

制限條件式을 갖는 聯立 4階 境界值 問題의 有限要素解析

徐 英 兌

<海軍士官學校 機械工學科 教授>

1. 머리 말

유한요소법은 경계치 (boundary value) 문제에 대한 근사해를 구하는 한 방법으로 공학문제 해결의 강력한 도구로서 그 적용분야가 확장되고 있으며, 아울러 유한요소법 자체의 제한점을 축소시키기 위한 연구가 응용수학자나 공학자에 의해 활발히 진행되고 있다. 본 글에서는 일반적인 유한요소법의 개념을 자연스럽게 확장시켜 공학문제에서 자주 취급되는 제한조건식을 포함한 미분방정식의 처리와 연립미분방정식 및 4계 경계치 문제에 적용시키는 방법을 구체적으로 소개하고자 한다.

이러한 문제는 최근 에너지 확보와 관련하여 연구가 활발히 진행되고 있는 해저송유관 설계 및 부설, 시추선 상승관 (riser) 의 응력해석, 해저광물채집 (ocean mining) 등의 해양공학분야에서 크게 대두되고 있다.

해저송유관의 수학적 모델을 통하여 제약조건식을 갖는 연립 4계 경계치 문제를 소개하고 유한요소법의 적용을 설명하고자 한다.

2. 송유관의 수학적 모델

내부유동유체를 포함한 탄화된 송유관의 운동은 세장비 (slenderness ratio) 가 아주 큰 긴 강봉 (rod) 이 주어진 경계조건 (boundary condition) 과 초기조건 (initial condition) 에서 각종 외력을 받

아 큰 변위 (large angle deflection) 를 일으키는 문제로 취급되어 진다. 그림 1에 표시된 좌표계에서 강봉의 내부응력상태를 고려하여 수학적 모델을 유도하면,

$$M\ddot{r} = -(EI r'')'' + [\lambda(s, t) r']' + [H(r' \times r'')] + (r' \times m)' - (m_f V^2 + p A_f) r'' - 2m_f \dot{V} r' + q \quad (1)$$

$$\lambda(s, t) = T - EI k^2$$

$$r' \cdot r' = (1 + e)^2, \quad e = \frac{T}{EA} + \alpha \Delta \theta \quad (2)$$

초기조건은

$$r(s, 0) = r_0(s), \quad \dot{r}(s, 0) = \dot{r}_0(s), \quad q(s, 0) = 0 \quad (3)$$

이며, 경계조건은 양 끝 단에서 필수 (essential) 경계조건과 자연 (natural) 경계조건인

$$\left. \begin{aligned} s=0, L \text{에서 } r \text{ 또는 } r''' \text{ 값} \\ s=0, L \text{에서 } r' \text{ 또는 } r'' \text{ 값} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

으로 주어진다.

여기서 M 은 강봉질량, EI 는 굽힘강성계수

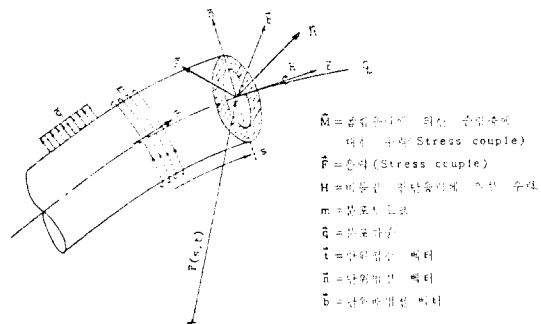


그림 1 송유관 내부응력상태 및 좌표계

(flexural rigidity), λ 는 강봉의 인장에 대한 제약에 관련한 Lagrange 상수, H 는 토크(torque), m 은 분포 토크 외력, m_f 는 판 내부 유체질량, V 는 유체속도, p 는 유체압력, A_f 는 판 내부 단면적, q 는 분포외력, T 는 인장력(tension), κ 는 송유관 증립축선의 곡률(curvature), e 는 인장력과 열팽창($\alpha\Delta\theta$)에 의한 변형량, (\cdot) 는 시간미분, (\prime) 는 공간미분(d/ds)이다.

