

<論 文>

# 乘用車用 레이디얼 타이어의 動的 特性에 관한 研究

金 斗 萬\* · 金 恒 旭\*\*

(1986年 6月 19日 接受)

## A Study of the Dynamic Characteristics of a Passenger Radial Tire

Doo Man Kim and Hang Wook Kim

**Key Words;** Passenger Radial Tire(승용차용 레이디얼 타이어), 2 Ply Steel Belt Radial Tire (2플라이 스틸 벨트 레이디얼 타이어), Tire Vibrations(타이어 振動), Cord-Rubber (코오드-고무), Composite Toroidal Finite Element(複合 토로이드 有限要素) Multi-Channel F.F.T. Analyser(멀티-채널 F.F.T. 分析器)

### Abstract

The dynamic characteristics of a passenger radial tire were studied by the analytical method and the experiments. The purpose of this study is to obtain the natural frequencies and the mode shapes of a 2 ply steel belt radial tire fixed on the wheel in order to give datum of the dynamic design of tire.

The governing equations are derived with the energy method. The composite toroidal finite elements with three degrees of freedom at each node are defined by specifying geometry, internal displacement functions, strain displacement and stress displacement relationships.

In order to verify the capability of the present analysis, the natural frequencies and mode shapes of the passenger radial tire are obtained experimentally by using the multi-channel F.F.T. analyser and compared the numerically obtained values. The results show that the analytically obtained values are in good agreement with the experiment and in addition they are in line with the Pott's experimental results.

### 記 號 說 明

$A_1, A_2$  : Lamé의 매개변수  
 $a$  : 타이어의 子午線 方向으로의 원의 반지름  
 $b$  : 子午線 方向으로의 圓의 中心에서부터 回轉軸中心까지의 거리  
 $E_1, E_2, G_{12}$  : 主應力方向에 對한 수직 彈性係數 및 剪

斷彈性 係數

$E_c, G_c, \nu_c$  : 코오드의 Young 率, 剪斷彈性係數 및 Poisson 比

$E_R, G_R, \nu_R$  : 고무의 Young 率, 剪斷彈性 係數 및 Poisson 比

$F_n, G_n$  :  $\alpha_1$  및  $\alpha_2$  만에 관련된 形狀函數

$f_i$  : 形狀函數

$G_{13}, G_{23}$  : 單位 길이당의 剪斷力

\* 正會員, 檀國大學校 大學院

\*\* 正會員, 韓國航空大學 航空機械工學科

- $N_0, N_6$  : 單位 길이당 初期 引張力
- $P$  : 타이어 內壓
- $R_1, R_2$  :  $\alpha_1$  및  $\alpha_2$  座標係에 關한 主曲率
- $r_0$  : 타이어 平行圓의 반지름
- $T$  : 運動 에너지
- $U_m$  : 膜 變形에너지
- $U_{iL}$  : 內壓으로 인한 變形에너지
- $u_1, u_2, u_3$  :  $\alpha_1, \alpha_2$  및  $\alpha_3$  方向으로의 變位
- $V_c$  : 코오드 體積比
- $w$  : 타이어의 반경 方向으로의 變位
- $w, a_1, w, a_2$  : 變位에 對한 1次 導函數
- $D_{ij}$  : 굽힘 剛性 매트릭스
- $K_{ij}, \bar{K}_{ij}$  : 要素 및 構造物 全體의 剛性 매트릭스
- $M_{ij}, \bar{M}_{ij}$  : 要素 및 構造物全體의 質量 매트릭스
- $[Q], \bar{Q}_{ij}$  : 減少 剛性 매트릭스
- $[\bar{Q}], \bar{Q}_{ij}$  : 座標變換된 減少 剛性 매트릭스
- $[T]$  : 變換 매트릭스
- $\alpha$  : 코오드 각
- $\kappa_{11}, \kappa_{22}, \kappa_{12}$  : 曲率(굽힘 變形的 曲率항)
- $\omega$  : 固有 振動數
- $\sigma_i$  : 應力 벡터
- $\epsilon_j$  : 變形率 벡터
- $\pi$  : 係 全體의 에너지
- $\rho$  : 密度
- $\Delta_i, i=1\sim 12$  : 節點의 自由度 벡터
- $\theta$  : 타이어 回轉方向으로의 각
- $\phi$  : 타이어의 子午線 方向으로의 각

1. 緒 論

自動車의 타이어는 地面의 衝擊吸收性能을 높이기 위하여 內部에 空氣를 充憤하여 內部的 空氣壓력을 지탱하기 위하여 코오드 群에 의해 補強되어진 토로이드형 構造物이다. 이와같이 타이어는 코오드-고무의 複合材料로 構成되어 있기 때문에 이의 機械的 特性을 解析하는 方法으로 주로 코오드와 고무材 각각에 對한 材料特性을 求하여 이를 다시 複合材料特性值로 適用하여 왔다.

그러나 타이어의 性能매개 變數들을 最適化하기 위하여 코오드-고무材 각각에 대한 材料特性值가 아니라 複合異方性的 코오드-고무 材料에 대한 知識이 要求되고 있다.

타이어 産業에서 처음으로 코오드-고무 複合材料의 彈性特性에 關한 研究가 시작된 것은 Martin<sup>(1)</sup>에 의해

서였는데, Martin은 얇은 셀 理論을 適用하여 바이어스 플라이 航空用타이어의 彈性特性을 解析하였다. 이후 코오드-고무 複合 異方性 材料에 關한 彈性特性 研究는 S.K. Clark<sup>(2)</sup>, V.E. Gough<sup>(3)</sup>, G. Tangorra<sup>(4)</sup>, J.C. Halpin, S.W. Tsai<sup>(5)</sup>, T. Akasaka<sup>(6)</sup> 등에 의해 本格的으로 시도되었다.

타이어의 振動解析은 1960 年代末<sup>(7-9)</sup>에 시작되었으며 國內의 타이어 製造技術은 世界的 수준에 도달하여 많은 나라에 國產타이어의 수출을 시도하고 있으나, 타이어의 設計資料는 外國과 技術協約에 의해 情報提供을 받는 정도이다. 더욱이 構造力學의 解析은 全無한 상태로서, 本研究에서는 타이어의 動的設計의 基礎資料를 提示하는데 그 目的이 있다. 解析의 方法으로는 複合膜토로이드 有限要素를 利用하여 타이어의 固有振動數 및 振動모우드를 求하였으며, 그 正確성을 立證하기 위하여 밀디찬널 F.F.T. 分析器를 이용한 實驗의 結果 및 G.R. Potts<sup>(8)</sup>의 解析結果와 比較하였다.

