

二次元過渡熱傳導에 대한 陰函數型 有限差分法의 精度에 미치는 空間增分 및 時間間隔의 影響

趙 權 玉 · 李 庸 晟 · 吳 厚 圭

釜山水產大學 冷凍工學科

(1984년 10월 10일 수리)

Effects of Space Increment and Time Step to the Accuracy of the Implicit Finite Difference Method in a Two-Dimensional Transient Heat Conduction Problem

Kwon-Ok CHO, Yong-Sung LEE and Hoo-Kyu OH

Department of Refrigeration Engineering, National Fisheries University of Pusan,

Nam-gu, Pusan, 608 Korea

(Received October 10, 1984)

The study on computation time, accuracy, and convergency characteristic of the implicit finite difference method is presented with the variation of the space increment and time step in a two-dimensional transient heat conduction problem with a dirichlet boundary condition.

Numerical analysis were conducted by the model having the conditions of the solution domain from 0 to 3 m, thermal diffusivity of 1.26 m²/h, initial condition of 272 K, and boundary condition of 255.4 K.

The results obtained are summarized as follows:

- 1) The degree of influence with respect to the accuracy of the time step and space increment in the alternating-direction implicit method and Crank-Nicholson implicit method were relatively small, but in case of the fully implicit method showed opposite tendency.
- 2) To prescribe near the zero for the space increment and time step in a two dimensional transient problem were good in a accuracy aspect but unreasonable in a computational time aspect.
- 3) The reasonable condition of the space increment and the time step considering accuracy and computation time could be generalized with the Fourier modulus increment, F , and dimensionless space increment, X , irrespective of the solution domain.

記 號

c_p : 比熱, kcal/kg°C

F : Fourier 數增分, $K \cdot \Delta t / \rho \cdot c_p (\Delta x)^2$

i : x 軸 節點

j : y 軸 節點

K : 熱傳導率, kcal/mh°C

L : 解領域의 길이, m

T : 溫度, K

t : 時間, hr

τ : Fourier 數, $K \cdot t / \rho \cdot c_p \cdot L^2$

ρ : 密度, kg/m³

X : 無次元空間增分, $\Delta x / L = \Delta y / L$

참 자

o : 初期

$S_1 \sim S_4$: 境界表面

x, y, z : 座標軸

緒 論

熱傳導解析의 主目的은 溫度勾配가 생기는 傳導體 内部의 溫度分布를 推定하는 것이며, 이같은 溫度分布에 대한 精確한 知識은 熱交換器設計의 기초가 되는 물론이고, 에너지 절약과도 관련되는 사항이므로 그 重要性은 대단히 크다. 특히 傳導體内部의 과도 상태 열전도 해석은 구조체의 안전설계에도 重要하다.

過渡狀態熱傳導問題에 대한 수치적 解法中の 하나인 陰函數型有限差分法은 安定條件에 지배를 받지 않으므로 양함수형 有限差分法에 비해서 空間增分과 時間間隔의 선택에 제한을 받지 않는 장점을 갖고 있다.¹⁻¹⁰⁾ 그러나 解의 精度를 고려하면 필연적으로 空間增分과 時間間隔의 선정에 제한을 받게되며 問題의 次元이 높아짐에 따라 계산량도 많아지게 되므로 計算時間이 엄청나게 커지게 된다. 이같은 점을 고려하면 解의 精度와 計算시간을 고려한 合理的인 空間증분과 시간간격의 선정이 필요하게 된다.

이에 대한 연구로서는, Trent와 Welty¹⁾, Emery와 Carson¹¹⁾ 등에 의한 部分的인 연구가 있으며, Myers⁹⁾에 의하면 구하고자 하는 문제의 計算量과 計算시간을 고려한 반복시행에 의한 시행착오법을 권하고 있다. 그러나 精度, 收束性, 計算時間을 모두 고려하여 비교, 고찰한 연구는 거의 없는 실정이며, 다만 Barakat와 Clark³⁾ 등에 의한 交叉方向 양함수方法과 여타 다른 方法을 비교, 고찰한 부분적인 연구가 있을 뿐이다.