식 (1)은 강봉의 증립축을 따라 측정된 거리 s 와 시간 t 의 함수인 반경벡터 $r(s, t)$ 에 대한 동적 4계 비선형 연립 미분방정식으로 제한조건식 (2)를 포함하고 있다. 식 (1)과 (2)를 주어진 조건 (3)과 (4)와 함께 풀이하여 구한 해 $r(s, t)$ 로부터 강봉의 모우멘트 M 과 인장력 T 는

$$M = EI(r'' \cdot r')b \quad (5)$$

$$T = \lambda(s, t) + EI(r'' \cdot r'') \quad (6)$$

로써 구한다. 여기서 b 는 단위법선벡터(unit binormal vector)이다.

3. 유한요소법의 응용

식 (1)과 (2)는 강봉 운동방정식의 고전적 기술(classical statement)로서, 이 표현은 영역(domain) 내에서 엄밀해(exact solution) $r(s, t)$ 를 구할 것을 의미한다. 유한요소 근사식은 고전적 기술보다 약한 표현인 변분식(variational statement)으로부터 유도된다.

3.1 Galerkin 근사법

변분식은 식 (1)과 (2)를 경계조건과 함께 영역 전반에 걸쳐 가중평균적(weighted average)인 의미에서 만족하는 $r(s, t)$ 를 구할 것을 의미한다. 즉, 시간 t 에 대하여

$$\int_0^L D[r(s, t)]v(s)ds = 0, \text{ for all } v(s) \quad (7)$$

이다. 여기서 $D[r(s, t)]$ 는 식 (1) 또는 (2)를 나타내는 선형 또는 비선형 미분연산자, $v(s)$ 는 임의 가중벡터함수(weighted vector function)이다. Galerkin 근사식은 식 (7)의 r 과 v 를 행렬표시가 가능한 유한차원(finite dimensional)인 근사식

$$r(s, t) \simeq \underline{N}^T(s) \underline{R}(t) \quad (8)$$

$$v(s, t) \simeq \underline{N}^T(s) \underline{V}(t) \quad (9)$$

으로 대치함으로써 얻어지며, 그 형태는

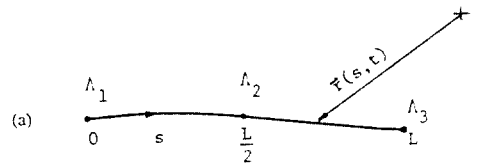
$$\int_0^L [\underline{N}(s) \underline{N}^T(s) \underline{\ddot{R}}, \underline{N}''(s) \underline{N}''(s)^T \underline{R}, \dots] ds = \int_0^L \underline{N}(s) \underline{q}(s) ds + [\dots] \Big|_0^L \quad (10)$$

여기서 $\underline{N}(s)$ 는 잘 정의된 형상함수(shape function)이고, \underline{R} 은 절점(node) s_i 에서의 r 값, $\underline{V}(s)$ 는 임의상수, 상첨자 T 는 벡터 또는 행렬의 전치(transpose)이다.

3.2 삼간함수(Interpolating Function)

식 (10)은 이미 에너지 극소화 조건이 부여된 상태지만, 이것의 해가 의미있는 해가 되기 위해, 형상함수 $\underline{N}(s)$ 는 도함수가 2 차까지 연속인 함수이어야 한다. 이것의 물리적인 의미는 강봉을 따른 변형에너지(strain energy)가 연속임을 말해준다. 이와같은 형상함수를 Hermite 형상함수라 부르며, 그림 2에 표시한 국소좌표(local coordinate) $\xi \in (0, 1)$ 인 주요소(master element)의 양 끝 단의 r 와 r' 값을 고려함으로써 만들어진다.

