

Navier-Stokes 方程式의

有限差等法에 관하여

金 聖 準

<江原大學校 機械工學科 教授>

1. 머리 말

열유체의 흐름 현상을 컴퓨터 프로그램으로 시뮬레이션(simulation)하기 위해서는 먼저 물리적 현상을 수학적 방정식들로 표시 해야한다. 수학적 방정식들은 미분 방정식의 형태를 갖게 되는데 질량, 운동량 및 에너지 보존의 법칙등을 의미하는 것들이다. 난류현상을 직접 시뮬레이션 하기위해서 수우도 스펙트럼(pseudospectral) 방법이 사용되고 있기는 하나 그 응용이 매우 단순한 경계조건을 갖는 난류유동현상에 불과한 실정으로 대부분의 경우가 현재의 컴퓨터 용량으로써는 직접 시뮬레이션이 불가능할 실정이다. 다른 방법으로는 난류현상을 우선 어떤 모델방정식으로 표시한 뒤에 그 모델 방정식들을 풀어서 난류현상을 해석하는 방법이다. 이 방법으로 흔히 쓰이는 것이 $K-\epsilon$ (난류에너지-난류에너지소산) 모델인데 난류에너지 방정식과 난류에너지 소산방정식을 각종 유동 방정식들과 함께 풀어서 난류현상을 해석하는 방법이다. 유동 방정식을 푸는 일반적인 방법들로는 유한요소법과 유한차등법이 사용되고 있다. 유한요소법은 해석하고자 하는 유동현상의 부분을 삼각형이나 사각형과 같은 작은 요소로 나눈뒤에 각 요소위에서 유동 방정식의 종속변수가 갖는 값을 계산키 위해 변분 원리와 Galerkin 근사 이론을 사용하는 방법이다. 반면에 유한차등법은 관심부분을 수많은 작은 계산세포(computational

cell)로 나눈뒤에 경계조건과 유동방정식을 적절한 차등법을 사용해서 유한차등방정식으로 표시한뒤 각 계산세포 마다 만들어진 차등방정식을 모아서 차등방정식의 시스템을 만든다. 이 방정식의 시스템을 주어진 경계조건과 함께 반복계산에 의해 풀게된다. 비선형인 유동방정식의 선형화는 반복계산시 차등방정식의 상수항을 먼저 번 계산에서 구한 값으로 계산함에 따라 이루어진다. 최종 계산치는 일반적으로 각 반복 계산에서의 잔류치의 크기를 보고서 결정한다. 유동현상의 해석에서 유한요소법보다 유한차등법을 많이 사용하는 그 주요한 이유는 유한요소법로서는 대류(convective)항들의 마파람(upwind)성향을 취급하기 곤란하기 때문이다. 일반형의 유한요소법을 그대로 대류항에 적용시키면 중앙(central)차등법에서와 비슷한 비사실적인 해를 얻는 경우가 있어 마파람 차등법 같은 어떤 요소법이 필요하며 마파람성향의 요소법을 비균일요소에 적용시키는 방법 또한 모호하다. 필자는 이 글에서 과거 또는 현재에 사용되고 있는 유한차등법의 장단점을 수치계산의 정확도(numerical accuracy), 수치계산의 안정성(numerical stability) 그리고 유한차등 방정식의 구성에 관한 일반적 규칙인 Patankar의 규칙⁽¹⁾의 관점에서 분석 논의 하고자 한다.

2. 차등법의 수치적 성질(Numerical Property)이란 ?

