 使用된 有限要素는 굽힘과 膜應力特性을 가진 彈性四邊셸요소(QUAD 4)이다. QUAD 4要素는 4개의 節點을 가지고 各 節點은 5개의 自由度를 가지며 使用된 座標系는 Fig. 1과 같다.

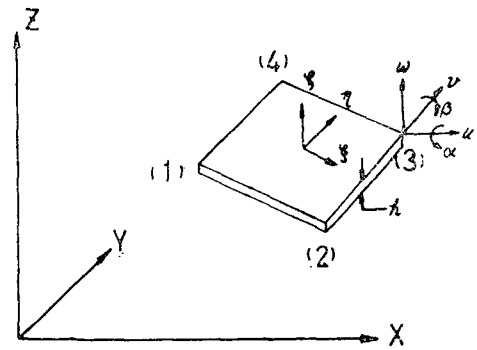


Fig. 1 Quadrilateral element Coordinates

要素의 各 節點의 變位벡터 $\{u\}$는 膜應力에 의한 面內變位 u, v와 굽힘응력에 의한 처짐 w, 회전 α, β로 構成된다. 動的인 系의 힘의 平衡方程式은

$$[M]\{\ddot{u}\}+[C]\{\dot{u}\}+[K]\{u\}=\{P(t)\} \quad (1)$$

여기서 좌변의 첫째항은 慣性力, 둘째項은 減衰力, 셋째항은 彈性力이고 우변은 時間의 函數인 外力이다. 固有値 問題로 만들기 위해서는 감쇠력과 外力은 소거하고 解를 調和函數$\{ae^{i\omega t}\}$로 가정하면 다음과 같다.

$$([K]-\omega^2[M])\{a\}=0 \quad (2)$$

剛性매트릭스 $[K]$는 各 要素매트릭스 $[K_e]$를 組合한 것이며, 要素매트릭스는 假想일의 原理로부터 구해지며 다음과 같다.

$$[K_e]=\int_{V_e} B^T D B d(\mathrm{Vol})$$
$$=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} B^T(\xi_i,\eta_j)\, D\, B(\xi_i,\eta_j)\, W_i W_j h|J| \quad (3)$$

여기서 D는 彈性매트릭스, B는 變形率形狀函數이고 數値積分은 Gaussian Quadrature를 利用하였고 ξ, η는 局部座標系이고 W_i는 가중계수, $|J|$는 Jacobian 값이다. 질량매트릭스 $[M]$ 역시 各 要素 매트릭스 $[M]_e$를 組合한 것이며, 質量매트릭스는 D'Alembert 原理로부터 구해지며 다음과 같다.

$$[M]_e=\int_{V_e} N^T \rho N d(\mathrm{Vol})$$
$$=\sum\sum N^T(\xi_i,\eta_j)\,\rho N(\xi_i,\eta_j)\, W_i W_j h|J| \quad (4)$$

여기서 ρ는 質量密度, N은 形狀函數이다.

式(2)로부터 固有値 $\lambda=\omega^2$으로 정의하면 一般的인 固有値 問題의 支配方程式이 된다.

$$([K]-\lambda[M])\{a\}=0 \quad (5)$$

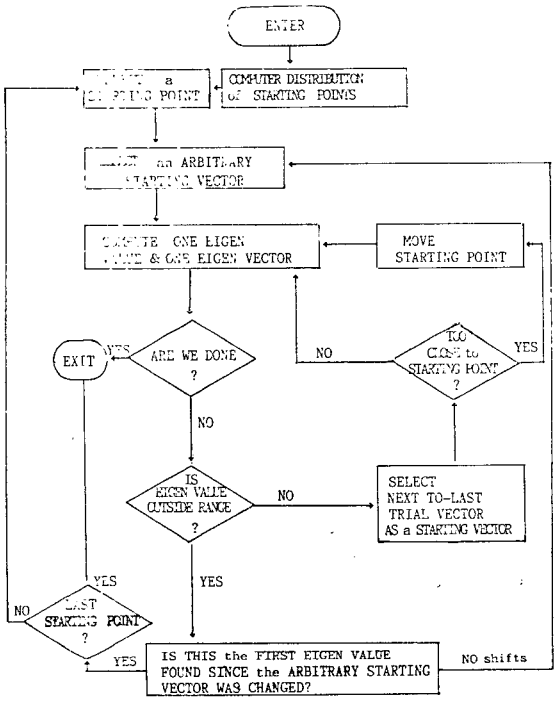


Fig. 2 Overall flow diagram for inverse power method with shifts

여기서 $\{a\}$는 固有値 벡터로 모우드形態를 나타낸다.