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, & N_2(\xi) &= \xi(1 - 2\xi + \xi^2), \\ N_3(\xi) &= \xi^2(3 - 2\xi), & N_4(\xi) &= \xi^2(\xi - 1) \end{aligned} \quad (11)$$



$$\begin{aligned} r_x(0, t) &= R_{1x}(t) & r_x(L, t) &= R_{3x}(t) \\ r'_x(0, t) &= R_{2x}(t) & r'_x(L, t) &= R_{4x}(t) \\ r_y(0, t) &= R_{1y}(t) & r_y(L, t) &= R_{3y}(t) \\ r'_y(0, t) &= R_{2y}(t) & r'_y(L, t) &= R_{4y}(t) \\ r_z(0, t) &= R_{1z}(t) & r_z(L, t) &= R_{3z}(t) \\ r'_z(0, t) &= R_{2z}(t) & r'_z(L, t) &= R_{4z}(t) \end{aligned}$$

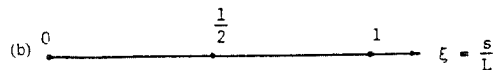


그림 2 (a) 절점자유도와 (b) 주요소

따라서 식 (8)은

$$r(\xi, t) = \begin{Bmatrix} r_x(\xi, t) \\ r_y(\xi, t) \\ r_z(\xi, t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N^T & 0 & 0 \\ 0 & N^T & 0 \\ 0 & 0 & N^T \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{R}_x \\ \underline{R}_y \\ \underline{R}_z \end{Bmatrix} \quad (12)$$

이다. 식 (11)은 요소내에서 $r''(s, t)$ 의 선형변화(linear variation)만 허용하므로 근사과정의 일관성을 유지하기 위하여 $T(s, t)$ 는 2차변화(quadratic variation) 이상은 허용될 수 없다. 따라서 그림 2에 도시한 강봉의 한 요소가 갖는 12절점 자유도(nodal degree of freedom)에 불과하여, $\xi = \frac{1}{2}$ 위치의 내부절점과 양 끝 단의 $\lambda(\xi, t)$ 값을 규정 하므로써 부가적인 3절점 자유도를 갖는다. 따라서 신장제한(stretch constraint) $\lambda(\xi, t)$ 는

$$\lambda(\xi, t) \sim P^T(\xi) \underline{A}(t) \quad (13)$$

으로 근사화 된다. 여기서 형상함수 $P(\xi)$ 는

$$\begin{aligned} P_1 &= 1 - 3\xi + 2\xi^2, & P_2 &= 4\xi(1 - \xi) \\ P_3 &= \xi(2\xi - 1) \end{aligned} \quad (14)$$

이므로, \underline{A} 는

$$\begin{aligned} \underline{A}(t) &= \left[\lambda(0, t), \lambda\left(\frac{1}{2}, t\right), \lambda(1, t) \right]^T \\ &= [A_1, A_2, A_3]^T \end{aligned} \quad (15)$$

3.3 유한요소 근사식

식 (10)은 12개의 절점자유도 \underline{R} 항으로 표시된 12개의 연립식으로 3개의 부가적인 자유도 \underline{A} 로 표시되는 λ 를 포함하므로, 3개의 제한식인 식 (2)의 제한을 받는다. H 와 m 을 무시한 경우, 15개의 유한요소 근사식은

$$\begin{aligned} [M] \ddot{\underline{R}}(t) &= -EI[s^3] \underline{R} - A_1[s^0] \underline{R} \\ &\quad - A_2[s^1] \underline{R} - A_3[s^2] \underline{R} \quad (16) \\ &\quad + (\rho_f A_f V^2 + \rho A_f) [s^7] \underline{R} + Q \\ \begin{Bmatrix} L \\ \frac{1}{12} 4L \\ L \end{Bmatrix} &\begin{Bmatrix} \underline{R}^T[s^0] \underline{R} \\ \underline{R}^T[s^1] \underline{R} \\ \underline{R}^T[s^2] \underline{R} \end{Bmatrix} + \frac{1}{EA_p} [s^3] \underline{A} \end{aligned}$$

$$+ \frac{EI}{EA_p} \begin{Bmatrix} \underline{R}^T[s^4] \underline{R} \\ \underline{R}^T[s^5] \underline{R} \\ \underline{R}^T[s^6] \underline{R} \end{Bmatrix} = 0 \quad (17)$$