우선 CFD(computational fluid dynamics)에서

비교적 자주 쓰이는 몇가지 유한차등법의 수치적 성질에 대해서 논의 하기로 한다. 여기서 말하는 수치적 성질이라 함은 정확도와 안정성을 얘기한다. 수치적 성질을 쉽게 설명하기 위해 다음과 같은 정상(steady) Navier-Stokes 방정식을 예로 들겠다.

$$\rho u_i u_{i,j} = -p_{,i} + \tau_{ij,j} + \rho g_i \quad (1)$$

위의 방정식은 색인기호(index notation)로 표시되어 있으며 대류항, 확산(diffusion)항, 압력항, 체적력(body-force)항을 가지고 있다. 현재 많이 쓰이고 있는 차등법으로는 상류(upstream)차등법, 중앙차등법, 왜도상류(skew upstream)차등법과 QUICK 차등법등이 있다. 위의 각 차등법은 Navier-Stokes 방정식을 차등화 하는데 각각 다른 방법을 사용하고 있고 각 차등법의 적용은 Navier-Stokes 방정식의 보존형이나 비보존형으로부터 시작할 수 있는데 Navier-Stokes 방정식의 보존형은 다음과 같다.

$$(\rho u_i u_i)_{,j} = p_{,j} + \tau_{ij,j} + \rho g_j \quad (2)$$

차등방정식을 만드는 방법중의 하나는 그림 1과 같은 각각의 계산세포에 관하여 Navier-Stokes 방정식을 적분하는 것이다.

예로서 일차원 유동현상을 고려한다면 차등방정식은 다음과 같다.

$$C_e u_e - C_w u_w = (p_i - p_{i-1}) + D_e (u_{i+1} - u_i) - D_w (u_i - u_{i-1}) \quad (3)$$

여기서 C_e 와 C_w 는 계산세포의 양면을 통과하는 각각의 유동 질량을 표시한다. 그리고 D_e 와 D_w 는 점성을 세포의 크기로 나눈 것이고 u 는 유속을 의미하고 그림 1에 정의되어 있다. 차등방정식의 일반적인 형은 방정식 (3)을 다시 배분하고 u_e 와 u_w 를 각 차등법에 따라 표시하므로써 얻을 수 있으며 다음과 같은 방정식으로 표시된다.

$$a_p u_i = a_e u_{i+1} + a_w u_{i-1} + \text{SOURCE} \quad (4)$$

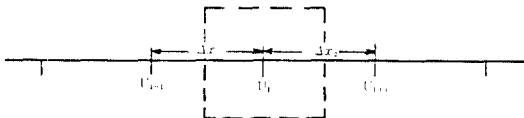


그림 1 일차원 계산세포

여기에서 a_e, a_w 와 a_p 를 차등 방정식의 상수항이라고 한다. 정확도는 종속변수를 Taylor 급수로 표시한 뒤에 그 단절오차(truncation error)로 일반적으로 정의하고 1차 정확도(first order accuracy)는 급수의 1승 항부터 단절오차에 포함됨을 의미하고 2차 정확도(second order accuracy)는 2승 항부터 단절오차에 포함될 경우이다. 그 이상의 고차 정확도도 같은 방법으로 정의할 수 있다. 안정성은 차등법의 매우 중요한 성질중의 하나이다. 불안정한 차등법을 사용해서 만들어진 차등방정식을 컴퓨터로 풀게 되면 반복 계산중에 생기는 계산치와 실제해의 차이가 반복계산중에 소멸되어가지 않고 오히려 커져가거나 진동하기 때문에 차등방정식의 해를 구할 수가 없다. 이 글에서의 안정성에 관한 논의를 위해서 타원 방정식의 반복해와 포물선 방정식의 비정상(unsteady)해 사이의 유사성을 이용하겠다. 그리고 이 유사성은 일차원의 운동량 보존의 법칙을 사용해서 설명하겠다. 운동량 보존의 법칙을 표시하는 방정식을 계산세포 위에서 적분해 차등방정식으로 표시하면 다음과 같다.

$$\rho \forall \frac{\partial u_i}{\partial t} = a_e u_{i+1} + a_w u_{i-1} - a_p u_i + \text{OTHERS} \quad (5)$$