本 硏究에서 固有値問題의 解析은 固有値의 범위를 알고 몇개의 固有値를 구하여 計算時間을 절약하는데 다른 方法보다 유리한 IPM(Inverse Power Method)[26]을 利用하였는데 이 方法의 根本原理는 反復技法으로 다음과 같다. 式(5)를 다시 쓰면

$$\{a\} = \lambda[K]^{-1}[M]\{a\} \tag{6}$$

(λ_i, a_i)의 初期値를 가정하여 다음과 같이 n회 反復하여 規定된 범위 以下로 수렴하도록한다.

$$\{W_{n+1}\} = [K]^{-1}[M]\{a_n\} \tag{7}$$

$$\{a_{n+1}\} = \{W_{n+1}\}/\lambda_{n+1} \tag{8}$$

I.P.M.의 計算過程의 流通圖는 Fig. 2와 같다.

3. 實驗裝置 및 方法

實驗에 使用된 모델은 公州 甲寺鐘을 1/2.5倍로 縮少하여 두께가 다른 A, B 두 種類를 製作하였으며 材質은 靑銅으로 機械的 性質은 Table 1과 같다. 實驗裝置는 Fig. 3과 같이 설치하였고 測定裝置의 系統圖는 Fig. 4와 같다. 衝擊햄머에 의해 打擊을 가하면 衝擊力이 piezo 形센서를 통해 感知되고 또한 衝擊力에 의한 모델의 振動이 加速度計를 통해 感知되어 F.F.T. 스펙트럼分析器에 전달되어 分析되며 X-Y 記錄計로 記錄한다.

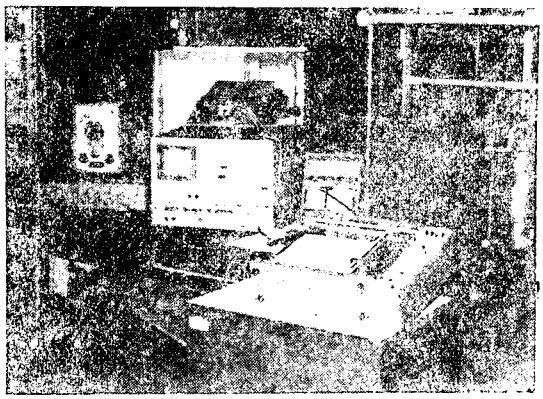


Fig. 3 Experimental test set-up

衝擊試驗에 使用된 주요 實驗裝置는 다음과 같다.

F.F.T. Analyzer: CF-500 Dual Channel (ONO SOKKI)

PS-020 Power supply amp. BBN Model 501 accelerometer

PCB Piezotrincs社 impulse hammer & Model 480 A Power-Unit

加速計의 附着 位置는 衝擊햄머 打擊位置 반대편 下端으로부터 26 mm이고 衝擊햄머 打擊位置는 半圓方向으로 9等分하고 길이方向으로는 65 mm 간격으로 等分하여 생기는 交點 중 모델 A는 24個所, 모델 B는 17個所를 選定하였다. 스펙트럼分析器에 나타난 固有振動數는 最大値가 鮮明한 것만을 구분하여 選定하였다. F.F.T. 分析器는 入出力關係의 應答函數인 傳達函數를 구하여 固有振動數 및 振動모우드가 구해진다.

$$H(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{F(j\omega)} \tag{9}$$

Table 1 Mechanical properties of the test bell

Material type (bronze)	Young's modulus (kg/mm²)	Poisson's ratio	Weight density (kg/mm³)	Tensile strength (kg/mm²)	Impact value (kg-m)	Hardness	
						HRB	HBN
18% Sn	9.03×10^3	0.34	8.6×10^{-6}	44.79	11.76	72.8	102.