이다. 여기서 A_p 는 강봉의 단면적, 식 (16)의 Q 는 일반화된 분포하중(generalized distributed load)으로

$$Q = \int_0^L N(s) q(s) ds \quad (18)$$

식으로 계산되며, 각 행렬은

$$\begin{aligned} M_{ij} &= m \int_0^1 N_i N_j L(i) L(j) d\xi \\ S^0_{ij} &= \frac{1}{L} \int_0^1 P_1 N_i' N_j' L(i) L(j) d\xi \\ P^1_{ij} &= \frac{1}{L} \int_0^1 P_2 N_i' N_j' L(i) L(j) d\xi \\ S^2_{ij} &= \frac{1}{L} \int_0^1 P_3 N_i' N_j' L(i) L(j) d\xi \\ S^3_{ij} &= \frac{1}{L^3} \int_0^1 N_i'' N_j'' L(i) L(j) d\xi \\ S^4_{ij} &= \frac{1}{L^3} \int_0^1 P_1 N_i'' N_j'' L(i) L(j) d\xi \\ S^5_{ij} &= \frac{1}{L^3} \int_0^1 P_2 N_i'' N_j'' L(i) L(j) d\xi \\ S^6_{ij} &= \frac{1}{L^3} \int_0^1 P_3 N_i'' N_j'' L(i) L(j) d\xi \\ S^7_{ij} &= \frac{1}{L} \int_0^1 N_i' N_j' L(i) L(j) d\xi \\ S^8_{ij} &= L \int_0^1 P_i P_j d\xi \\ L(i) &= \begin{cases} 1, & i=1, 3 \\ L, & i=2, 4 \end{cases} \end{aligned} \quad (19)$$

3.4 과도비선형계의 수치적분

식 (16)과 (17)은 절점자유도 \underline{R} 와 \underline{A} 에 대한 동적 비선형 미분방정식으로 수치해석을 위하여 시간적분(time integration)과 선형화(linearization)가 필요하다. 시간적분은 시간좌표에서 시간 t 를 독립변수로 하여 공간요소(spatial element)를 구성하는 것처럼 시간요소(time element)를 구성하는 “순수한(?) 유한요소법”이 있겠지만, 해저송유관 문제 해석에서는 유한차분법(finite difference)을 혼용하는 것이 유리하다.

Newmark 법에 의하면 시간 $t + \Delta t$ 에서 절점

속도 및 가속도, $\dot{\mathbf{R}}$ 와 $\ddot{\mathbf{R}}$ 는 미지수인 변위 \mathbf{R} 와 시간 t 에서 구한 절점속도와 가속도의 향으로 근사화된다.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}_{t+\Delta t} &= a_0(\mathbf{R}_{t+\Delta t} - \mathbf{R}_t) - a_2\dot{\mathbf{R}}_t - a_3\ddot{\mathbf{R}}_t \\ \ddot{\mathbf{R}}_{t+\Delta t} &= a_1(\mathbf{R}_{t+\Delta t} - \mathbf{R}_t) - a_4\dot{\mathbf{R}}_t - a_5\ddot{\mathbf{R}}_t \end{aligned} \quad (20)$$