2. 理論的 解析

2.1 코오드-고무 複合材料의 彈性特性

고무는 均質의 等方性 材質로 取扱되어지며 고무의 彈性特性을 나타내기 위하여는 2개의 彈性係數와 Poisson 값이 必要하다. 引長과 壓縮의 경우에 있어서 Young 係數와 Poisson 값은 一致한다고 假定한다. Table 1<sup>(10)</sup>은 低連, 室溫狀態下에서 일정 방향의 인장 시험에서 얻을 수 있는 고무의 彈性係數들의 대표적인 값을 나타낸다.

Table 1 Typical values of elastic constants for rubber of tire

Rubber skim stock	Young's modulus $E_R, MP_a$	Poisson ratio $\nu_R$
Textile body ply	5.5	0.49
Textile tread ply	21	0.49
Steel tread ply	14	0.49

타이어에 使用되는 코오드의 彈性特性은 一般的으로 다음의 5개의 係數로 表現된다.

- (1) 引張 Young 係數
- (2) 引張 Poisson 값
- (3) 橫方向의 Young 係數
- (4) 橫方向의 프와송 값
- (5) 剪斷彈性係數

2次元 코오드-고무 複合系의 경우 (3)과 (4)항은 다

른 特性値에 비해 크게 영향을 미치지 않으므로 이들 項은 無視할 수 있으며 코오드의 彈性係數는 특히 플라이 數나 靑인회수에 크게 영향을 받는다. Table 2<sup>(10)</sup>에 서는 타이어 코오드의 대표적인 영계수를 보여준다.

**Table 2** Typical values of Young's modulus for tire cord materials

Cord construction	Young's modulus $E_c, GP_a$
Belt ply	
5×1×0.25mm steel	110
167/2 kevlar	25
184/3 rayon	11
Body ply	
110/2 polyester	4.0
94/2 nylon	3.4

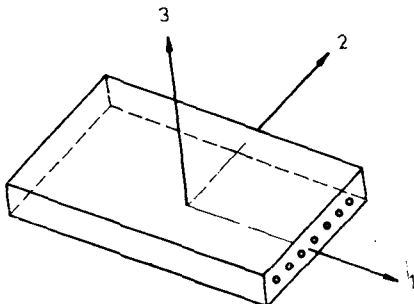
Fig. 1 에서와 같이 코오드와 고무로 複合된 경우 材質은 非均質의 異方性으로서 이의 解析을 위하여는 數學的 모델이 크고 엄청난 計算時間을 要하므로 直交 異方性 材質로 假定한다.

그리고 直交異方性 材質의 彈性特性을 나타내기 위하여 現在 가장 널리 使用되고 있으며 또한 平面應力 下에서 內部 플라이의 剪斷係數 決定에 有效한 Halpin-Tsai 式을 利用하며 이는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 E_1 &= E_c V_c + E_R (1 - V_c) \\
 E_2 &= E_R [E_c (1 + \xi_1 V_c) + \xi_1 E_R (1 - V_c)] / [E_c (1 - V_c) + \xi_1 E_R (1 + V_c / \xi_1)] \\
 \nu_{12} &= \nu_c V_c + \nu_R (1 - V_c) \\
 \nu_{21} &= \nu_{12} E_2 / E_1 \\
 G_{12} &= G_R [G_c (1 + \xi_2 V_c) + \xi_2 G_R (1 - V_c)] / [G_c (1 - V_c) + \xi_2 G_R (1 + V_c / \xi_2)]
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

코오드의 斷面形態가 원형인 경우  $\xi_1=2, \xi_2=1$ <sup>(10)</sup>의 經驗的인 값을 식(1)에 代入하면 식(2)와 같다.

$$E_1 = E_c V_c + E_R (1 - V_c)$$



**Fig. 1** Cord-rubber composite material

$$\begin{aligned}
 E_2 &= E_R [E_c + 2E_R + 2(E_c - E_R) V_c] / [E_c + 2E_R + (E_R - E_c) V_c] \\
 \nu_{12} &= \nu_c V_c + \nu_R (1 - V_c) \\
 \nu_{21} &= \nu_{12} E_2 / E_1 \\
 G_{12} &= G_R [G_c + G_R + (G_c - G_R) V_c] / [G_c + G_R - (G_c - G_R) V_c]
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

**2.2 複合膜 토로이드 有限要素**

(1) 座標系 및 自由度

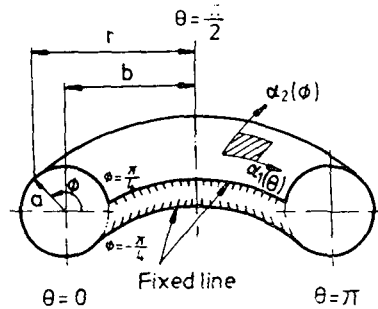
타이어의 幾何學的 形態를 構成하기 위해 두번이 曲率을 갖는 膜토로이드 有限要素를 利用하였다. 本研究에서는 참고문헌 (11)에서 開發된 膜토로이드 有限要素를 利用하여 타이어와 같은 直交異方性構造物에 適用될 수 있도록 하였다.

Fig. 2는 타이어 및 本 有限要素의 座標係를 나타낸다.

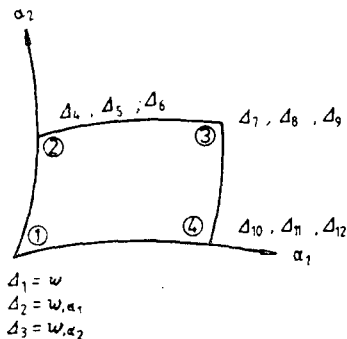
有限要素는 Fig. 3에서와 같이 4개의 節點을 가지며 각 節點에서 變位  $w$ 와 變位에 對한 1次도함수  $w_{,a_1}$  및  $w_{,a_2}$ 의 3개 自由度를 가진다.

(2) 變位函數

變位函數는 要素의 幾何學的인 치수 座標系 및 節點



**Fig. 2** Coordinates of tire and doubly curved composite membrane toroidal element



**Fig. 3** Doubly curved composite membrane toroidal finite element

의 自由度等에 의한 일련의 多項式으로 表示된다.

$$w(\alpha_1, \alpha_2, t) = W(\alpha_1, \alpha_2) e^{j\omega t} \quad (3)$$

여기서

$$W(\alpha_1, \alpha_2) = f_i(\alpha_1, \alpha_2) \Delta_i = [f] \{ \Delta \} \quad (4)$$

$f_i(\alpha_1, \alpha_2)$ 는 形狀函數로서 다음식과 같다.

$$f_i(\alpha_1, \alpha_2) = F_m(\alpha_1) G_n(\alpha_2) \quad (5)$$

식 (5)에서  $i, m, n$ 의 관계는 Table 3에 나타나 있다.