여기서 ρ, \forall 와 a 를 각각 밀도, 계산세포의 체적과 질량 유동량을 표시한다. 정상류(steady flow) 경우에는 위의 방정식 (5)를 각 결점(computational node)에서 $\frac{\partial u_i}{\partial t}$ 가 0이 되도록 풀면되고 반면에 어떤 시간단계(time step)에서의 $\rho \forall \frac{\partial u_i}{\partial t}$ 의 값은 정상 차등방정식의 어떤 반복 계산시 잔류치와 유사하다. n 번째 반복 계산시의 잔류치는 $a_p (u_i^n - u_i^{n-1})$ 로 표시할 수 있고 u_i^n 은 n 번째 계산시의 값이고 u_i^{n-1} 은 $n-1$ 번째 계산시의 값이다. 이상과 같은 논리에서 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$\rho \forall \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} \right]^n = a_p (u_i^n - u_i^{n-1}) \quad (6)$$

위의 관계식을 사용하면 정상 방정식을 다음

과 같이 표시할 수 있다.

$$\rho \nabla \left(\frac{\partial u_I}{\partial t} \right)^n = a_e u_{I+1}^n + a_w u_{I-1}^n - a_p u_I^n + \text{OTHERS} \quad (7)$$

위에 설명한 바와같이 타원 방정식의 반복 계산방법과 비정상 유동 방정식의 수치 계산과의 유사성을 이용해서 포물선 방정식의 안정성 분석 방법을 정상 타원 방정식의 반복 계산의 안정성에 적용시키고자 한다. 방정식 (7)을 행렬형으로 표시하면 다음과 같다.

$$\rho \nabla u' = Au + \text{OTHERS} \quad (8)$$

선형법 (method of lines)은 부분 미분방정식의 시스템을 상미분방정식의 시스템으로 근사하게 표시하는 방법인데 상미분방정식을 행렬형으로 표시했을때 이 행렬식의 안정성은 행렬 A 의 고유치에 의존하게 되고 만약 행렬 A 의 고유치가 양수이거나 복소수의 실수부분이 양수이면 반복 계산중의 계산치와 실제값과의 차이가 반복 계산과 함께 증가하게 되어 해를 얻을수가 없다. 즉 행렬식의 시스템이 불안정하다. 복소수 평면 상에서 고유치의 위치를 확인하기 위해 Gêrsgorin 디스크이론을 사용 할 수 있다. Gêrsgorin 디스크이론을 정방행렬의 모든 고유치가 Gêrsgorin 디스크의 안에 위치하고 있다는 것이다. 각 Gêrsgorin 디스크의 중심은 행렬 A 의 각 행에서 대각선상의 요소가 갖는 값이다. 그리고 이 디스크의 반경은 각 행에서 대각선상의 요소값을 제외한 모든 요소값의 절대값의 총합과 같다. Patankar는 차등법에 관한 네가지의 법칙을 제안 했는데 그중 차등법의 안정성을 설명하는데 필요한 세가지 규칙만 설명하겠다. 첫번째 법칙은 종속변수 값의 일관성 (consistency)에 관한 것으로 인접하는 두개의 계산세포를 고려할 때 인접하는 두 세포 사이의 공통면에서 종속변수의 값이 계산하는 방향에 관계없이 일관성이 유지 되어야 한다는 것이다. 비일관성 (inconsistency)이 그림 2에 설명되어 있다.