여기서

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\alpha \Delta t^2}, \quad a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t}, \quad a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t} \\ a_3 &= \frac{1}{2\alpha} - 1, \quad a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1, \quad a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right) \\ \delta &\geq 0.50, \quad \alpha \geq 0, 25(0.5 + \delta)^2 \end{aligned} \quad (21)$$

식 (20)을 식 (16)에 대입하여 정리하면

$$F(\mathbf{R}_{t+\Delta t}, \mathbf{A}_{t+\Delta t}) = \mathbf{Q}_{t+\Delta t} \quad (22)$$

$$G(\mathbf{R}_{t+\Delta t}, \mathbf{A}_{t+\Delta t}) = 0 \quad (23)$$

의 형태로 표시된다.

식 (22)와 (23)은 비선형방정식으로 선형화하기 위해 2조의 함수에 대해 Taylor 급수전개를 시키고 고차항을 무시한 후 행렬식으로 표시하면

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} (F-Q) & \frac{\partial F}{\partial \mathbf{A}} \\ \frac{\partial G}{\partial \mathbf{R}} & \frac{\partial G}{\partial \mathbf{A}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{R} \\ \Delta \mathbf{A} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} F-Q \\ G \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (24)$$

또는

$$[\mathbf{K}^{(e)}]_{t+\Delta t} \cdot [\Delta \mathbf{U}^{(e)}]_{t+\Delta t} = [\mathbf{L}^{(e)}]_{t+\Delta t} \quad (25)$$

여기서 한 요소증분강성행렬 (element incremental stiffness matrix), $[\mathbf{K}^{(e)}]$ 는 $[15 \times 15]$ 이고, $[\Delta \mathbf{U}^{(e)}]$ 는 $[15 \times 1]$ 벡터로서, $[12 \times 1]$ 의 절점자유도 벡터와 $[3 \times 1]$ 의 증분제약 (incremental constraint) 벡터로 구분되어 있고, $[\mathbf{L}^{(e)}]$ 는 요소 하중 벡터이다. 전 요소에 대한 유한요소 근사식은 조립과정 (assembling)에 의해 구해지며, n 개 요소에 대한 전체 증분강성행렬 (global matrix)은 $[6(n+1) + 2n+1]^2$ 이 된다.

$$[\mathbf{K}]_{t+\Delta t} \cdot [\Delta \mathbf{U}]_{t+\Delta t} = [\mathbf{L}]_{t+\Delta t} \quad (26)$$

식 (26)으로부터 매 시간 증분 $t+\Delta t$ 마다 반복법 (iteration method)으로 i 번 반복하여 수렴 조건을 만족하는 $\Delta \mathbf{R}$ 와 $\Delta \mathbf{A}$ 를 구한 후

$$\mathbf{R}_{t+\Delta t} = \mathbf{R}_t + \Delta \mathbf{R} \quad (27)$$

$$\mathbf{A}_{t+\Delta t} = \mathbf{A}_t + \Delta \mathbf{A} \quad (28)$$

로써 \mathbf{R} 와 \mathbf{A} 를 구하고 식 (12)와 (13)으로 \mathbf{r} 와 $\dot{\lambda}$ 를 구할 수 있다.

4. 토의 및 맺음 말

지금까지 제한조건식을 갖는 연립 4계 미분 방정식을 주어진 경계조건과 초기조건과 함께 유한요소법으로 풀이하였다. 수치해석 문제에서 계산된 값에 대한 오차분석은 중요하고 이론적인 접근은 매우 어려운 문제에 속한다. 본 글에서는 엄밀해 (exact solution)가 존재하는 문제를 선정하여 절점변위의 정규화 실효치 오차 노름 (normalized root mean square error norm)을 계산하여 시간증분 Δt 와 전체 적분시간의 함수로서 그림 3에 도시하였다.

실제 해저송유관이나 기타 문제에 적용할 경우, 문제의 특성에 따른 다양한 외력들이 식 (18)에 의해 처리되고, 관내부 유동유체의 속도나 압력의 영향, 열팽창 효과 등을 관찰할 수 있기 때문에 필자가 소개한 방법이 널리 활용되어지고 있다.

