

## 傾斜진 多孔性物體內에서의 自然對流에 關한 數值解析

### Numerical Study of Convective Heat Transfer in an Inclined Porous Media

목 인 균\*, 서 정 윤\*\*, 김 중 보\*\*  
I. K. Mok, J. Y. Seo, C. B. Kim

#### ABSTRACT

Numerical solutions of two-dimensional, steady, and natural are investigated in a confined rectangular cavity with porous media. The saturated fluid is bounded by two isothermal vertical walls at different temperatures and two adiabatic horizontal walls. Governing equations are numerically solved by finite difference method with the upwind scheme.

Distributions of streamline and temperature are predicted for aspect ratios ranging from 0.1 to 1.0, Rayleigh numbers 50 to  $10^4$ , and tilt angles  $0^\circ$  to  $60^\circ$ . Representative plots of temperature and velocity field according to tilt angle are presented.

The effects of aspect ratio, Rayleigh number, and tilt angle on local and average Nusselt numbers are obtained. The optimum conditions for maximum Nusselt number are also presented with tilt angles.

#### NOMENCLATURE

A	: Aspect Ratio, L/D	P	: pressure
D	: width of porous cavity	q	: heat transfer rate per unit area
g	: acceleration due to gravity	Ra*	: Rayleigh number
F	: average heat transfer coefficient	T	: Temperature
K	: permeability of porous medium	u, v	: fluid velocities
k	: thermal conductivity	U, V	: dimensionless velocities
km	: effective thermal conductivity of the saturated porous medium	x, y	: cartesian coordinates
L	: height of porous cavity	X, Y	: dimensionless coordinates
Nu	: average Nusselt number	$\alpha$	: thermal diffusivity of porous medium, $km/(pc)$
		$\beta$	: isobaric coefficient of thermal expansion of fluid

\* 인하대학교 대학원 기계공학과

\*\* 정회원, 인하대학교 기계공학과

- $\theta$  : dimensionless temperature,  $(T-T_c)/(T_h-T_c)$
- $\mu$  : dynamic viscosity of fluid
- $\rho$  : density of fluid
- $\phi$  : tilt angle
- $\psi$  : stream function

1. 緒 論

多孔性物質(Porous Media)을 통한 流體流動 및 對流熱傳達到 有關 研究는 工學的 應用分野에서 많은 注目을 받고 있다. 즉 地下水 및 石油探査分野에서는 地表 內部에서의 유체유동에 有關 研究가 遂行되어 왔으며. 建物斷熱, 熱交換器, 太陽熱集熱器 및 熱pipe 等의 많은 분야에서는 流體流動뿐만이 아니라 對流熱傳達到의 現象에 關해서 實驗 및 解析的인 方法에 의한 研究가 최근 활발히 進行되고 있다.

V. Prasad 와 F. A. Kulacki<sup>1)</sup> 等은 두 벽이 서로 다른 溫度를 維持하고, 두 面이 斷熱된 多孔性 物質에서 多量한 Rayleigh 數와 縱橫比에 對하여 有限差分法으로, C. E. Hickox 와 D. K. Gartling<sup>2)</sup>은 有限要素法으로, A. Bejan 과 C. L. Tien<sup>3)</sup>은 解析的으로 多孔性物質內의 流動場 및 速度場을 구하였다.

J. E. Weber<sup>4)</sup>는 水平面과의 傾斜角을 變化시키면서 無限히 긴 上下 兩面이 각각 다른 溫度로 維持될 때, J. E. Hart<sup>5)</sup>는 3次元의 경우에 遷移領域 및 多細胞流動領域을 觀察하였다. 또한 S. A. Borjes 와 M. A. Conbarnous<sup>6),7)</sup>은 實驗과 數值解析을 병행하였다.

本 研究에서는 兩壁이 各各 高溫과 低溫의 等溫으로 維持되고 나머지 벽은 斷熱된 直四角形 密閉空間內의 多孔性物質에 流體가 充填된 경우, 1 以下의 縱橫比에서 Rayleigh 數를 50에서 10<sup>4</sup> 까지 變化시키면서 水平面과의 傾斜角이 0°, 30°, 45° 및 60°인 경우의 流動 및 溫度分布를 數值的으로 解析하였다. 또한 傾斜角의 變化에 對한 平均Nusselt 數를 調査하였다.