그림에서 본 바와같이 3개의 점을 선택하는 방법에 따라서 u 의 값이 다르다. 이것을 Patankar의 첫번째 법칙을 위반하는 것이다. 두번

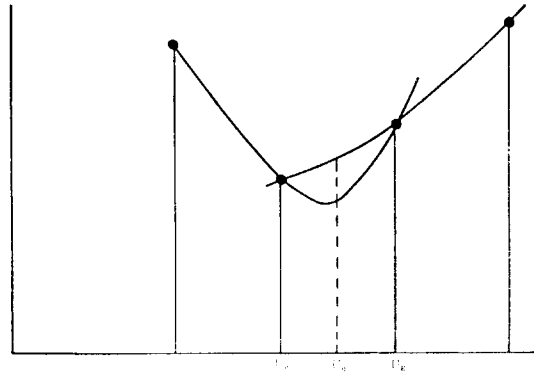


그림 2 비일관성의 설명

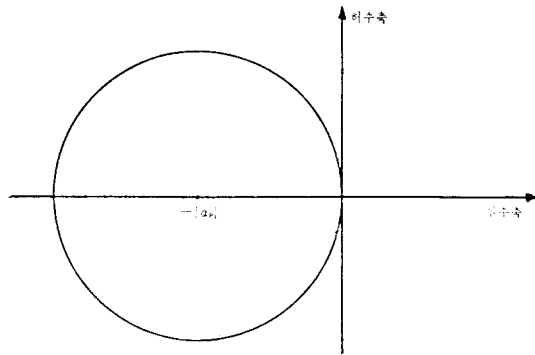


그림 3 Gêrsgorin 디스크

째 법칙은 차등 방정식에서 각 상수항의 부호가 같아야 한다는 것이다. 즉 모든 상수항이 양수치를 갖거나 또는 음수치를 가져야 한다는 것이다. 일반형의 방정식 (4)를 예로 설명 한다면 a_p , a_e 와 a_w 가 같은 부호를 갖어야 한다. Patankar의 네번째 규칙은 각 결점에서 계산하고자 하는 종속 변수의 상수항의 크기가 비대각 선상에 위치하는 모든 상수항의 합계와 같아야 한다는 것이다. 방정식 (4)로써 설명 한다면 이 법칙은 다음과 같이 표시 할 수 있다.

$$a_p = a_e + a_w$$

이 법칙은 유동 방정식이 종속 변수의 미분형으로 구성되어 있다는 사실에서 유도된 것이다. 즉 모든 유한 차등방정식은 어떤 종속 변수의 값에 어떤 상수를 더하더라도 그 값이 원래의 차등 방정식의 해이어야 한다는 것이다. 그리고 Patankar의 규칙 들은 Gêrsgorin 디스크 이론 보

다 제한적인 규칙이다. 왜냐하면 Gêrsgorin 디스크 이론은 복소 평면상에 적용시킬 수 있지만 Patankar의 규칙은 실수만을 취급하고 있기 때문이다. 그래서 Patankar의 규칙이 만족되면 Gêrsgorin 디스크는 항상복소 평면의 왼쪽에 위치하게 된다. 즉 방정식 (4)의 경우 $-a_p$ 가 디스크의 중심이 되고 그 반경이 a_e+a_w 이므로 Patankar의 두번째 법칙과 네번째 법칙을 의미하는 Gêrsgorin 디스크는 다음 그림 3에서 보인 바와 같이 허수축에 접하며 왼쪽에 위치하게 된다.

3. 중앙차등법

중앙차등법에서는 u_e 와 u_w 가 단순히 인접하는 2개의 값의 산술평균이다. u_e 와 u_w 의 값을 방정식 (3)에 대입하면 다음과 같은 방정식을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} &(-0.5 C_e + 0.5 C_w + D_e + D_w) \\ &u_I = (0.5 C_e + D_e)u_{I+1} + (0.5 C_w + D_w) \\ &u_{I-1} + \text{OTHERS} \end{aligned} \quad (9)$$

여기서 a_p 는 $-0.5 C_e + 0.5 C_w + D_e + D_w$ 이고 a_e 와 a_w 는 각각 $-0.5 C_e + D_e$ 와 $0.5 C_w + D_w$ 이다. 위의 방정식들의 상수항들은 삼각대칭(tridiagonal)행렬을 구성하게 된다. 중앙 차등법은 2차의 정확도를 가지고 있으나 셀 레이놀주수 $(\frac{\rho u \Delta x}{\mu})$ 가 2보다 크게 될 때에 수치 계산이 불안정 하게 된다. 그 이유는 차등 방정식의 몇몇 상수항이 음수치를 갖기에 Patankar의 두번째 규칙과 네번째 규칙을 위반하게 되기 때문이다. 위의 내용을 다음과 같이 Gêrsgorin 디스크로 설명해보면 차등법의 불안정성을 쉽게 알 수 있다. 방정식 (4)의 경우 만약 a_p 가 음수치를 갖게되면 Gêrsgorin 디스크가 복소수 평면의 오른쪽에 그 중심이 있게 되어 바로 차등법이 불안정 함을 알 수 있고 a_p 가 양수치를 갖게되면 Gêrsgorin 디스크가 복소수 평면의 왼쪽에 그 중심이 위치하게 되거나 그 디스크가 경우에 따라서는 복소수 평면의 오른쪽을 포함하게 되므

로 차등법은 불안정하게 된다.