Table 3의 관계를 만족하면 식 (3)의 變位函數는 節點에서 모든 境界條件을 만족할 뿐만 아니라 要素의 變位에서 要素間의 幾何學的 相應性을 만족하게 된다.

Table 3 Correlation of paramaters  $i, m, n$

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$m$	1	2	1	1	2	1	3	4	3	3	4	3
$n$	1	1	2	3	3	4	3	3	4	1	1	2

(3) 變形率-變位關係式

變形率은 膜變形率과 굽힘變形率로 나타낼수 있다.

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \epsilon_{11}^\circ + \alpha_3 \kappa_{11} \\ \epsilon_{22} &= \epsilon_{22}^\circ + \alpha_3 \kappa_{22} \\ \gamma_{12} &= \gamma_{12}^\circ + \alpha_3 \kappa_{12} \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 膜變形率은

$$\begin{aligned} \epsilon_{11}^\circ &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + \frac{u_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + \frac{u_3}{R_1} \\ &\quad + \frac{1}{2A_1^2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} \right)^2 \\ \epsilon_{22}^\circ &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{u_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{u_3}{R_2} \\ &\quad + \frac{1}{2A_2^2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2} \right)^2 \\ \gamma_{12}^\circ &= \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{u_2}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{u_1}{R_1} \right) \\ &\quad + \frac{1}{A_1 A_2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} \right) \left( \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

굽힘 變形率에 對한 曲率은

$$\begin{aligned} \kappa_{11} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\beta_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \\ \kappa_{22} &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial \beta_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\beta_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \\ \kappa_{12} &= \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{\beta_2}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{\beta_1}{A_1} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

단,  $\beta_1$  과  $\beta_2$  는 굽힘에 對한 회전각으로써

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{u_1}{R_1} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} \\ \beta_2 &= \frac{u_2}{R_2} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2} \end{aligned} \quad (9)$$

本 研究에서는 平面變位  $u_1$  과  $u_2$  가 無視되고  $u_3$  를  $w$

로 표시하며 Fig. 2에서와 같은 토로이드의 座標系를 利用하면

$$\begin{aligned} A_1 &= r_0 = b - a \cos \phi \\ A_2 &= a \\ R_1 &= -r_0 \sec \phi \\ R_2 &= a \end{aligned} \quad (10)$$

식 (10)에 의하여 膜트로이드의 變形率은 식 (7)에서

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= -\frac{w}{r_0 \sec \phi} + \frac{1}{2r_0^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \\ \epsilon_{22} &= \frac{w}{a} + \frac{1}{2a^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \phi} \right)^2 \\ \gamma_{12} &= \frac{1}{ar_0} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \phi} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

(4) 應力-變形率 關係式

直交異方性 材料의 平面應力下에서 應力變形率關係式은 다음과 같다.

$$\sigma_i = Q_{ij} \epsilon_j \quad (i=1, 2, 3, \quad j=1, 2, 3) \quad (12)$$

식 (12)에서  $Q_{ij}$  를 식 (2)의 材料常數로 나타내면

$$\begin{aligned} Q_{11} &= E_1 / (1 - \nu_{12} \nu_{21}) \\ Q_{12} &= \nu_{12} E_2 / (1 - \nu_{12} \nu_{21}) = \nu_{21} E_1 / (1 - \nu_{12} \nu_{21}) \\ Q_{22} &= E_2 / (1 - \nu_{12} \nu_{21}) \\ Q_{33} &= G_{12} \\ Q_{13} &= Q_{23} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

그리고 다음의 Fig. 4에서와 같이 系의 座標  $x, y$  方向과 主材料軸 1, 2 方向이 서로 다를 경우 任意方向에서의 應力變形率 關係式은 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \frac{1}{2} \gamma_{12} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

식 (14)에서

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

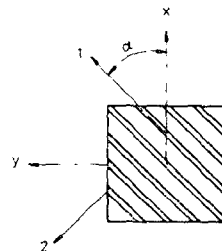


Fig. 4 Principal (1, 2) and off-angle (x, y) coordinate axes of a ply

그리고 식 (16)의 關係를 식 (12)에 代入하면

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T]^{-1}[Q][T] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{Q}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

이다. 단  $[\bar{Q}]$ 는 變形된 減少 強性매트릭스로서 그 要素들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \alpha + 2(Q_{12} + 2Q_{33}) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \\ &\quad + Q_{22} \sin^4 \alpha \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{33}) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \\ &\quad + Q_{12} (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \alpha + 2(Q_{12} + 2Q_{33}) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \\ &\quad + Q_{22} \cos^4 \alpha \\ \bar{Q}_{13} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{33}) \sin \alpha \cos^3 \alpha \\ &\quad + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{33}) \sin^3 \alpha \cos \alpha \\ \bar{Q}_{23} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{33}) \sin^2 \alpha \cos \alpha \\ &\quad + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{33}) \sin \alpha \cos^3 \alpha \\ \bar{Q}_{33} &= (Q_{33} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{33}) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \\ &\quad + Q_{33} (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) \end{aligned} \quad (18)$$

### 3. 支配 方程式과 質量 및 剛性 매트릭스의 構成

#### 3.1 支配方程式

直交曲線座標系에서의 運動에너지를

$$T = \frac{\rho}{2} \int_V (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dV \quad (19)$$

本 研究에서  $u, v$ 를 無視하였으므로 식 (19)는 다음과 같다.

$$T = \frac{\rho}{2} \int_V \dot{w}^2 dV \quad (20)$$

식 (3)을 식 (20)에 代入하면

$$T = -\frac{1}{2} h \rho \omega^2 \int_A w^2 dA \quad (21)$$

식 (21)에 變位函數 식 (4)를 代入하고 要素의 質量 매트릭스를 使用하여 運動에너지를 表示하면 다음과 같다.

$$T = -\frac{1}{2} \omega^2 \Delta_i M_{ij} \Delta_j \quad (22)$$

變形에너지를  $U$ 는 內壓에 의하여 增加된 에너지와 함께 표시되며 다음과 같다.

$$U = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon_i \sigma_i dV + \int_A N_i \varepsilon_i dA \quad (23)$$

平面應力下에서 식 (23)은 식 (24)와 같이 된다.

$$U = \frac{1}{2} h \int_A \varepsilon_i \bar{Q}_{ij} \varepsilon_j dA + \int_A N_i \varepsilon_i dA \quad (24)$$

$N_i$ 는 初期內壓에 의한 단위 길이당의 平面力으로서

$\theta$  方向의 힘  $N_\theta$ 와  $\phi$  方向의 힘  $N_\phi$ 가 있으며 이는 다음 식 (25)와 같다.