2. 理論解析

2-1. 浸透率 (Permeability)

침투율은 流體가 多孔性物質에 浸透하는 정도를 나타내는 것으로, 流體의 特性과는 無關하고 多孔性物質의 構造에 의해서만 決定된다. 浸透率K는 Kozeny - Carman<sup>8)</sup>의 式에 의해서 計算된다.

$$K = \frac{d^2}{180} \frac{\epsilon^3}{(1-\epsilon^2)} \dots\dots\dots (2-1)$$

이때 d는 多孔性物質의 平均粒子直徑(mean grain diameter)이며, ε은 空隙率(porosity), 즉 全體 體積에 對한 多孔性物質의 體積比를 나타낸다.

2-2. 熱傳導率

流體로 充填된 多孔性物質의 熱傳導率 k<sub>m</sub> (thermal conductivity of saturated porous medium)은 Katto 와 Masuoka 가 제안한 다음의 보정식<sup>9)</sup>을 사용한다.

$$k_m = \epsilon kf + (1-\epsilon) ks \dots\dots\dots (2-2)$$

여기서 kf는 유체, ks는 多孔性物質의 熱傳導率이다.

3. 支配方程式

3-1. 支配方程式

本 研究에서 사용한 密閉空間의 幾何學的인 圖形을 그림(3-1)에 나타내었다. Boussinesq Approximation 과 2차원 層流 定常狀態로 가정하고 多孔性物質은 等方性이고 Darcy의 법칙이 적용된다고 가정하여 連續方程式, 運動量方程式(Darcy의 법칙) 및 Energy 方程式을 單純化하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots (3-1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{k} u + \rho g \sin \phi = 0 \dots (3-2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{k} u + \rho g \cos \phi = 0 \dots (3-3)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] \dots (3-4)$$

$$\rho = \rho_r [1 - \beta (T - T_r)] \dots (3-5)$$

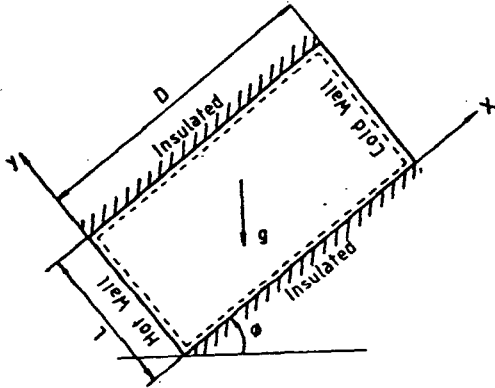


그림 3-1 Geometrical configuration of rectangular enclosure

3-2. 無次元化 및 無次元方程式

支配方程式을 無次元方程式으로 表現하기 위하여 다음과 같은 無次元變數 및 無次元數를 定義한다.

$$U = \frac{u}{\alpha/D}, V = \frac{v}{\alpha L/D^2}, X = \frac{x}{D},$$

$$Y = \frac{y}{L}, \theta = \frac{T - T_c}{T_h - T_c}, A = \frac{L}{D},$$

$$R_o^* = \frac{\rho g \beta K D \Delta T}{\mu \alpha} \dots (3-6)$$

式(3-1) ~ (3-5)를 無次元變數 및 無次元數로 無次元化한 後, 流動函數(stream function)을 導入하여 整理하면 다음의 式이 된다.

$$A^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} = R_o^* \left( A \frac{\partial \theta}{\partial X} \cos \phi - \right.$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial Y} \sin \phi \right) \dots (3-7)$$

$$\frac{\partial}{\partial Y} \left( \theta \frac{\partial \psi}{\partial X} \right) - \frac{\partial}{\partial X} \left( \theta \frac{\partial \psi}{\partial Y} \right) = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \dots (3-8)$$

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial Y}, V = -\frac{\partial \psi}{\partial X} \dots (3-9)$$

또한 境界條件은 다음과 같다.