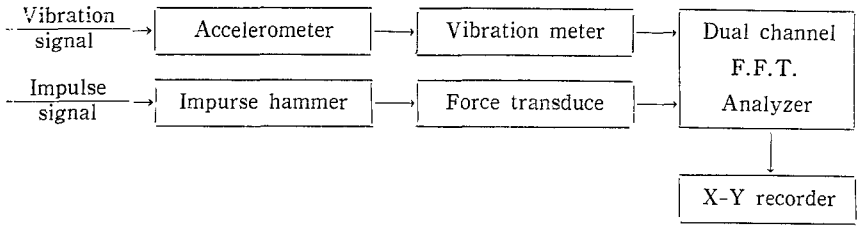


Fig. 4 Schematic diagram for the natural vibration mode test

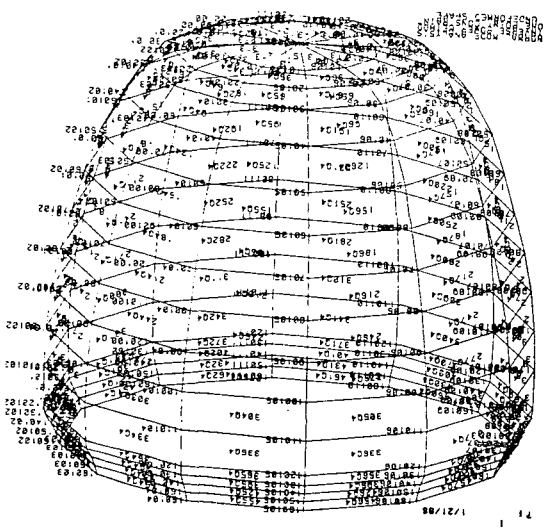


Fig. 5 Mesh generation of the bell type shell

여기서 $F(j\omega)$는 入力스펙트럼으로 衝擊햄머로부터 구해지며 $X(j\omega)$는 出力스펙트럼으로 加速計로부터 구해져 結局 應答函數 $H(j\omega)$가 구해진다.

4. 結果 및 檢討

構造物의 要素 分割은 컴퓨터 計算時間을 절약하도록

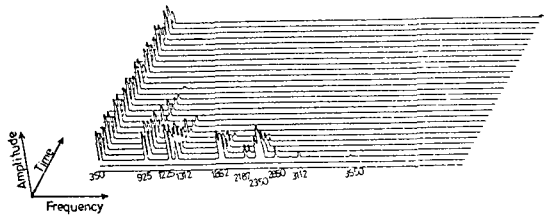


Fig. 6 Variation of the amplitudes vs time for natural frequencies of model A

하였으며 간단한 入力資料에 의해 自動 分割된다. A, B 모델을 동일하게 要素分割 하였으며 總要素數는 192個 總節點數는 193個이다. Fig. 5는 鐘構造物의 要素分割을 나타내면 表示된 숫자는 要素 番號와 節點番號를 나타낸다.

두께效果와 非對稱性 效果에 따른 固有振動數와의 부합된 모우드를 調査하기 위해 다음 몇가지로 나누어 檢討하였다.

(1) 두께效果 : 全般的인 두께變化를 준 A 모델(平均 10 mm), B 모델(平均 6 mm)을 비교검토 하였으며 下端部의 두께를 增減하여 검토하였다.

(2) 非對稱性效果 : 下端部의 質量 및 갯수調節, 구멍位置變化, 撞座位置 및 갯수調節을 하였다.

모우드形態에 있어 圓周方向은 q, 軸方向은 p로 表示한다. 또한 굽힘에 의한 휨모우드(flexural mode)는 f, 面內荷重에 의한 擴張모우드(extension mode)는 e

Table 2 Comparision of natural frequencies for model 'A' and model 'B'

Mode shape No.				Natural frequencies(Hz)						Increment(Hz)			Remark
Axi	Cir.	flex.	ext.	Model 'A'			Model 'B'						
p	q	f	e	F.E.M	Exp	Dev (%)	F.E.M	Exp	Dev (%)	F.E.M	Exp	Dev (%)	
0	0	—	1	118.9	—	—	122.3	—	—	−3.4	—	—	
0	1	—	2	225.0	—	—	162.0	—	—	63.0	—	—	
0	2	1	—	391.7	350	12.0	255.8	225	12.0	135.9	125	8.7	
0	3	2	—	909.6	925	1.7	606.2	638	4.9	303.4	288	5.3	
0	4	3	—	1258.8	1225	2.8	911.3	1003	9.1	347.5	223	49.1	