$$N_\theta = \frac{p a}{2} \quad (25)$$

$$N_\phi = \frac{p a}{2} \cdot \frac{b + r_0}{r_0}$$

식 (11) 및 식 (4)와 식 (25)를 식 (24)에 代入하고 要素의 剛性 매트릭스를 利用하여 變形에너지를 표현하면

$$U = \frac{1}{2} \Delta_i K_{ij} \Delta_j \quad (26)$$

本 研究는 自由振動의 問題이므로 하나의 要素에 對한 全에너지는 식 (22)와 (26)에 의해 다음과 같다.

$$\pi = -\frac{1}{2} \omega^2 \Delta_i M_{ij} \Delta_j + \frac{1}{2} \Delta_i K_{ij} \Delta_j \quad (27)$$

식 (27)에 對해 最小 포텐셜 에너지 理論을 適用하면 식 (28)과 같이 된다.

$$M_{ij} \Delta_j - \frac{1}{\omega^2} K_{ij} \Delta_j = 0 \quad (28)$$

식 (28)을 構造物 全體에 대해 중첩하고 變位 및 기울기 0인 境界條件을 適用하면 支配方程式은 다음과 같다.

$$(\bar{M}_{ij} - \lambda_j \bar{K}_{ij}) \Delta_j = 0 \quad (29)$$

$$\text{단 } \lambda_j = 1/\omega_j^2 \quad (30)$$

#### 3.2 質量 매트릭스와 剛性 매트릭스의 構成

식 (21)과 (3) 및 (4)로부터

$$\begin{aligned} T &= \frac{\rho h}{2} \omega^2 \int_A ([f] \{ \Delta \})^2 a r_0 d\theta d\phi \\ &= -\frac{\rho h \omega^2}{2} a [\Delta] \iint r_0 [f f] d\theta d\phi \{ \Delta \} \end{aligned} \quad (31)$$

식 (31)과 (22)를 비교하면 質量 매트릭스는

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \iint a \rho h (b - a \cos \phi) f_i f_j d\theta d\phi \\ &= a \rho h [b(\phi_2 - \phi_1) - a(\sin \phi_2 - \sin \phi_1)] \iint f_i f_j d\theta d\phi \end{aligned} \quad (32)$$

단,  $\phi_2, \phi_1$ 은 要素의 境界값이다.

타이어의 膜變形 에너지를

$$\begin{aligned} U_m &= \frac{1}{2} h \iint (\bar{Q}_{11} \varepsilon_x^2 + \bar{Q}_{22} \varepsilon_y^2 + \bar{Q}_{33} \gamma_{xy}^2 + 2\bar{Q}_{12} \varepsilon_x \varepsilon_y \\ &\quad + 2\bar{Q}_{13} \varepsilon_x \gamma_{xy} + 2\bar{Q}_{23} \varepsilon_y \gamma_{xy}) dA \end{aligned} \quad (33)$$

이다. 식 (33)에 식 (11)의 變형률-변위 關係식을 代入하여 정리하면

$$U_m = \frac{1}{2} h \iint \left[ \frac{a \bar{Q}_{11}}{r_0 \sec^2 \phi} + \frac{r_0 \bar{Q}_{22}}{a} + \frac{2\bar{Q}_{12}}{-\sec \phi} \right] w^2 d\theta d\phi \quad (34)$$

$b/a = \beta$ 로 두고  $\phi$ 에 대해 적분하면

$$U_m = \frac{1}{2} h_1 \left[ G \bar{Q}_{11} + \{\beta(\phi_2 - \phi_1) - \sin \phi_2 + \sin \phi_1\} \bar{Q}_{22} - 2 \bar{Q}_{12} (\sin \phi_2 - \sin \phi_1) \right] \iiint w^2 d\theta d\phi \quad (35)$$

여기서,  $G$  는

$$G = \frac{2}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \left[ \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{\beta^2 - 1} \tan \frac{\phi_2}{2}}{\beta - 1} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{\beta^2 - 1} \tan \frac{\phi_1}{2}}{\beta - 1} \right) \right] - \log(\beta - \cos \phi_2) + \log(\beta - \cos \phi_1) + \frac{1}{4} (\beta - \cos \phi_2)^2 - \beta(\beta - \cos \phi_2) + \frac{1}{2} \beta^2 \log(\beta - \cos \phi_2) - \frac{1}{4} (\beta - \cos \phi_1)^2 + \beta(\beta - \cos \phi_1) - \frac{1}{2} \beta^2 \log(\beta - \cos \phi_1) \quad (36)$$

식 (35)에서 膜剛性 매트릭스는

$$K_{ij})_m = h[G \bar{Q}_{11} + \{\beta(\phi_2 - \phi_1) - \sin \phi_2 + \sin \phi_1\} \bar{Q}_{22} - 2(\sin \phi_2 - \sin \phi_1) \bar{Q}_{12}] \iiint f_i f_j d\theta d\phi \quad (37)$$

그리고 內壓  $p$  가 作用할 경우 平面力에 의한 變形 에너지는 식 (26)의 두번째 項에 의하여

$$U_{iL} = \iint \left[ \frac{pa}{2} \cdot \frac{1}{2r_0^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{pa}{2} \cdot \frac{b+r_0}{r_0} \cdot \frac{1}{2a^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \phi} \right)^2 \right] a r_0 d\theta d\phi \quad (38)$$

식 (38)을  $\phi$  에 대해 적분하면

$$U_{iL} = \frac{1}{2} \cdot \frac{pa}{2} \left[ \frac{2}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \left\{ \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{\beta^2 - 1} \tan \frac{\phi_2}{2}}{\beta - 1} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{\beta^2 - 1} \tan \frac{\phi_1}{2}}{\beta - 1} \right) \right\} \right] \iiint w_\theta^2 d\theta d\phi + \{2\beta(\phi_2 - \phi_1) - (\sin \phi_2 - \sin \phi_1)\} \iiint w_\phi^2 d\theta d\phi \quad (39)$$

그러므로 內壓  $p$  에 의한 剛性 매트릭스는

$$K_{ij})_{iL} = \frac{pa}{2} \left[ \frac{2}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \left\{ \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{\beta^2 - 1} \tan \frac{\phi_2}{2}}{\beta - 1} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{\beta^2 - 1} \tan \frac{\phi_1}{2}}{\beta - 1} \right) \right\} \right] \iiint f_{i,\theta} f_{j,\theta} d\theta d\phi + \{2\beta(\phi_2 - \phi_1) - (\sin \phi_2 - \sin \phi_1)\} \iiint f_{i,\phi} f_{j,\phi} d\theta d\phi \quad (40)$$

構造物 全體의 剛性 매트릭스는

식 (37)과 (40)에 의해

$$K_{ij} = K_{ij})_m + K_{ij})_{iL} \quad (41)$$

#### 4. 問題說明 및 計算順序

本 研究에서 取扱한 타이어는 155SR-13 계열로써 2 플라이 스틸벨트의 乘用車용 레이디얼 타이어이며 그

단면모양은 Fig. 5에서 보는 바와 같다.