$$X = 0 \text{에서 } \psi = 0, \theta = 1$$

$$X = 1 \text{에서 } \psi = 0, \theta = 0$$

$$Y = 0 \text{과 } 1 \text{에서 } \psi = 0,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \dots (3-10)$$

3-3. Nusselt 數

平均Nusselt 數는 다음과 같이 定義하였다.

$$\bar{N}_m = \frac{\bar{k} \cdot D}{k_m} = \frac{q \cdot D}{k_m (T_h - T_c)} \dots (3-11)$$

4. 數值解析

支配方程式을 有限差分式(Finite Difference Equation)으로 變形시키기 위하여 檢査體積(Control Volume)內에서 積分하여 정리하였다. 이 有限差分化過程에서 Gosman 等<sup>9), 10)</sup>이 개발한 Upwind Scheme을 使用하였다. 또한 有限差分式의 數值計算에는 point iteration method를 使用하였으며, 빠른 수렴을 위하여  $R_o^*$ 가 작을 때는 溫度項에 overrelaxation factor (1.5 ~ 1.9)를,  $R_o^*$ 가 클 때는 流動函數項에 underrelaxation factor (0.6 ~ 1.0)을 使用하였다.

A가 0.5 이상인 경우에는 31 x 31, 그 以下에는 41 x 21의 격자(grid)배열을 使用하였다. 또한 溫度變化가 급격히 일어나는 等溫壁 부근에서는 X 方向에 조밀한 배열을 使用하였다.

5. 結果 및 考察

5-1. 溫度分布

그림 (5-1)~(5-3)은 縱橫比(A)가 0.5 일때 水平面과의 傾斜角( $\phi$ )이  $0^\circ$ ,  $30^\circ$  및

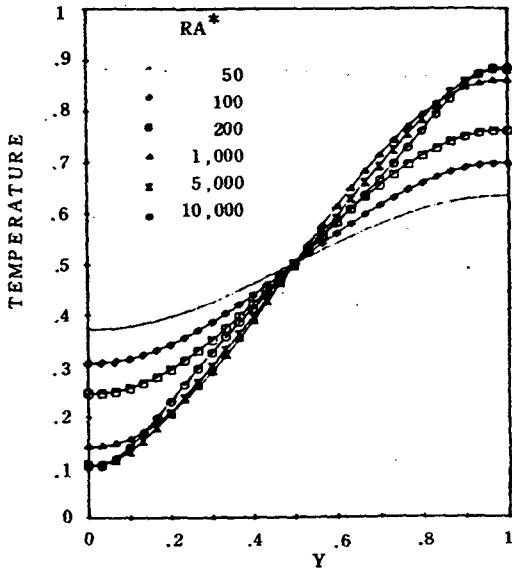


그림 5-1. Temperature distribution at  $X = 0.5 (A=0.5 ; 0 \text{ degree})$

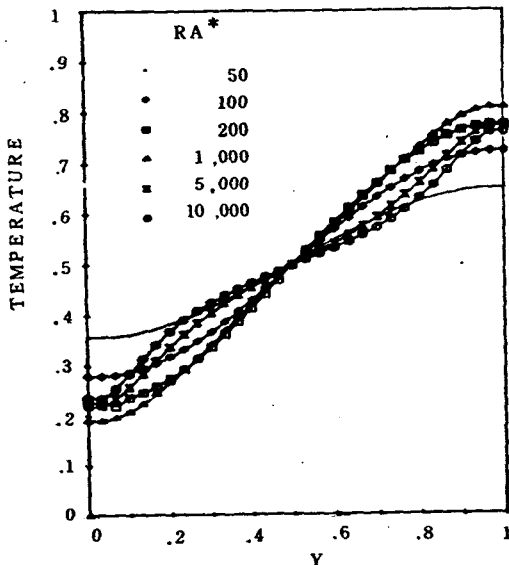


그림 5-2. Temperature distribution at  $X = 0.5 (A=0.5 ; 30 \text{ degree})$

$60^\circ$ 인 경우의  $X = 0.5$ 에서 Y방향으로 溫度分布이다. 여기서  $\phi$ 가 增加할수록 중심부분에서 기울기가 減少한다. 또한  $\phi = 30^\circ$ 와  $60^\circ$ 에서  $Ra^* = 5,000$  및 1,000에서 온도분포가 거의 水平이 되는 것은 傾斜角이 增加함에 따라 對流가 活發히 일어나서 中心部分이 거의 같은 溫度가 되었기 때문이다.