4. 상류차등법

상류차등법은 중앙차등법이 갖는 불안정성을 극복하기 위하여 개발 되어진 것이다. 상류 차등법은 또한 마파람차등법 또는 Doner-Cell 방법이라고도 한다. u_e 와 u_w 의 값을 계산할 때 상류 차등법에서는 유동 방향에 따라 u 의 값을 바꾸어 준다. 다음에 u 가 음수치를 가질때와 양수치를 가질때를 구분해서 u_e 와 u_w 의 값이 주어져 있다.

$$\begin{aligned} u > 0 \quad &u_e = u_I; \quad u_w = u_{I-1} \\ u < 0 \quad &u_e = u_{I+1}; \quad u_w = u_I \end{aligned}$$

그러나 확산 항의 계산은 중앙 차등법을 사용하고 있다. 위에 설명한 상류차등법을 사용해서 유한 차등 방정식을 만들면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u > 0 \\ &-C_e u_I + C_w u_{I-1} + D_e (u_{I+1} - u_I) \\ &-D_w (u_I - u_{I-1}) + \text{OTHERS} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} u < 0 \\ &-C_e u_{I+1} + C_w u_I + D_e (u_{I+1} - u_I) \\ &-D_w (u_I - u_{I-1}) + \text{OTHERS} = 0 \end{aligned}$$

여기에서 a_p, a_e 와 a_w 의 값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u > 0 \quad &a_p = C_e + D_e + D_w \\ &a_e = D_e \\ &a_w = C_w + D_w \\ u < 0 \quad &a_p = -C_w + D_e + D_w \\ &a_e = D_e - C_e \\ &a_w = D_w \end{aligned}$$

이 차등법은 Patankar의 첫번째 규칙인 일관성을 보장 할 뿐만 아니라 Patankar의 두번째 규칙을 만족시켜 모든 상수항이 양수치를 갖게 되며 Patankar의 네번째 규칙도 만족 시킨다. 그리하여 매우 좋은 안정성을 갖게 되나 정확도가 1차 임이 큰 단점이고 그 결과로 소위 아래에서 설명할 수치적확산(numerical diffusion)이 생기게 된다. 수치적 확산을 Taylor 급수로 설명하면 다음과 같다. 먼저 유동 방향이 왼쪽에서 오른쪽으로 흘러 간다면 차등 방정식의 대류

항은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
 C\left(\frac{u_I - u_{I-1}}{\Delta x}\right) &= C\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{I-1/2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{I-1/2} \frac{\Delta x}{2}\right) \\
 &= C\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{I-1/2} - C\frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{I-1/2} \quad (11)
 \end{aligned}$$

방정식 (11)에서 마지막 줄의 항이 소위 상류 차등법에서 생기는 수치적 확산을 나타내고 경우에 따라서는 이 수치적 확산항이 다른 실제 확산항 보다 훨씬 크게 되어 수치 계산의 정확도를 잃게 된다.

5. 왜도상류 차등법

왜도상류 차등법은 Raithby⁽²⁾에 의해서 개발된 것으로 계산세포면에서의 종속 변수값을 유선에 따라서 계산함으로써 수치적 확산을 줄이는 차등법이다. 예로써 2차원의 유동 문제를 든다면 u_w 는 다음과 같이 표시 된다.

$$u_w = f_w u_w' + (1 - f_w) u_w''$$

여기서 f_w 의 값은 0이거나 1인데 그 선택은 유동 방향에 의해 정해진다. 위의 표시법은 그림 4에 정의되어 있다.

u_w' 와 u_w'' 는 각각 $u(I+1, J)$ 와 $u(I+1, J+1)$ 그리고 $u(I, J+1)$ 과 $u(I, J)$ 의 보간법에 의해서 계산된다. 이 차등법은 유선에 직각한 방향에서는 수치적 확산이 줄어들으나 유선 방향에 대해서