材料의 機械的 特性은 Table 4와 같으며 計算에 適用한 各 部位의 두께는 트레드부와 사이드월부 및 비이드 부분의 3부분으로 나누어 그 平均두께를 代入하였으며 트레드부와 비이드 부분은 코오드-고무 複合材料로 取扱하였고 사이드월 부분은 고무만으로 되어 있는 것으로 하여 計算하였다.

境界條件으로는 휘일에 비이드의 끝부분이 완전히 固定되어 변위  $w$ 와  $\theta$  方向에 대한 기울기  $w, \alpha_i$ 이  $\phi = \pm \frac{\pi}{4}$ 에서 영으로 하였다. 그리고 타이어의 密度는  $1.8 \cdot 85 \times 10^{-3} \text{kg/cm}^3$ 으로 하였다.

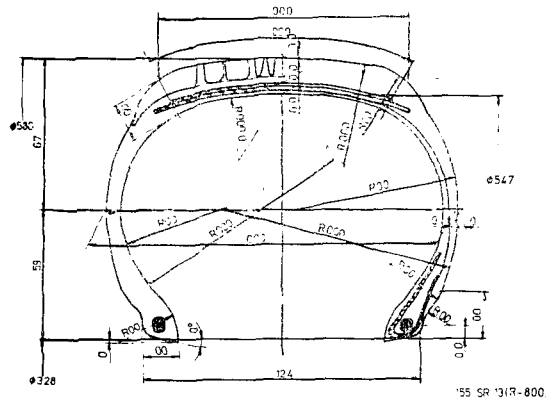


Fig. 5 Cross section of passenger radial tire

Table 4 Elastic constants of cord-rubber materials

$E_c$	$0.5149 \times 10^6 \text{kg/cm}^2$
$G_c$	$0.19806 \times 10^6 \text{kg/cm}^2$
$\nu_c$	0.3
$V_c$	0.11
$E_R$	$0.16214 \times 10^3 \text{kg/cm}^2$
$G_R$	$0.50476 \times 10^3 \text{kg/cm}^2$
$\nu_R$	0.49
$V_R$	0.89

Fig. 6은 타이어의 要素分割을 보여 주고 있다. Fig. 6에서 보면 構造物 全體를 모두 60개의 要素로 나누었고, 따라서 構造物 全體의 自由度數는 198개가 되며 휘일에 고정된 부분의 境界條件인 24개의 自由度를 구속하면 全體 매트릭스의 크기는  $174 \times 174$ 가 된다.

計算順序는 Fig. 7에서 보는 바와 같다.

#### 5. 實 驗

Zonic Modal 소프트웨어를 使用하여 衝擊試驗法으로 레이디얼 타이어의 固有振動數와 振動모우드를 구

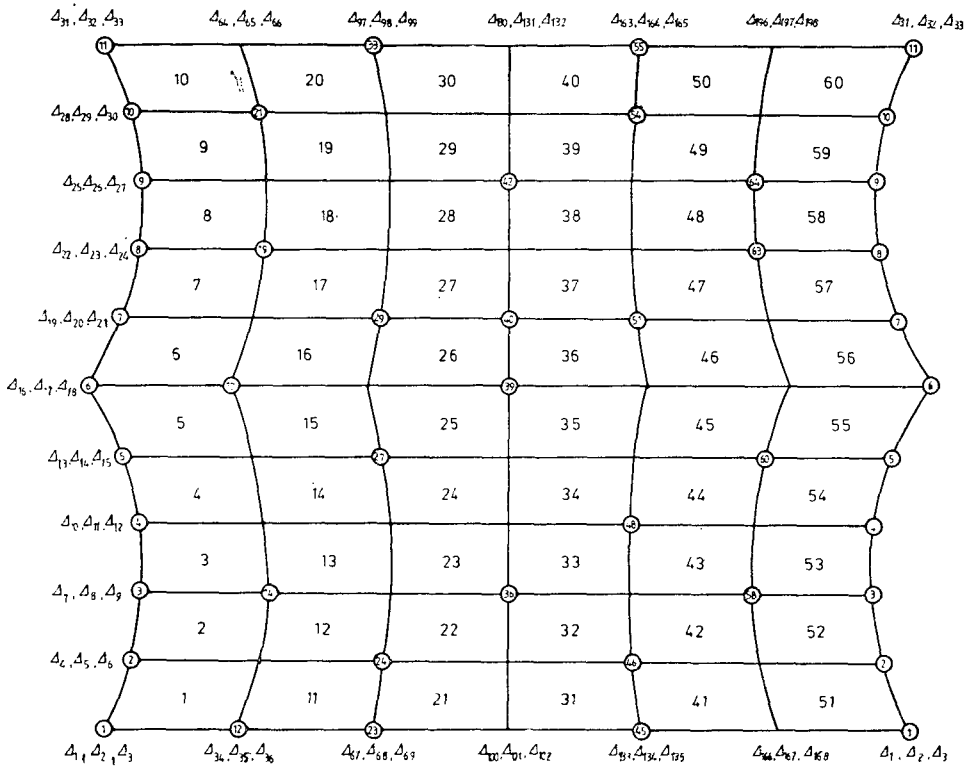


Fig. 6 Element mesh, node number, element number for tire

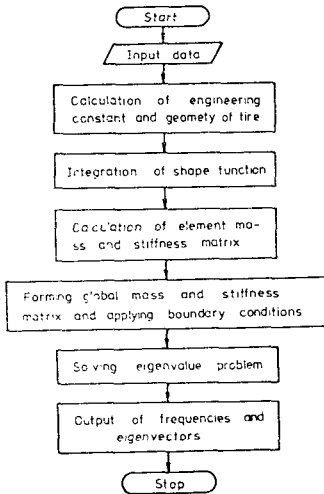


Fig. 7 A simplified flow chart of the computer program

하였다.

### 5.1 實驗裝置

本實驗에 使用된 타이어의 모델은 155SR-13 계열의

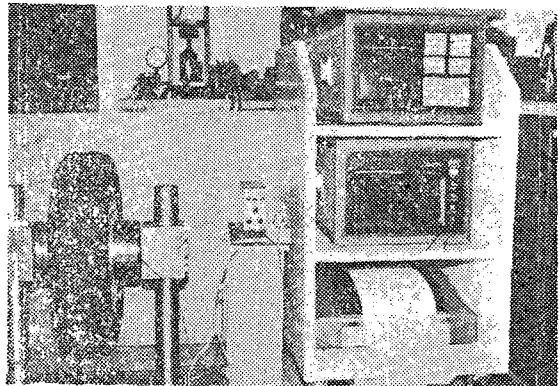


Fig. 8 Experimental apparatus for tire vibrations

乘用車用 타이어로서 2플라이 스틸벨트이며 實驗裝置는 다음과 같다.