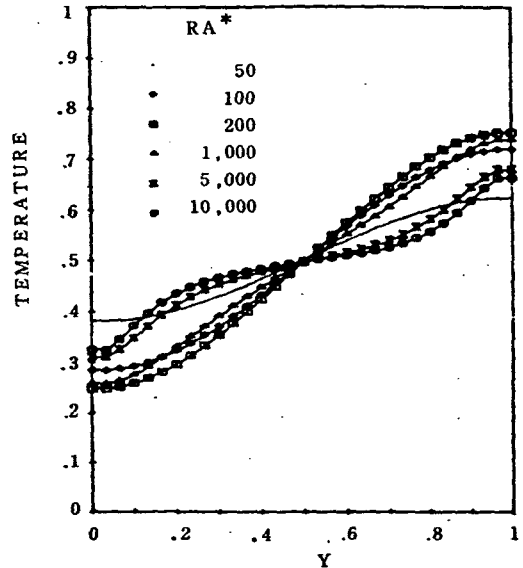


그림 5-3. Temperature distribution at  $X = 0.5 (A=0.5 ; 60 \text{ degree})$

5-2. 流線과 等溫線

그림 (5-4)와 (5-5)는  $Ra^* = 50$ ,  $A=0.5$  일때  $\phi$ 의 변화에 따른 流線 및 等溫線分布이다. 여기서  $\phi$ 가 增加하여도 流線 및 等溫線의 變化는 거의 없다. 이 경우에 熱傳達은 주로 傳導에 의하여 이루어짐을 알 수 있다.

그림 (5-6)과 (5-7)은  $Ra^* = 100$ , 그림 (5-8)과 (5-9)는  $Ra^* = 1,000$ 일때, 그림 (5-10)과 (5-11)은  $Ra^*$ 가 10,000 일때의 流線 및 等溫線分布를  $A=0.7$ 일때  $\phi$ 의 變化에 대해서 나타낸 것이다.  $Ra^* = 100$ 일때,  $\phi$ 가 增加함에 따라 浮力의 영향이 커져서 流速이 增加함을 알 수 있다. 또한 等溫線分布는 점점 層狀化된다.  $Ra^* = 1,000$ 에서  $\phi = 0^\circ$ 일때 발생한 2個의 Secondary cell이 傾

斜角을 갖게 되면 없어진다. 이는 浮力의 影響이 더 커져서 遷移流動領域 (Asymptotic flow regime) 을 벗어나서 境界層流動領域 (Boundary Layer flow regime) 이 되었다. 또한  $Ra^* = 10,000$  일때, 벽 가까운 部分은 流速이 매우 빨라서 溫度變化가 심하며,  $\phi = 60^\circ$  일때는 벽부근을 제외하고는 거의 均一한 溫度分布가 된다.

5-3. 平均熱傳達

그림 (5-12) 는  $Ra^* = 100$  일때의 A에 對한 平均Nusselt 數( $\bar{N}_u$ )이다. 여기서 同一한  $\phi$ 에서 A가 增加할수록  $\bar{N}_u$ 가 增加함을 알 수 있다. 또한 同一한 A에서는  $\phi = 45^\circ$ 에서 最大  $\bar{N}_u$ 가 存在함을 알 수 있다.