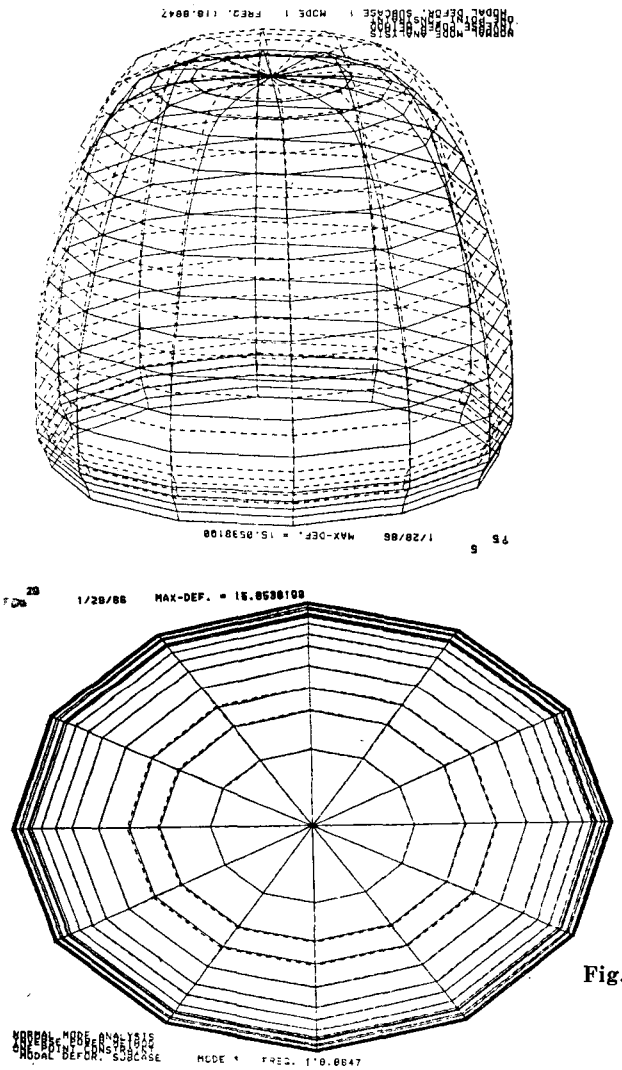
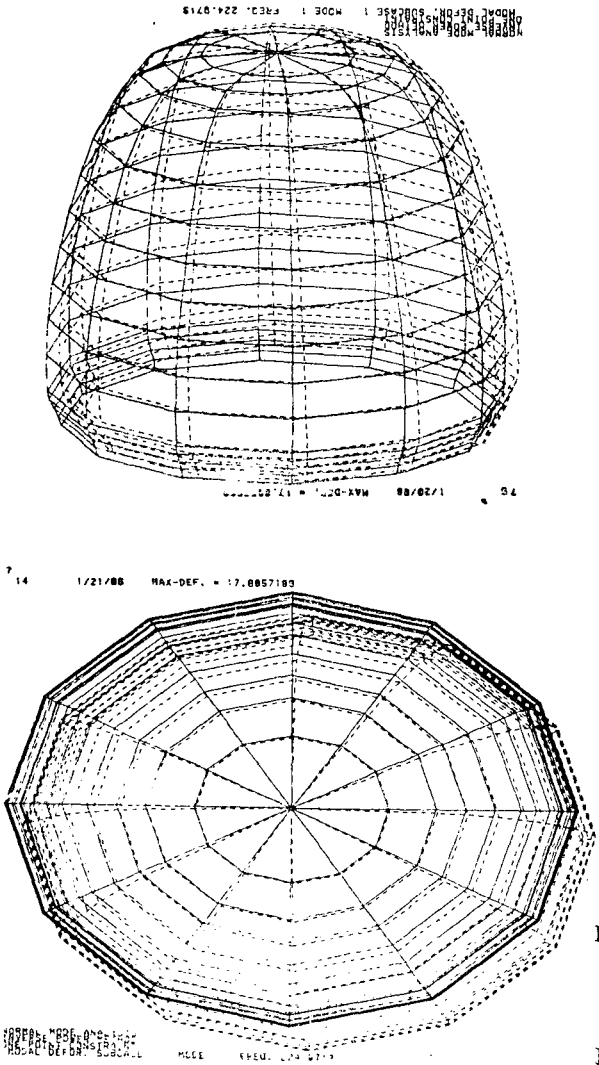


Fig. 7 (a) 0-0 mode (11 9Hz)

로 구분하여 表示한다. 實驗 結果 鐘構造物의 支配的인 振動모우드는 휨모우드이며 또한 이중 첫번째와 2번째 정도의 基本모우드가 打擊後에도 계속남아 餘音을 지배함을 알 수 있었다. Fig. 6은 A 모델을 實驗한 結果이다.