- F.F.T. Analyser : Zonic 6080 multi-channel
- Real-time computing terminal; Zonic 6081 with ASC- II Key-board
- Accelerometer : B&K type 4375 & Model 480 A power unit

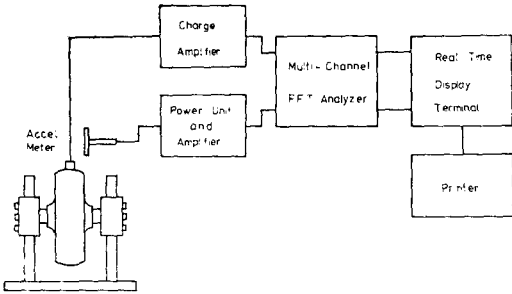


Fig. 9 Schematic diagram of experimental apparatus

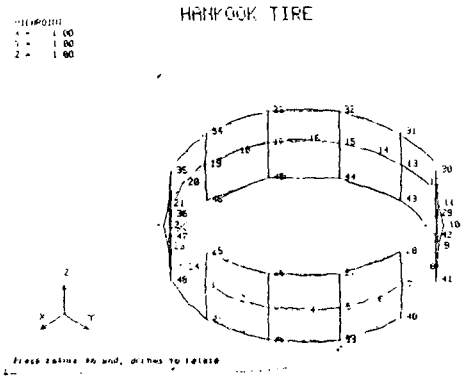


Fig. 10 Nodal point of tire for experiments

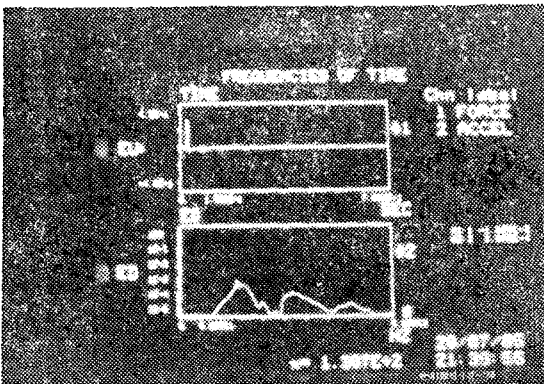


Fig. 11 Impulse in time domain and response in frequency domain at #5

- Impulse hammer : PCB Piezotronics
- Charge amplifier : B&K Conditioning amplifier type 2626
- Printer : zonic DP 9000 Anadex Printer

Fig. 8 은 實驗裝置를 나타내며 Fig. 9 는 그 配置圖이다.

### 5.2 實驗方法

타이어의 狀態는 Fig. 8 에서 보는 바와 같이 취일을 완전히 固定하여 數值解析시와 같은 條件으로 하였다.

打撃點의 位置는 Fig. 10 에서와 같이 중앙에는 24 개를 지정하였고, 양가장자리에는 각 12 개씩 選定하였다. 加速度계를 打撃點 1 의 近接한 곳에 附着하고 打撃은 1 번부터 48 번까지 順序대로 打撃하였다. 各 打撃點의 座標값과 connecting data 를 入力시켜 Fig. 10 과 같이 定하고 이들 資料를 모두 디스켓에 貯藏시켜 使用하였다. 타이어의 境遇 低주파수가 重要하므로 Cut off 주파수를 500 Hz 로 하였다.

各 固有振動數의 振動 모우드는 各 打撃點에 複合傳達函數를 디스켓에 記憶시켜 Zonic Modal 소프트웨어 프로그램을 使用하여 求하였으며 이 結果를 다시 디스켓에 貯藏시키고 동시에 CRT 상에 變形된 形態로 나타나게 하였다.

Fig. 11 은 打撃點 5 번의 入力힘과 出力加速度를 各 時間領域과 固有振動數領域에 대해 나타낸 結果이다.

### 6. 結果 및 檢討

Fig. 12 와 Fig. 13 은 數值解析 結果에 의하여 나타나는 圓周方向( $\theta$  方向)으로의 모우드와 子午線方向( $\phi$  方向)으로의 모우드를 計算出力을 利用하여 컴퓨터에 의하여 그린 것이다. 여기서 子午線 方向으로의 모우드번호를  $m$  으로 하였고 圓周方向으로의 모우드번호를  $n$  으로 指定하였다.

그리고 對稱모우드라 함은 Fig. 12 에서 볼수 있듯이 모우드 形態가 취일을 中心으로 對稱인 境遇인  $m=0$ ,  $m=2$  및  $m=4$  인 境遇가 되겠으며 非對稱모우드라 함은 모우드 形態가 취일을 中心으로 非對稱인 境遇를 말한다.

$m=0$  인 境遇는 Fig. 12 (a)와 같이 子午線方向으로의 圓에 對한 節線이 없이 變形이 縮小되거나 그 반대로 擴張 되는 境遇의 모우드를 나타내며  $m=1$  인 경우는 子午線 方向으로의 圓에 對해 하나의 節線을 가지며 Fig. 12 (b)와 같이 兩斷面이 같은 方向으로 變形을 갖거나 서로 반대 方向으로 變形을 갖는 모우드이다.

$m=2, 3, 4$  및 5 의 境遇에 對한 모우드도 Fig. 12 의 (c), (d), (e), 및 (f)에서 보는 바와 같다.

Fig. 13 은 圓周方向으로의 모우드로서  $m=0$  인 境遇는 Fig. 13 (a)에서와 같이 圓周方向에 對해 節線이



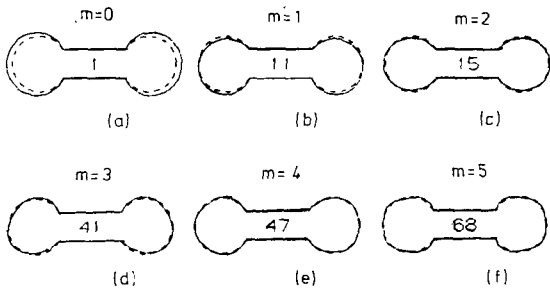


Fig. 12 Typical circumferential mode shapes

없이 縮小되거나 擴張되는 境遇를 나타내며  $m=1$  인 境遇는 Fig. 13 (b)에서와 같이 2개의 節線이,  $n=2$  인 境遇는 Fig. 13 (c)에서와 같이 4개의 節線을 같은 境遇를 말한다.

$n=3, 4$  및 5에 對해서도 Fig. 13의 (d), (e) 및 (f)에서 보는 바와 같다. Fig. 12 및 Fig. 13의 內部번호는 固有 變數의 出現順序를 나타내는 番號이다.