그림 (5-13) 은  $Ra^* = 1,000$  일때의 境遇이다. 여기서  $\phi = 0^\circ$  일때에는  $A = 0.7$ 에서  $\bar{N}_u$ 가 最大가 된다. 또한 이것은 V. Prasad 와 F. A. Kulacki<sup>1)</sup>의 結果와 잘 一致한다. A =

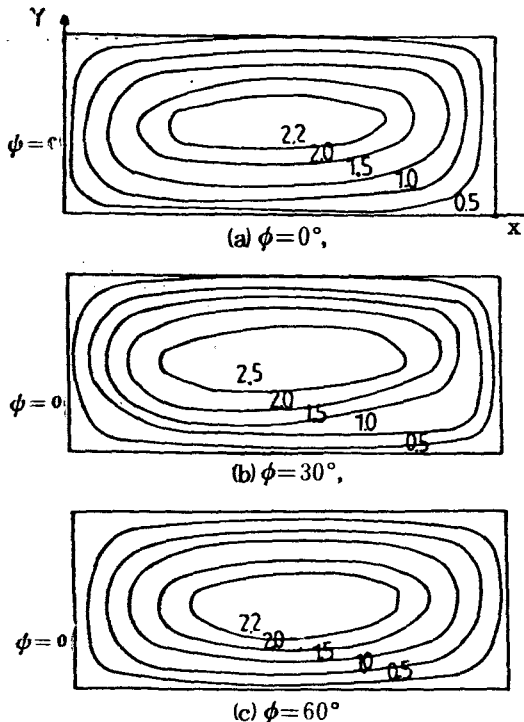


그림 5-4 Streamlines for A=0.5 and  $Ra^* = 50$

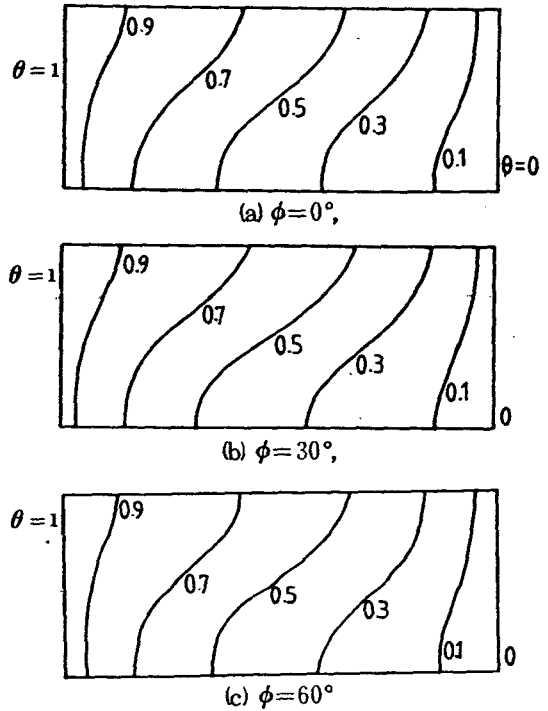


그림 5-5 Isotherms for A=0.5 and  $Ra^* = 50$

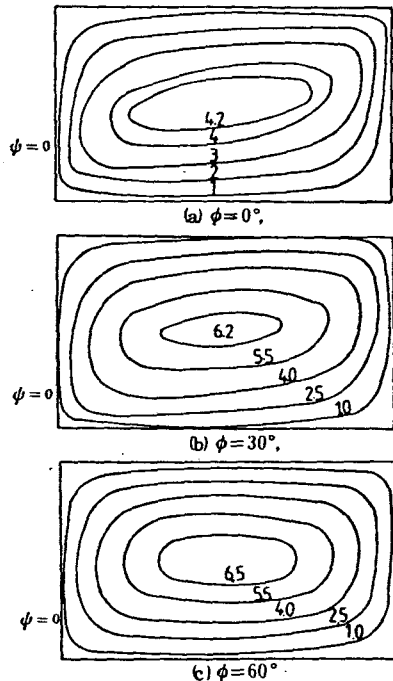


그림 5-6 Streamlines for A=0.7 and  $Ra^* = 100$

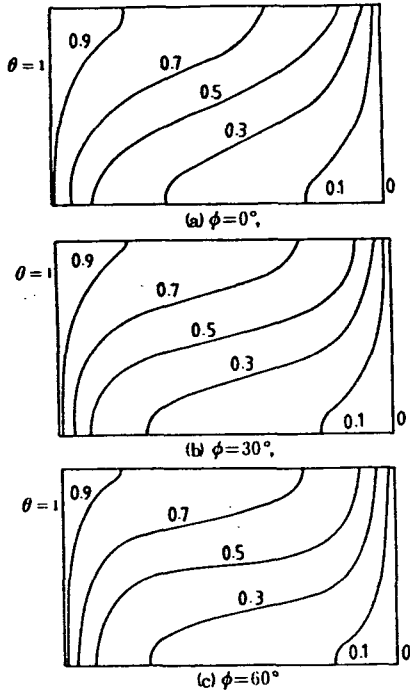