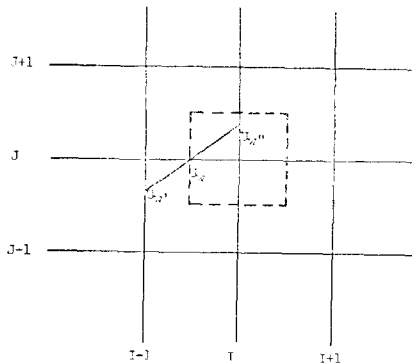


그림 4 계산세포와 u 의 표시법

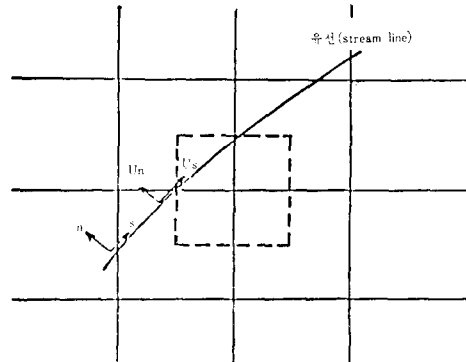


그림 5 $n-s$ 좌표계에서의 u_n 과 u_s

는 수치적 확산이 줄어들지 않는다. 이 차등법을 설명하기 위해 사용된 좌표계와 속도들이 그림 5에 정의되어 있다.

이 방법은 Patankar의 첫번째 및 두번째 규칙을 만족시키고 유한 차등 방정식의 상수항의 행렬이 대각선 요소에 의하여 지배 되므로 좋은 안정성을 갖게 된다. 그러나 이 방법 역시 2차의 정확도는 갖지 못하고 있다. 정확도면에서 단점이 있음에도 불구하고 이 차등법이 사용되는 것은 대류항과 압력항이 유동 현상을 크게 지배하는 경우 유선 방향의 수치적 확산이 비교적 중요하지 않기 때문이다. 또 다른 약점은 계산세포 면에서 종속 변수의 값을 계산하기 위해서는 많은 보간법을 계산해야 되기 때문에 계산 비용이 많이 든다.

6. QUICK 차등법

QUICK 차등법은 1979년 Leonard⁽³⁾에 의해서 개발되었는데 그의 의도는 보다 좋은 안정성과 2차의 정확도를 갖는 차등법의 개발이었다. 중앙 차등법과 상류 차등법에 관련된 문제들은 계산세포 면에서 종속 변수의 값을 계산해내는 방법에 기인 한다고 할 수 있다. 중앙 차등법의 경우에는 선형 보간법을 사용했고 상류 차등법은 유동 방향에 따라 값을 구하므로 0차의 보간법이라 할 수 있다. QUICK 차등법을 설명하기 위해서 비균일 결점을 그림 6에 소개하였다.

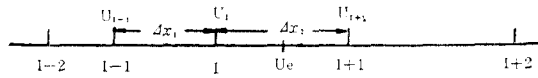


그림 6 비균일 결점

QUICK 차등법은 계산세포 면에서 u_e 를 계산하기 위해서 2차 다항식을 사용하고 있다. 2차 다항식, $u = a + bx + cx^2$ 은 3개의 상수항을 가지고 있으므로 그 값을 계산하기 위해서는 3개의 결점에서 u 값을 알고 있어야 한다. 그리고 이 3개의 결점은 상류 방향에서 골라야 한다. 만약에 유동 방향이 왼쪽에서 오른쪽이라면 골라야 할 3개의 결점은 $I-1$, I 그리고 $I+1$ 이다. 이 3개의 결점으로 부터 계산된 상수의 값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 a &= u_i \\
 b &= \frac{(u_{i+1} - u_i) \Delta x_1^2 - (u_{i-1} - u_i) \Delta x_2^2}{\Delta x_2 \Delta x_1 (\Delta x_2 + \Delta x_1)} \\
 c &= \frac{(u_{i+1} - u_i) x_1 + (u_{i-1} - u_i) x_2}{\Delta x_2 \Delta x_1 (\Delta x_2 + \Delta x_1)} \quad (12)
 \end{aligned}$$