따라서 본 연구에서는 二次元 모델 선정에 의해서 陰函數型 有限差分法인 完全陰函數方法, 交叉方向陰函數方法 및 크랭크-니콜슨 陰函數方法에 대해서 시간간격 및 공간증분이 解의 收束性에 미치는 영향을 計算精度와 計算시간의 관점에서 비교, 고찰하였다.

理 論 解 析

1. 支配方程式과 初期 및 境界條件

계산모델은 Fig.1과 같이 z축이 무한히 긴 二次元의 사각형 물체로서, (1)식의 二次元過渡熱傳導方程式에 支配되며, 初期 및 境界條件은 (2)~(6)식과 같다.

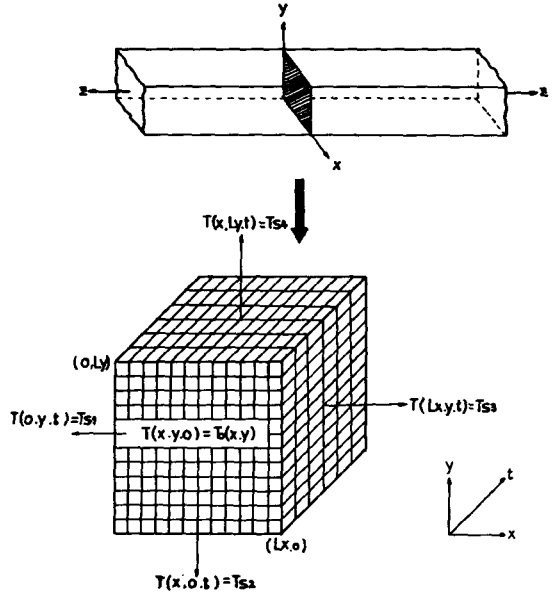


Fig. 1. Solution domain divided into rectangular difference in space and time.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\rho c_p}{K} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

$$t=0, T(x, y, 0) = T_0(x, y) \quad (2)$$

$$t>0, S_1 \text{에서 } T(0, y, t) = T_{s1} \quad (3)$$

$$S_2 \text{에서 } T(x, 0, t) = T_{s2} \quad (4)$$

$$S_3 \text{에서 } T(L_x, y, t) = T_{s3} \quad (5)$$

$$S_4 \text{에서 } T(x, L_y, t) = T_{s4} \quad (6)$$

그리고 이 모델에 대한 解析解는 (7)식과 같다.²⁾

$$T(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} A_n \sin \frac{i\pi x}{L_x} \sin \frac{j\pi y}{L_y} \exp \left[- \left(\frac{K_x i^2 \pi^2}{L_x^2} + \frac{K_y j^2 \pi^2}{L_y^2} \right) \cdot \frac{t}{\rho c_p} \right] \quad (7)$$

여기서

$$A_n = \frac{(T_{s1} + T_{s2} + T_{s3} + T_{s4})}{i \cdot j \cdot \pi^2} \cdot \frac{1}{[(-1)^i - 1][(-1)^j - 1]} \quad (8)$$

2. 有限差分法에 의한 近似解析

1) 完全陰函數方法(Fully Implicit Method)

Fig.2에 圖式한 것처럼 空間增分 Δx , Δy 를 有限差分하고 時間間隔을 Δt 라고 할 때 x , y , t 는 (9), (12)식과 같고 溫度 $T(x, y, t)$ 는 (14)식과 같이 들 수 있다.