그림 5-7 Isotherms for  $A=0.7$  and  $Ra^*=100$

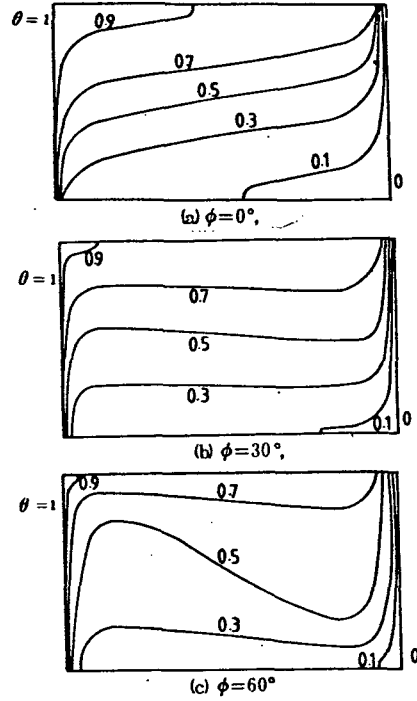


그림 5-9 Isotherms for  $A=0.7$  and  $Ra^*=1,000$

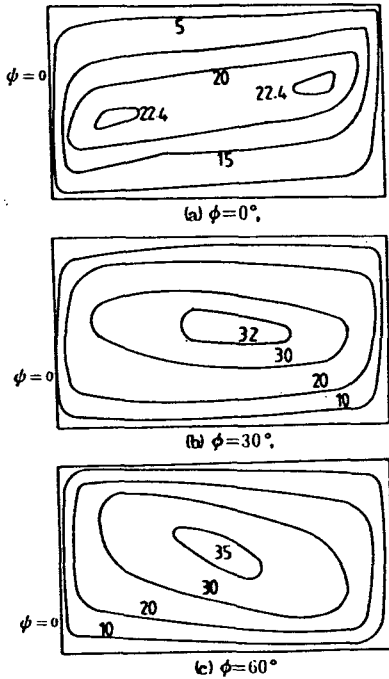


그림 5-8 Streamlines for  $A=0.7$  and  $Ra^*=1,000$

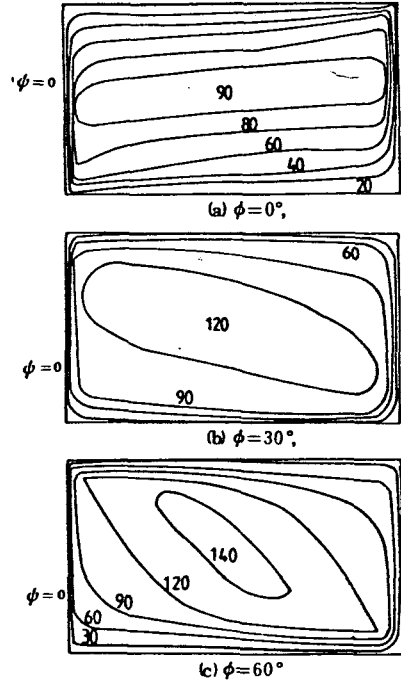


그림 5-10 Streamlines for  $A=0.7$  and  $Ra^*=10,000$

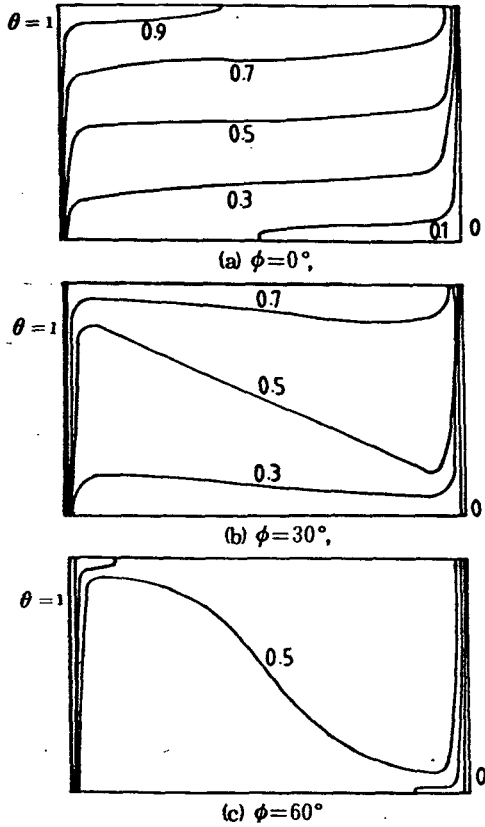


그림 5-11 Isotherms for  $A=0.7$  and  $Ra^*=10,000$

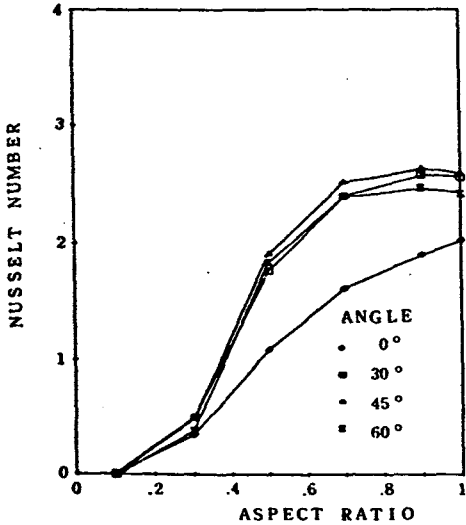