4.1 鐘두께의 影響

Table 2는 平均두께가 각각 10 mm인 A 모델과 6 mm인 B 모델을 固有振動數와 振動모우드를 비교한 것으로 두께 增加에 따라 固有振動數가 增加함을 알 수 있었다. 振動모우드形態는 두께 變化에 關係없이 모우드 形態番號만 동일하면 거의 類似한 形態를 보였으며 實驗에서 얻어진 固有振動數 및 모우드는 휨모우드에만 나타났다. Fig. 7은 A 모델의 0-0모우드, 0-1모우드, 0-2모우드, 0-3모우드, 0-4모우드의 3次元모우드形態, 軸方向모우드(p) 및 圓周方向 모우드(q)를 나타낸 것이다. 여기서 實線은 變形前 構造物이고 點線은 變形된 모우드形態를 나타내며 각 固有周波數에서 동일形態의 모우드가 直交하여 2개씩 나타나는데 紙面관계상 하나만 表示하였다. 旣 製作된 鐘構造物의 基本 振動數를 調節하기 用易한 方法으로 두터운 鐘下端部位의 두께를 變化시키면 可能하다. 解析結果 B 모델의 경우 5 mm(24%) 두께 增加時 0-2모우드는 27. 7 Hz(11%)增加를, 0-3모우드는 57.5 Hz(9.5%)增加를 가져왔으며, 반면 5 mm 두께 減少時는 0-2모우드는 19.8 Hz(7.7%)減少를 0-3모우드는 45.8 Hz(7.6%) 減少를 가져왔다. 이 경우도 同一모우드番號에서 모우드 形態의 變化는 거의 없었다.



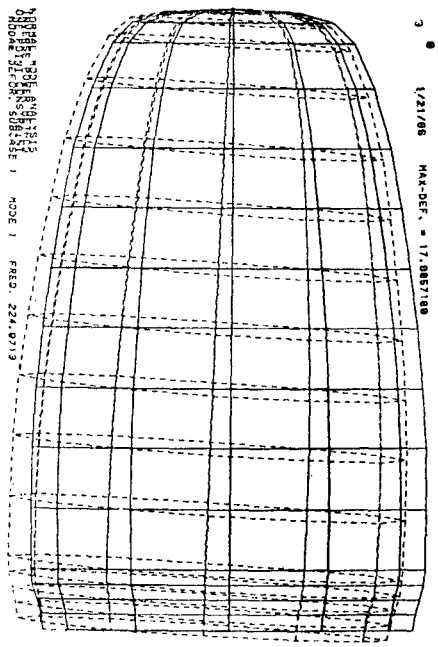
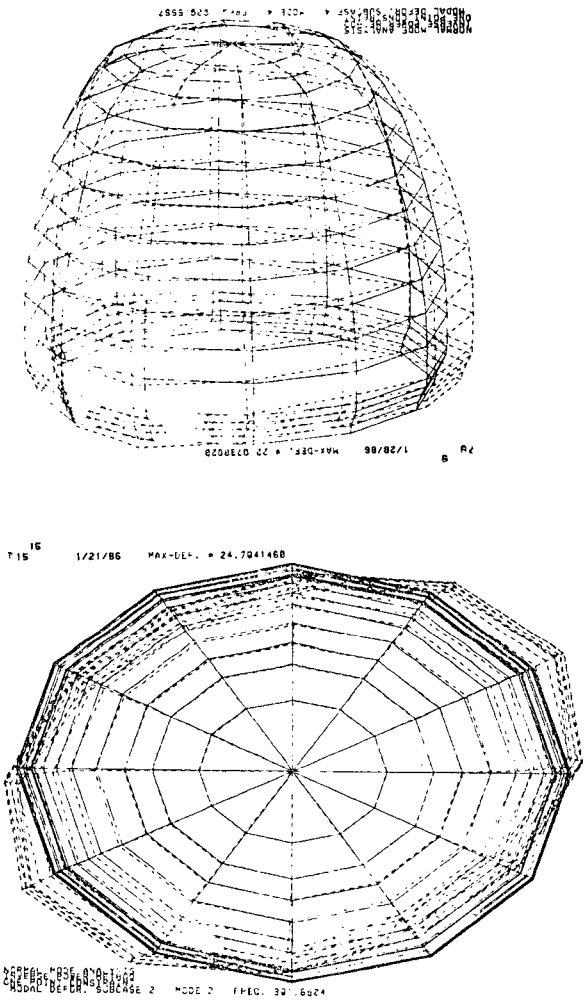