Table 5와 Fig. 14는 타이어의 內壓에 따른  $m=2$ 인

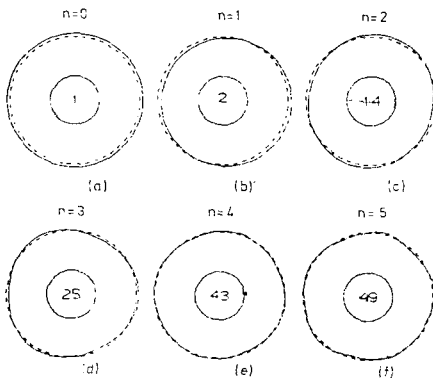


Fig. 13 Typical meridional mode shapes

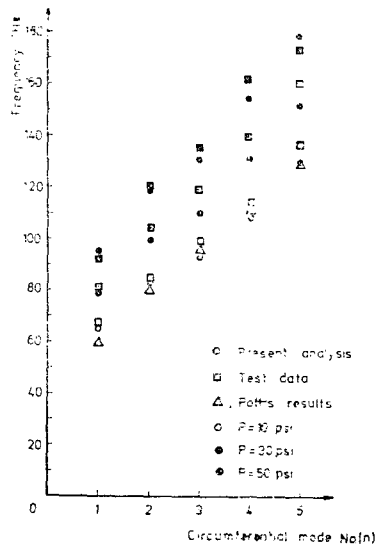


Fig. 14 Tire symmetric frequencies comparison( $m=2$ ) at various pressure for 155 SR-13 of H. Co. tire

경우의 固有振動數를 나타내고 있으며 Table 5의 內壓이 10 psi인 境遇의 ( )의 값은 Potts의 結果이다. Table 6과 Fig. 15는 內壓 10 psi에서  $m$  및  $n$ 에 對한 各 固有振動數를 나타낸다.

Table 5와 Fig. 14에 의하면 타이어의 內壓이 增加함에 따라 固有振動數는 增加하고 있으며 內壓에 對한 모우드의 變化는 本 研究의 壓力 範圍內에서는 나타나지 않았다.

Table 6과 Fig. 15에 의하면 圓周方向으로의 모우드 番號( $m$ )가 增加할 수록 固有振動數의 값은 增加하고 있으나  $n=3$  이상에서는  $m=2$ 인 境遇보다  $m=1$ 인

Table 5 The symmetric frequency comparison ( $m=2$ ) at various pressure for 155 SR-13 of H. Co. Tire

Press (psi)	* (1)		1		2		3		4		5	
	Test data	Present analysis	Test data	Present analysis	Test data	Present analysis	Test data	Present analysis	Test data	Present analysis	Test data	Present analysis
0		32.55		49.84		57.25		94.32		114.8		
10	67.5 (58.9)	65.38	85.0 (80.0)	83.22	100.0 (96.0)	89.58	116.7 (112.0)	108.6	140.0 (130.0)	130.5		
20	73.7	72.26	93.7	90.41	111.2	102.5	131.2	118.7	152.5	142.3		
30	81.2	78.63	106.2	99.26	122.5	108.3	148.7	130.2	173.7	150.8		
40	85.0	86.45	112.5	109.2	130.0	121.4	158.7	143.5	183.5	161.9		
50	92.5	95.33	120.5	118.4	137.5	130.5	170.0	152.7	—	178.6		

\* (1) : Circumferential mode No. ( $m$ )

( ) : Pott's results

**Table 6** Tire symmetric and asymmetric frequencies at 10 psi for 155 SR-13 of H. Co. Tire (Frequencies : Hz×10<sup>2</sup>)

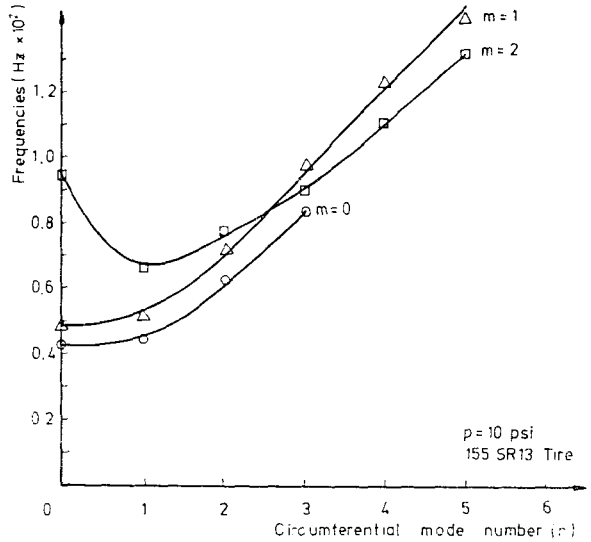
* (1)	0	1	2	3	4
* (2) 0	0.4426	0.4852	0.9302	1.042	1.112
1	0.4438	0.5045	0.6538		
2	0.6424	0.7428	0.8322		
3	0.8201	1.018	0.8958		
4		1.318	1.086		
5		1.395	1.305		

† (1) : Meridional mode No. (*m*)  
 (2) : Circumferential mode No. (*n*)

境遇의 固有振動數가 더 높게 나타나고 있다. 이는 타이어가 코오트-고무의 複合 材料로 되어 있기 때문에 均質等方性材料의 境遇와는 달리 나타나고 있음을 보여준다.

Fig. 16은 本 研究의 實驗에서 얻은 圓周方向으로의 對稱모우드를 나타내고 있다.

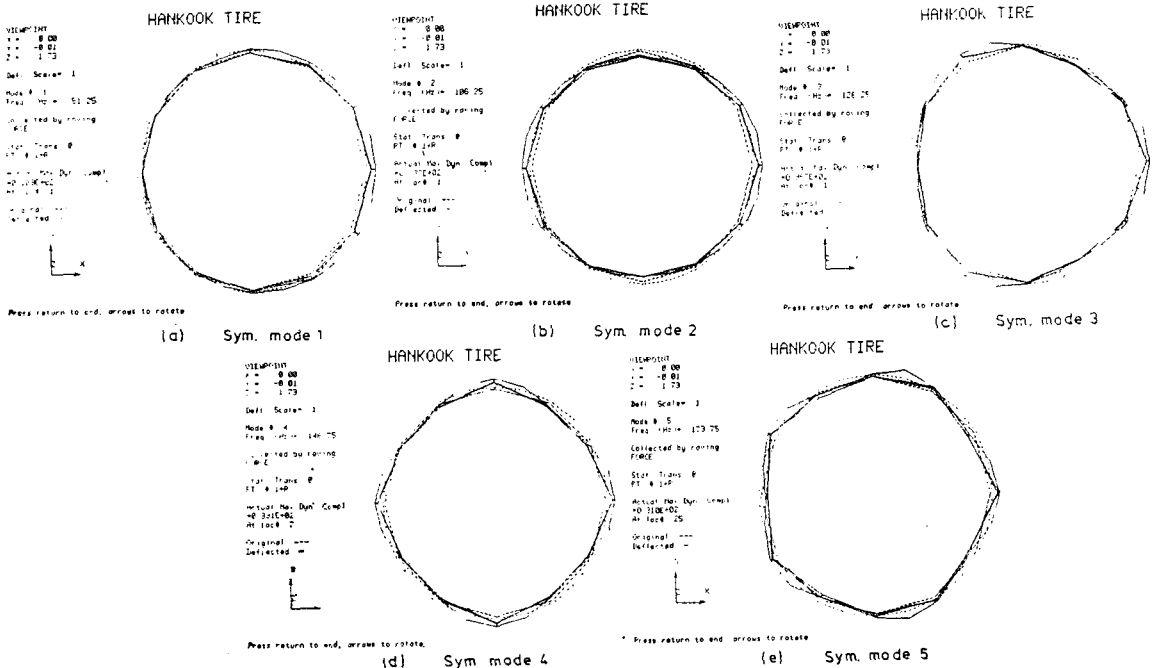
Fig. 16의 境遇는 實驗時의 타이어의 內壓을 30 psi에서 얻어진 모우드 形態를 보이며, Fig. 13의 數值解析結果와 本 實驗에서 얻을 수 있었던 모우드는 *n*=5까지 얻을 수 있었다.