그림 5-12 Effects of aspect ratio on Nusselt number ( $Ra^*=100$ )

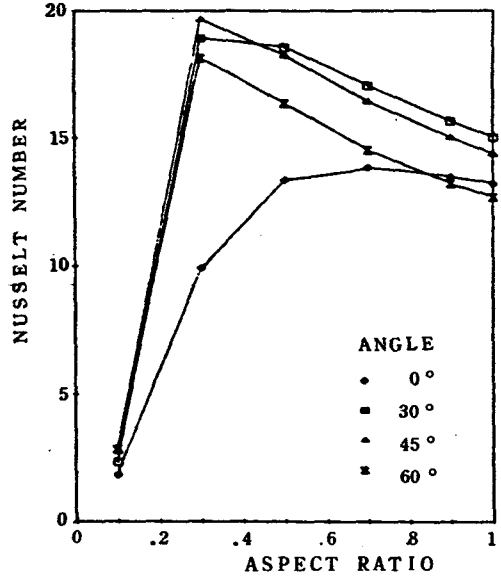


그림 5-13 Effects of aspect ratio on Nusselt number ( $Ra^*=1,000$ )

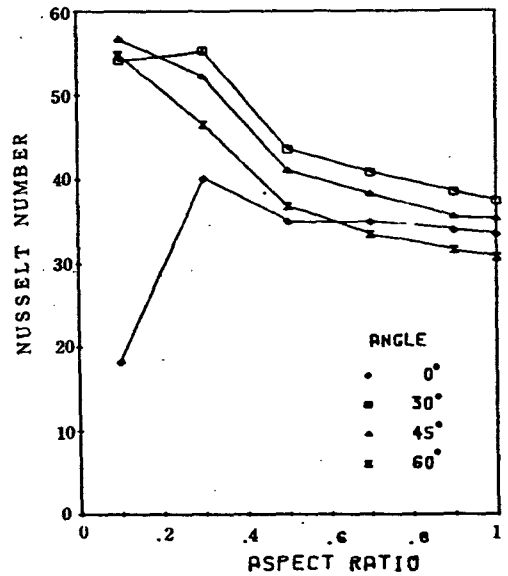


그림 5-14 Effects of aspect ratio on Nusselt number ( $Ra^*=10,000$ )

0.3 일 때는  $\phi = 45^\circ$  에서,  $A$  가 0.5 以上에서는  $\phi = 30^\circ$  에서 最大  $\bar{N}_u$  가 存在한다. 이것은 等溫壁面을 타고 흐르는 longitudinal flow type 과  $\phi = 90^\circ$  일때 發生하는 Benard cell type flow 의 混合效果가 最大로 되기 때문이다.