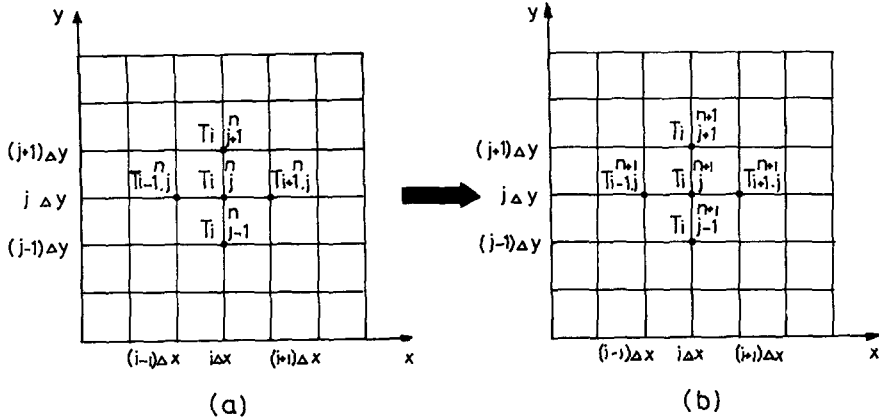


Fig. 2. Rectangular network of mesh $\Delta x, \Delta y$: (a) at time t (b) at time $t+1$.

$$x=i\Delta x, y=j\Delta y \quad (9)$$

여기서,

$$i=0, 1, 2, \dots, N \quad (10)$$

$$j=0, 1, 2, \dots, N \quad (11)$$

$$t=n\Delta t \quad (12)$$

여기서,

$$n=0, 1, 2, 3, \quad (13)$$

$$T(x, y, t) = T(i\Delta x, j\Delta y, n\Delta t) = T_{i,j}^n \quad (14)$$

($n+1$) 시간에 관해 節點 (i, j) 에서의 二階偏導函數 $\partial^2 T/\partial x^2, \partial^2 T/\partial y^2$ 의 有限差分型은 (15), (16)式과 같은 有限差分式으로, 時間變數에 관한 一階偏導函數 $\partial T/\partial t$ (17)式과 같은 後進差分式으로 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Big|_{(i,j,n+1)} \cong \frac{T_{i+1,j}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i-1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \Big|_{(i,j,n+1)} \cong \frac{T_{i,j+1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1}}{(\Delta y)^2} \quad (16)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{(i,j,n+1)} \cong \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (17)$$

(15)~(17)式을 (1)式에 代入하면 (1)式에 관한 完全陰函數型이 유도되며, 空間增分 $\Delta x, \Delta y$ 를 같게 두면 (18)式이 유도된다.

$$(1+4F)T_{i,j}^{n+1} = T_{i,j}^n + F \cdot (T_{i+1,j}^{n+1} + T_{i-1,j}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1}) \quad (18)$$

여기서,

$$F = K \cdot \Delta t / \rho \cdot c_p (\Delta x)^2 \quad (19)$$

또, (18)式을 $T_{i,j}^{n+1}$ 에 대해 풀면 (20)式이 된다.

$$T_{i,j}^{n+1} = D_{i,j} + E(T_{i-1,j}^{n+1} + T_{i+1,j}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1}) \quad (20)$$

여기서,

$$D_{i,j} = T_{i,j}^n / (1+4F) \quad (21)$$

$$E = A / (1+4F) \quad (22)$$

2) 交叉方向陰函數方法(Alternating Direction Implicit Method)

空間, 時間座標 x, y, t 는 (9), (12)式과 같고 溫度 $T(x, y, t)$ 는 (14)式과 같다. n 時間에서 $n+1/2$ 時間까지의 區間에서는 x 方向에 대해서, $n+1/2$ 時間에서 $n+1$ 時間까지는 y 方向에 대해서 다음과 같은 陰函數型으로 나타낼 수 있다.¹⁾

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Big|_{(i,j,n+1/2)} \cong \frac{T_{i+1,j}^{n+1/2} - 2T_{i,j}^{n+1/2} + T_{i-1,j}^{n+1/2}}{(\Delta x)^2} \quad (23)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \Big|_{(i,j,n)} \cong \frac{T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} \quad (24)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{(i,j,n+1/2)} \cong \frac{T_{i,j}^{n+1/2} - T_{i,j}^n}{\Delta t/2} \quad (25)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Big|_{(i,j,n+1/2)} \cong \frac{T_{i+1,j}^{n+1/2} - 2T_{i,j}^{n+1/2} + T_{i-1,j}^{n+1/2}}{(\Delta x)^2} \quad (26)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \Big|_{(i,j,n+1)} \cong \frac{T_{i,j+1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1}}{(\Delta y)^2} \quad (27)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{(i,j,n+1)} \cong \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta t/2} \quad (28)$$