위의 상수치를 이용하면 u_e 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 u_e &= u_i + \frac{(u_{i+1} + u_i) \Delta x_1^2 - (u_{i-1} - u_i) \Delta x_2^2}{\Delta x_2 \Delta x_1 (\Delta x_2 + \Delta x_1)} \\
 &\quad \left[\frac{\Delta x_2}{2} \right] \\
 &\quad + \frac{(u_{i+1} - u_i) \Delta x_1 + (u_{i-1} - u_i) \Delta x_2}{\Delta x_2 \Delta x_1 (\Delta x_2 + \Delta x_1)} \\
 &\quad \left[\frac{\Delta x_2}{2} \right]^2
 \end{aligned}$$

위의 식은 비균일 결점의 경우에 얼마나 QUICK 차등법을 이용한 방정식이 복잡한가를 보여주고 있다. 위의 방정식을 균일 결점에 적용시키면 u_e 는 다음과 같이 된다.

$$u_e = \frac{1}{2} (u_i + u_{i+1}) - \frac{1}{8} (u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i)$$

위의 방정식은 선형 보간법을 상류 방향의 곡률의 정도에 따라 보완한 것이라고 하겠다. QUICK 차등법의 불안정성을 Patankar의 두번째 규칙과 네번째 규칙으로 설명하기 위해서 일차원의 유동 문제를 예로 들겠다. 일차원의 경우에 대류 방향은 다음과 같다.

$$C_e u_e - C_w u_w = \left(\frac{3}{4} C_e - \frac{3}{8} C_w \right) u_i$$

$$\begin{aligned}
 &+ \left(\frac{3}{8} C_e \right) u_{i+1} - \left(\frac{C_e}{8} + \frac{3}{4} C_w \right) u_{i-1} \\
 &+ \frac{1}{8} C_w u_{i-2} \quad (13)
 \end{aligned}$$

여기서 일차원 유동의 경우에는 C_e 와 C_w 가 같게 된다. 그래서 대류항은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
 &\frac{3}{8} C u_i + \frac{3}{8} C u_{i+1} - \frac{7}{8} C u_{i-1} + \frac{1}{8} C u_{i-2} \\
 &\text{위의 식을 유한 차등 방정식의 일반적인 형으로 바꾸면 그 식은 다음과 같이 된다.} \\
 &\frac{3}{8} C u_i = -\frac{3}{8} C u_{i+1} + \frac{7}{8} C u_{i-1} - \frac{1}{8} C u_{i-2} \quad (14)
 \end{aligned}$$

여기서 차등 방정식의 각 상수항은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 a_p &= \frac{3}{8} C \\
 a_e &= -\frac{3}{8} C \\
 a_w &= \frac{7}{8} C \\
 \text{OTHERS} &= -\frac{1}{8} C
 \end{aligned}$$

위의 상수항과 확산항을 합해서 상수항을 다시 계산하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
 a_p &= \frac{3}{8} C + D_e + D_w \\
 a_e &= -\frac{3}{8} C + D_e \\
 a_w &= \frac{7}{8} C + D_w \\
 \text{OTHERS} &= -\frac{1}{8} C
 \end{aligned}$$

유동의 방향이 왼쪽에서 오른쪽이면 a_e 는 음수치를 갖게 될 수도 있다. 따라서 Patankar의 두번째 규칙을 위반하게 된다. 즉 QUICK 차등법은 차등 방정식의 구성 형태에 따라서 안정성이 좌우된다는 것이다. Han⁽⁴⁾은 QUICK 차등법을 공동(cavity)안에서의 층류 운동을 해석하기 위해서 적용시켰다. 그는 안정을 개선하기 위해서 차등 방정식의 항들을 재 분배시켰다. 그 결과로 다음 두가지의 형식을 제시하였다.