**Fig. 15** Tire symmetric frequencies at 10 psi for 155 SR-13 of H. Co. Tire

Fig. 17은 本 有限要素의 出力値에 의하여 그려진 3次元 對稱모우드를 컴퓨터에 의하여 그린 것이다.

Fig. 17에서 볼 수 있듯이 本 研究結果 타이어의 모우드 形態가 完全하게 그래픽 되어 있음을 알 수 있다.



**Fig. 16** Symmetric modes of 155 SR-13 tire of H. Co. by experimental results

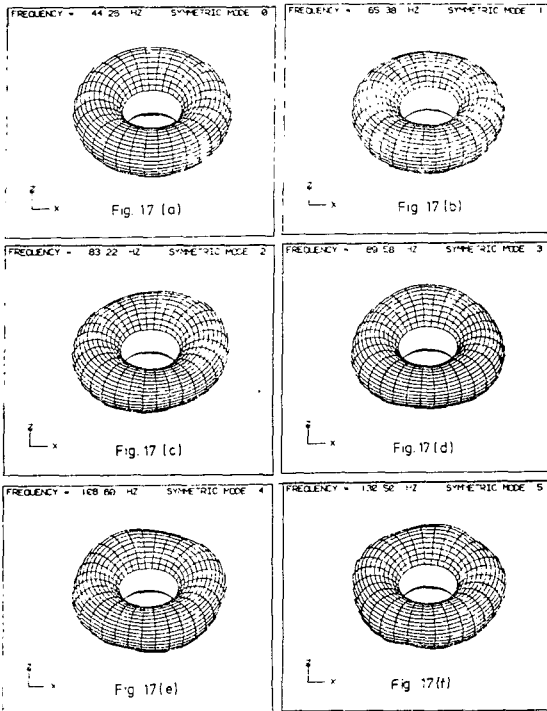


Fig. 17 Symmetric modes of 155 SR-13 tire of H. Co. by numerical results

## 7. 結 論

本 研究 結果는 다음과 같다.

(1) 圓周方向으로의 모우드番號( $m$ )가 0, 1, 2까지는子午線方向 모우드번호( $m$ )가 클수록固有振動數 값은增加하나  $m=3$  이상에서는  $m=1$  일 때가  $m=2$  일 때보다固有振動數가 더 크게 나타난다.

(2) 타이어 內壓을增加시킬 수록固有振動數는增加한다.

(3) 本 研究에서開發된二重曲率을 갖는複合膜로이드有限要素를使用하여 타이어의固有振動數와振動모우드가解析되었고幾何學的 值數를달리함으로써 트럭 타이어와 같은 다른 種類의 타이어의固有振動數와振動 모우드의有用한 結果를 얻을 수 있다.

(4) 本 研究에서開發된有限要素에 크로드-고무複合材料特性대신에 커어커스 층에 대한應力-變形率·關係式을利用하여變形에너지를計算함으로써 하여 바이어스 타이어의固有振動數와振動 모우드의 結果를 얻을 수 있다.

(5) 本 研究에使用된有限要素에回轉에 의한遠心力과 크리올리소스力을添加시켜回轉하는 타이어의

振動解析을遂行함으로써自動車の速度에 따른 타이어의臨界回轉數를決定할 수 있는 타이어設計의有用한 結果를 얻을 수 있다.

## References

- (1) F. Martin, "Theoretische Untersuchungen Zur Frage des Spannungszustandes im Luftreifen bei Abplattung", Jahrbuch der Deutschen Luftfahrtforschung, Teil 1, pp. 470~496, 1939
- (2) S.K. Clark, "A Review of Cord-Rubber Elastic Characteristics", Rubber Chemistry and Technology, Vol. 37, pp. 295~313, 1963
- (3) V.E. Gough, "Stiffness of Cord and Rubber Constructions", Rubber Chemistry and Technology, Vol. 37, pp. 988~1021, 1968
- (4) G. Tangorra, "Simplified Calculation for Multiply Cord-Rubber Sheets and Combination of Cord-Rubber Laminates", Proceeding International Rubber Conference, 1969
- (5) J.C. Halpin, S.W. Tsai, "Effects of Environmental Factors on Composite Materials", AFML-TR67, 1969
- (6) T. Akasaka, M. Hirano, "Approximate Elastic Constants of Fiber Reinforced Rubber Sheet and Its Composite Laminate", Composite Materials and Structures, Vol. 1, pp. 70~76, 1972
- (7) E. Fialar, H.P. Wilumeit, "Radiale Schwingungen Von Gurtel-Radialreifen", Automobile Technische Zeitschrift, Teil 68, pp. 38~58, 1966
- (8) G.R. Potts, "Application of Holography to the Study of Tire Vibration", Tire Science and Technology, TSTCA Vol. 1, No. 3, pp. 255~266, 1974
- (9) F. Böhm, "Mechanik des Gurtelreifen", Ingenieur Archiv, Teil 35, pp. 82~101, 1973
- (10) J.D. Walter, "Cord-Rubber Tire Composites: Theory and Applications", Rubber Chemistry and Technology, Vol. 8, pp. 3~9, 1980
- (11) H.W. Kim, W. Soedel, "Dynamic Characteristics of A/C Landing Gear System (Analytic and Finite Element Solution to the Vibration of Tire-Shape Membrane)", Journal of the Korean Society for Aeronautical and Space Science, Vol. 13, No. 1, pp. 1~8, 1983