여기서 $\Delta x = \Delta y, X = \frac{x}{L}, \tau = \frac{\alpha \cdot t}{L^2}$ 로 두면 (29), (30)式이 유도된다.

$$\begin{aligned} & -T_{i-1,j}^{n+1/2} + 2\left(\frac{1}{F} + 1\right)T_{i,j}^{n+1/2} - T_{i,j}^{n+1/2} \\ & = T_{i,j-1}^n + 2\left(\frac{1}{F} - 1\right)T_{i,j}^n + T_{i,j+1}^n \quad (29) \end{aligned}$$

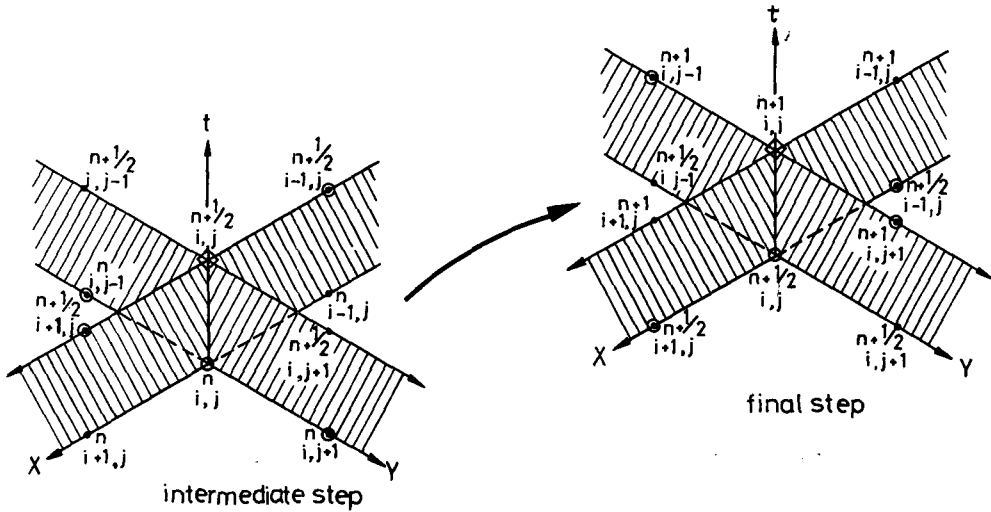


Fig. 3. Alternating direction implicit procedure for two dimensional problems.

$$\begin{aligned}
 & -T_{i,j-1}^{n+1} + 2\left(\frac{1}{F} + 1\right)T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j+1}^{n+1} \\
 & = T_{i-1,j}^{n+1} + 2\left(\frac{1}{F} - 1\right)T_{i,j}^{n+1} + T_{i+1,j}^{n+1} \quad (30)
 \end{aligned}$$

$$M = 1 - 2 \cdot F \quad (33)$$

$$N = 1 + 2 \cdot F \quad (34)$$

$$C = F/2(1 + 2 \cdot F) \quad (35)$$

Fig. 3 은 이 方法을 圖式的으로 나타낸 것이다.