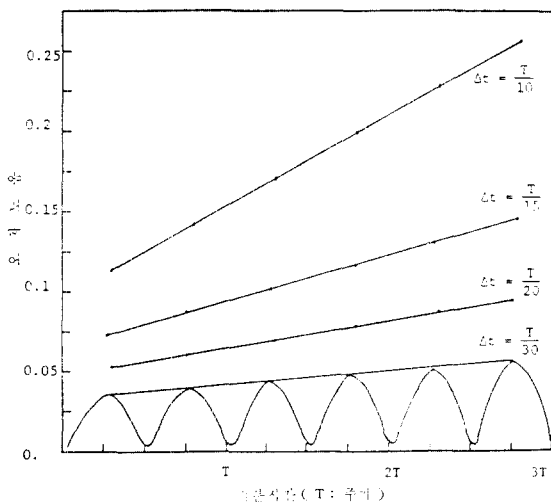


그림 3 절점변위의 정규화 실효치 오차노름

참 고 문 헌

- (1) Karal, K., "A Concept for Design of Submarine Pipelines to Resist Ocean Forces", J. of Energy Resources Technology, Trans. ASME, March, 1985
- (2) Seo, Y.T., Healey, A.J., "Dynamic Motions of Marine Pipelines on the Ocean Bottom", J. of Energy Resources Technology, Trans. ASME, March, 1984
- (3) Stein, R.A., Tobriner, M.W., "Vibration of Pipes Containing Flowing Fluids," J. of Applied Mechanics, Trans. ASME, Dec., 1970
- (4) Love, A.E.H., "A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity," 4th Ed., Dover Publications, New York, 1927
- (5) Landau, L.D., Lifshitz, E.M., "Theory of Elasticity," 2nd English Ed., Pergamon Press Inc., New York, 1970
- (6) Gallagher, R.H., "Finite Element Analysis Fundamentals," Prentice-Hall, Inc., 1975
- (7) Becker, E.B., Carey, G.F., Oden, J.T., "Finite Elements: An Introduction," Prentice-Hall, Inc., 1981
- (8) Zienkiewicz, O.C., "The Finite Element Method," 3rd Ed., McGraw-Hill Book Co.(UK) Ltd., 1977
- (9) Newmark, N.W., "A Method of Computation for Structural Dynamics," Proc. ASCE 85, 1959
- (10) Bathe, K.J., Wilson, E.L., "Numerical Methods in Finite Element Analysis," Prentice-Hall, Inc., 1976
- (11) Moler, C.B., "Computer Methods for Mathematical Computations," Prentice-Hall, Inc., 1977
- (12) Argyris, J.H., et al., "Nonlinear Oscillations Using the Finite Element Technique," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2, 1973
- (13) Lass, H., "Vector and Tensor Analysis," McGraw-Hill Book Co., 1950
- (14) Bernitsas, M.M., et al., "Nonlinear Inverse Perturbation in Structural Dynamics Redesign of Risers," J. of Energy Resources Technology, Trans. ASME, March, 1985



제 5 차 국제 모우드 해석 학술대회 안내

(5th International Modal Analysis Conference and Exhibits)

장 소 : Imperial College of Science and Technology
London, England

일 시 : 1987년 4월 6일~9일 (4일간)

초록마감 : 1986년 7월 1일 (200 단어 이하의 논문초록)

계 출 처 : Dominick J. DeMichele, Union College, Graduate & Continuing Studies,
Wells House-1 Union Avenue, Schenectaday, New York 12308-2363,
U.S.A.

※ 기타 자세한 내용은 서울대학교 기계설계학과 의 이장무교수 [(02)877-2131 쏧 3484]
또는 한양대학교 기계공학과 의 오재응교수 [(02)292-2111]에 문의.