그림 (5-14) 는  $R_a^* = 10,000$  일때의 경우이다.  $\phi = 0^\circ$  일때는  $A = 0.3$  에서  $\bar{N}_u$  가 最大가 된다. 또한  $A = 0.1$  일때는  $\phi = 45^\circ$  에서,  $A$  가 0.3 以上에서는  $\phi = 30^\circ$  에서 最大  $\bar{N}_u$  가 存在함을 알 수 있다. 또한 同一한 傾斜角에서는  $\phi$  가  $30^\circ$  以下에서는  $A = 0.3$  에서, 그 以上에서는  $A = 0.1$  에서 最大  $\bar{N}_u$  가 存在한다.

## 6. 結 論

等溫垂直壁과 斷熱水平面으로 구성된 直四角體 多孔性物質 內部에서  $0.1 \leq A \leq 10$ ,  $R_a^* \leq 10^4$  그리고 傾斜角  $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ$  및  $60^\circ$  의 조건에서 일어나는 流動場 및 溫度場에 대하여 有限差分法으로 數值解析하여 다음과 같은 結論을 얻었다.

1) 同一한 縱橫比에서 Rayleigh 數가 增加할수록 流動은 傳導→遷移→境界層流動으로 變하며 傾斜角이 있는 境遇에는 그 變化가 빠르다.

2) 地面과의 傾斜角이  $0^\circ$  일때 發生했던 多細胞流動은 傾斜角이 있을 때는 單細胞流動이 된다.

3) 最大 Nusselt 數는 同一한 縱橫比에서 Rayleigh 數가 1,000 以上이고 縱橫비가 0.3 以上에서는 傾斜角  $30^\circ$  에서, 그밖의 境遇에는 傾斜角  $45^\circ$  에서 存在한다.

4) 同一한 Rayleigh 數에서 傾斜角이 增加함에 따라 最大 Nusselt 가 存在하는 縱橫비가 減少한다.

## REFERENCES

1. V. Prasad and F.A. Kulacki, "Convective Heat Transfer in a Rectangular Porous Cavity-Effect of Aspect Ratio on Flow Structure and Heat Transfer," ASME Journal of Heat Transfer, Vol. 106, 1984, pp. 158-165.
2. C.E. Hickox and D.K. Gartling, "A Numerical Study of Natural Convection in a Horizontal Porous Layer Subjected to an End-to-End Temperature Difference," ASME Journal of Heat Transfer, Vol. 103, 1981, pp. 797-802.
3. A. Bejan and C.L. Tien, "Natural Convection in a Horizontal Porous Medium Subjected to an End-to-End Temperature Difference," ASME Journal of Heat Transfer, Vol. 100, 1978, pp. 191-198.
4. J.E. Weber, "Thermal Convection in a Tilted Porous Layer," Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 18, 1975, pp. 474-475.
5. J.E. Hart, "Transition to a wavy vortex regime in convective flow between inclined plates," J. Fluid Mech., Vol. 48, 1971, pp. 265-271.
6. S.A. Bories and M.A. Combarous, "Natural Convection in a Sloping Porous Layer," J. Fluid Mech. Vol. 57, 1973, pp. 63-73.
7. M.A. Combarous and S.A. Bories, "Hydrothermal Convection in Saturated Porous Media," Advances in Hydroscience, Vol. 10, Academic Press, 1975, pp. 231-307.
8. V. Prasad and F.A. Kulacki, "Natural Convection in Porous Media Bounded by Short Concentric Vertical Cylinder," ASME Journal of Heat Transfer, Vol. 107, 1985, pp. 147-154.
9. A.D. Gosman, W.M. Pun, A.K. Runchal, D.B. Spalding, and M. Wolfshtein, Heat and Mass Transfer in Recirculating Flows, Academic Press, London, 1969.
10. P.J. Roache, Computational Fluid Dynamics, Hermosa Publishers, Albuquerque, 1976.