$$\left. \begin{aligned} u_e > 0 \quad u_e &= \frac{1}{8}(-u_{l-1} + 6u_l + 3u_{l+1}) \\ u_e < 0 \quad u_e &= \frac{1}{8}(3u_l + 6u_{l+1}) - \boxed{\frac{1}{8}u_{l+2}} \end{aligned} \right\} \quad (15, a)$$

$$\left. \begin{aligned} u_e > 0 \quad u_e &= \frac{1}{8}(6u_l + 4u_{l+1}) \\ &\quad - \boxed{\frac{1}{8}(u_{l-1} + u_{l+1})} \\ u_e < 0 \quad u_e &= \frac{1}{8}(3u_l + 4u_{l+1}) \\ &\quad - \boxed{\frac{1}{8}(u_{l+2} - 2u_{l-1})} \end{aligned} \right\} \quad (15, b)$$

여기서 □안의 항들은 차등 방정식에서 원천항으로 취급했다. 그 결과 (15, b)의 형은 수치 계산이 안정했지만 (15, a)의 경우에는 불안정했다. 그래서 위의 예가 말하듯이 안정성은 차등 방정식의 형태에 따라 크게 변하고 좋은 안정성을 갖는 차등 방정식을 구하는 것은 여러번의 불편한 수치적 실험을 거쳐야 한다. Humphrey⁽⁵⁾는 QUICK 차등법을 사각형의 단면을 갖는 공동안에서의 비정상층(unsteady-laminar)유동을 해석하기 위해서 사용했다. 그는 HYBRID 차등법에서 사용한 세포 크기보다 더 큰 세포에서도 HYBRID와 같은 정도의 정확도를 얻을 수 있었고 QUICK의 정확도는 세포 크기에 의존하지 않는다고 주장했다.

7. 맺음 말

지금까지 몇가지의 차등법들을 계산의 정확도 및 안정성에 관하여 검토하였다. 상류 차등법과 왜도 차등법은 좋은 안정성을 가지고 있으나 그 정확도가 미흡한게 결점이고 중앙 차등법은 비교적 좋은 정확도를 가지고 있으나 불안정한게 큰 결점이다. QUICK 차등법의 경우에는 보다 정확한 수치해를 얻기위해 종속 변수를 보다 고차의 근사치로 표시하였는데 정확도가 증가함에 따라 몇가지의 불이익이 생기게 된다. 그 불이

익으로는 제일 먼저 계산 비용의 증가를 들 수 있으며 수치 계산이 불안정하게 되고 경계 조건의 표시가 어려워진다. 또한 난류 에너지 방정식과 같이 종속 변수가 반드시 양수값을 갖는 방정식에서 그 차등방정식의 종속 변수도 양수치를 가져야 한다는 제한 조건을 만족시키는데 일반적으로 어려움이 많다. 그 이유는 QUICK 차등법을 이용한 차등방정식은 흔히 음수치의 원천항을 갖기 때문에 차등방정식을 푼 후 그 종속 변수가 음수치를 갖기 때문이다. 아직도 고차의 정확도를 갖는 차등법이 연구 개발중이며 종속 변수가 반드시 양수치인 유동방정식을 푸는 좋은 차등법은 아직까지도 없는 실정이어서 2차 이상의 정확도와 절대 안정성(absolute stability)을 갖는 새로운 차등법의 개발이 시발하다 하겠다.

참 고 문 헌

- (1) Patankar, S.V., Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, McGraw-Hill, pp.36~39, 1980
- (2) Raithby, G.D., Skew Upstream Differencing for Problems Involving Fluid, Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering, 9, pp.153~164, 1976
- (3) Leonard, B.P., A Stable and Accurate Convective Modelling Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 19, pp.59~98, 1979
- (4) Han, T. et al., A Comparison of Hybrid and Quadratic-Upstream Differencing in High Reynolds Number Elliptic Flows, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 29, pp.81~95, 1981
- (5) Quere, P.L., Humphrey, A.C., Sherman, F., Numerical Calculation of Thermally Driven Two Dimensional Unsteady Laminar Flow in Cavities of Rectangular Cross Section, J. of Numerical Heat Transfer, Vol. 4, pp.249~283, 1981