Fig. 7 (b) 0-1 mode (225 Hz)

4.2 非對稱性 因子의 影響

鐘의 音響은 맥놀이效果를 적절히 줌으로써 아름다운 소리를 오래 持續시킬 수 있다. 이런 效果는 對稱性效果에 起因하는데 鐘構造物은 特性上 撞座, 龍頭, 音管等에 의해 固有의 非對稱性을 가지고 있다. 따라서 非對稱性 效果를 檢討하기 위해 撞座의 位置 및 갯수 附加質量의 位置 및 갯수와 구멍의 位置를 變化시켰다. 撞座의 경우 두께 3 mm, 폭 89.3 mm, 높이 40 mm 를 頂點으로부터 233 mm 位置에 圓周方向으로 2개인 경우와 4개인 경우가 檢討되었다. 檢討 結果 2개인 境遇가 4개인 境遇보다 좀 더 큰 울림周波數가 나타났으나 모우드形態의 큰 變化는 없었다. 貫通구멍의 境遇 폭 51.1 mm, 높이 19.7 mm 의 四角形구멍을 頂點으로부터 16.5 mm 와 폭 93.1 mm 높이 40 mm 의 四角구멍을 下端으로부터 353 mm 에 위치시켜 解析한 結果 구멍位置가 下端에 올수록 울림周波數가 커짐을 알 수 있었다. 울림周波數크기는 1 Hz 정도이었다. 그러나 모우드 形態의 變化는 역시 變化가 없었다.

가장 큰 非對稱效果를 부여하는 方法은 附加質量에 의한 것으로 下端에 附着할수록 效果가 큼을 알 수 있었다. 解析 및 實驗에 利用된 附加質量은 무게가 38.6 g 으로서 下端에 附着하고 1개, 2개(180°간격), 4개(90°간격)등을 附着하여 比較 檢討하였다. 이 경우 역시 2개인 경우가 非對稱效果가 가장 큼(0-2 모우드 경우 2.5 Hz)을 알 수 있었다. 實驗과 理論의 差異를 보인 것은 理論解析時 質量과 剛性效果를 同時에 주었기 때문이라 思料된다.



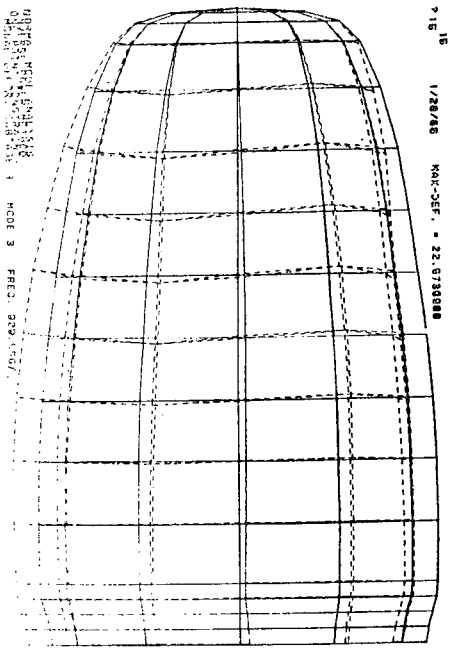


Fig. 7 (c) 0-2 mode (392 Hz)

5. 結 論

鐘形셸構造物의 固有振動數와 모우드 形態들이 두께效果와 非對稱效果에 따른 變化를 有限要素法을 利用하여 解析하고 이를 實驗에 의해 확인하였다.

(1) 鐘構造物의 振動모우드는 주로 0-2와 0-3인 첫번째와 두번째 휨모우드에 의해 支配되고 鐘構造物 餘音의 주요 모우드였다.

(2) 基本 構造物의 큰 變化없이 두께 또는 撞座, 구멍, 附加質量등에 의한 非對稱性效果에 따라 振動모우드의 變化는 거의 없다.

(3) 두께 增減에 의해 固有振動數도 增減하였다.

(4) 非對稱性效果에 의해 맥놀이現象을 일으키는 울림周波數가 發生하였으며 附加質量에 의한 것이 가장 效果的이었다.

Reference

(1) J.W.S., Rayleigh, The Theory of Sound, Vol. 1, p. 126 Dover Pub., London, 1884

(2) A.E.H. Love, "The small Free vibrations and Deformation of a Thin Elastic Shell", Phill Trans. Royal Soc. London, England(A), Vol. 179, pp. 491~546, 1888

(3) S. Timoshenko and Woinowsky-Krieger, Theory of Plates and Shells, Chap. 6, p. 185, Mc Graw-Hill, New York, 1959

(4) W. Flügge, Stresses in Shells, 2nd ed., Chap. 5 p. 150, Springer-Vertag, Berlin, 1962

(5) V.V. Novozhilov, The Theory of Thin Elastic Shells, Chap. 8, pp. 260~351, P. Noordhoff Lts.

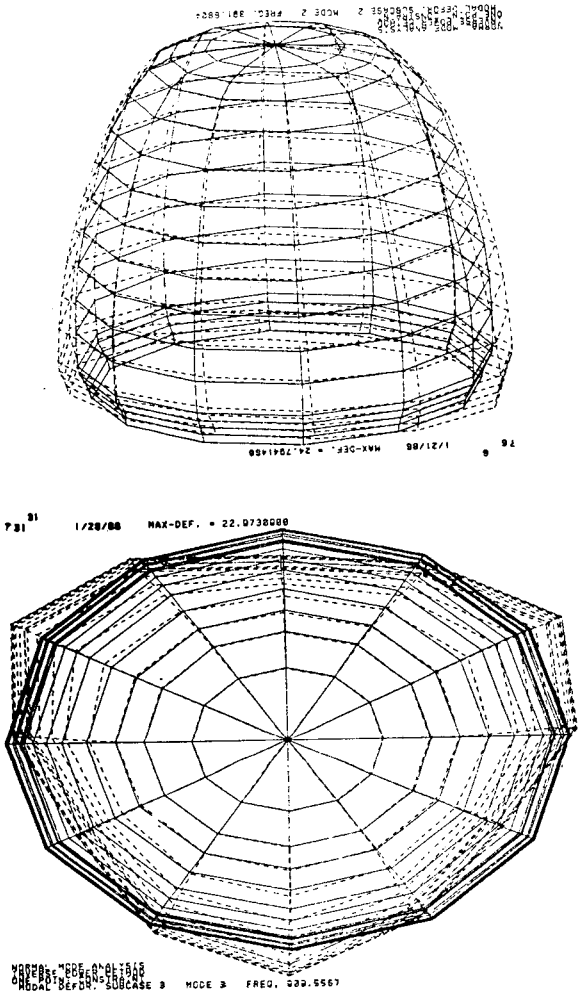


Fig. 7 (d) 0-3 mode (910 Hz)

1964

(6) R.N. Arnold and G.B. Warburton, "Flexural vibrations of the Walls of Thin Cylindrical Shells Having Freely Supported Ends", Proc. Roy. Soc., London, Vol. 17, pp. 238~256, 1949

(7) John E. Goldberg and John L. Bogdanoff, "On the Calculation of the Axisymmetric Modes and Frequencies of Conical Shells", J. Acoust. Soc., Amer., Vol. 5, pp. 130~145, 1960

(8) A. Kalins, "Free Vibration of Rotationally Symmetric Shell", J. Acoust. Soc. Amer., Vol. 9, pp. 270~283, 1964

(9) A.W. Leissa, Vibration of Shell, NASA SP-288, 1978

(10) J.H. Percy, T.H.H. Pian, S. Klein and R. Navaratna, "Application of Matrix Displacement Method to Linear Elastic Analysis of Shells of Revolutions", AIAA J., Vol. 8, pp. 231~240, 1965

(11) S.K. Sen and P.L. Gould, "Free Vibration of Shells of Revolution Using F.E.M.", J. Eng. Mech, ASCE, EM 2, Vol. pp. 261~273, 1974

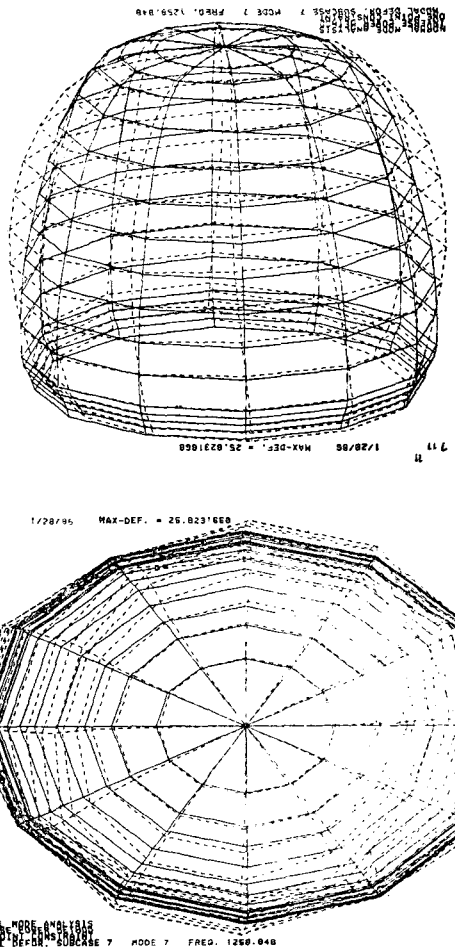
(12) R.E. Jones and D.R. Strome, "Direct Stiffness Method Analysis of Shells of Revolution Utilizing Curved Element", AIAA J., Vol. 16, pp. 390~399, 1966

(13) A.T. Jones, Phys. Rev. Vol. 16, p. 247, 1920 Vol. 31, p. 1092, 1928

(14) A.N. Curtiss and G.M. Gainnini, J.A.S.A. Vol. 4, p. 245, 1933, Vol. 5, p. 293, 1935

(15) K. Yamashita and L. Aoki, "On the Frequencies of the Sound Emitted by Japanese Hanging Bells", Memoirs of the Coll of Sci. Kyoto Univ. Series A, Vol. 15, pp. 572~583, 1932

(16) K. Yamashita and L. Aoki, "The Effect of the



(e) 0-4 mode (1259 Hz)

Fig. 7 3-D mode shape axial mode and circumferential mode of the model '*A*' bell

Length on the Frequency of Sound Emitted by a Circular Cylinder with a Hemispherical Cap", Memoirs of the Coll of Sci. Kyoto Univ, Vol. 17, pp. 381～392, 1934

(17) I. Aoki, A. Komatsuzawa and M. Ise, "Effect of Local Loading on the Acoustical Property of Japanese Bell", J. JAS Vol.26, No. 12, 1970

(18) 青木一郎, "日本梵鐘の調律法", 日本音響學會講演論文集, 第 14 卷, 第 5 號, pp. 351～358, 1967

(19) 李長茂, 廉永夏, "鐘形構造의 振動特性에 關한 硏究", 韓國梵鐘硏究會誌, 「梵鐘」 No. 3, pp. 31～38, 1980

(20) 李 樑, 廉永夏, 李長茂, 尹炳培, 郭在敬, "圓筒體의 振動 및 應力解析에 관한 硏究", 서울大學校 工科大學 硏究報告, 第 12 卷, 第 2 號, 1980

(21) 廉永夏, 李長茂, 郭在敬, "鐘體를 理想化한 圓筒體의 固有振動과 應力解析에 관한 硏究", 韓國梵鐘硏究會誌, 「梵鐘」, No. 3, pp. 19～30, 1980

(22) 廉永夏, 金奭鉉, "鐘形構造에 관한 硏究", 韓國梵鐘硏究會誌, 「梵鐘」, No. 4, pp. 55～68, 1981

(23) 廉永夏, 郭在敬, 鄭錫柱, "圓錐形셸의 音響調節에 관한 實驗的 硏究", 大韓機械學會論文集, 第 6 卷, 第 4 號, pp. 353～360, 1982

(24) 廉永夏, 郭在敬, 李榮培, 鄭錫柱, "韓國鐘構造에 關한 硏究", 韓國梵鐘硏究會誌, 「梵鐘」, No. 5, pp. 49～60, 1982

(25) Jahangir Ansari, "Dynamic Response Analysis of shell of Revolution due to External Forces using F.E.M.", S.N.U. Ph. D. Thesis, 1983

(26) NASTRAN Theoretical Manual, NASA Sp-221, Section. 5.3., 1980

(27) MSC/NASTRAN Primer, Static & Normal Modes Analysis, 1982