3) 크랭크-니콜슨 陰函數方法(Crank-Nicholson Implicit Method)

空間, 時間座標 x, y, t 는 앞에서와 마찬가지로 (9), (12)式으로 溫度 $T(x, y, t)$ 는 (14)式으로 表現되며, 支配方程式 (1)式에 관한 크랭크-니콜슨 陰函數型은 (31)式으로 表現된다.¹⁾

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \left\{ \frac{T_{i-1,j}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i+1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{T_{i,j-1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1}}{(\Delta y)^2} \right\} \\
 & + \frac{1}{2} \left\{ \frac{T_{i-1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i+1,j}^n}{(\Delta x)^2} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{T_{i,j-1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j+1}^n}{(\Delta y)^2} \right\} \\
 & = \frac{\rho}{K \cdot c_p \cdot \Delta t} (T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n) \quad (31)
 \end{aligned}$$

(31)式에서, $\Delta x = \Delta y$ 로 두고 $T_{i,j}^{n+1}$ 에 대해서 풀면 (32)式이 유도된다.

$$\begin{aligned}
 T_{i,j}^{n+1} & = M/N T_{i,j}^n + C[T_{i-1,j}^{n+1} + T_{i+1,j}^{n+1} \\
 & \quad + T_{i,j-1}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1}] + C[T_{i-1,j}^n \\
 & \quad + T_{i+1,j}^n + T_{i,j-1}^n + T_{i,j+1}^n] \quad (32)
 \end{aligned}$$

여기서,

計算모델 및 計算方法

Fig. 1 에 제시되어 있는 모델에 대한 有限差分解는 Table 1 에 명시된 조건에서 구했는데, 解領域, 熱物性 그리고 初期, 境界條件은 Zyvoloski 등²⁾ 의 有限要素解析에 채택된 값을 그대로 사용했다. 그것은 有限差分法에 의한 본 연구 결과와 비교하기 위해서였으며, 無次元空間增分은 임의로 선정하여 예비 수치 계산을 행한 결과, 0.1 과 0.17 부근에서 임계성을 보였으므로 두 부분에 대해서 집중적인 分析을 하였다. 計算은 完全陰函數方法과 크랭크-니콜슨 陰函數方法에는 Gauss-Seidel 反復法을, 交叉方向陰函數方法에는 Gauss 消去法을 사용하였다.

Table 1. Thermal property and condition for numerical computation

| | |
|-------------------------------|--|
| Solution domain | $0 \leq x \leq 3.0 \text{ m}, 0 \leq y \leq 3.0 \text{ m}$ |
| Dimensionless space increment | 0.1, 0.17 |
| Thermal conductivity | 0.567 (kcal/mh°C) |
| Heat capacity | 0.45 (kcal/m ³ °C) |
| Initial condition | 272 K (-1.15°C) |
| Boundary condition | 255.4 K (-17.75°C) |

結果 및 考察

1. 收束性 검토

Fig. 4~7 은 여러가지 時間間隔에 대한 完全陰函數方法과 交叉方向陰函數方法의 解析解에 대한 收束性을 나타낸 것이다.

Fig. 4, 5에서 보는 것처럼 解析解에 대한 完全陰函數方法의 收束性은 空間增分과 時間間隔의 變動에 의한 영향을 크게 받으며, 收束速度도 대단히 느리다는 것을 알 수 있다. 바람직한 結果를 얻기 위해서는 무차원 空間增分 X 가 0.1인 경우는 F 값을 0.14 이하로, X 값이 0.17인 경우는 F 값을 0.05

이하로 되도록 時間間隔의 선정이 이루어 져야 한다고 보아진다.

Fig. 6, 7은 交叉方向陰函數方法의 收束性을 나타내고 있는 것으로서, 앞의 完全陰函數方法과는 현저한 差異를 發見할 수 있다. 즉 임의의 고정된 空間增분값에 대해서, 時間間隔의 變動이 收束性에 미치는 영향은 대단히 작았으며, 또한 解析解에 대한 收束性도 대단히 좋았다. 또한 一般的으로 空間增분의 變動은 초기 시간을 제외하고는 收束性에 거의 영향이 없었다. X 값이 0.1인 경우는 F 값이 4.2 이하로 되게 時間間隔을 선정하면 시간간격의 差異에 별 관계없이 초기 시간부터 收束性이 대단히 좋음을 알 수 있다. 또 X 값이 0.17인 경우는 0.5 이하의 F 값으

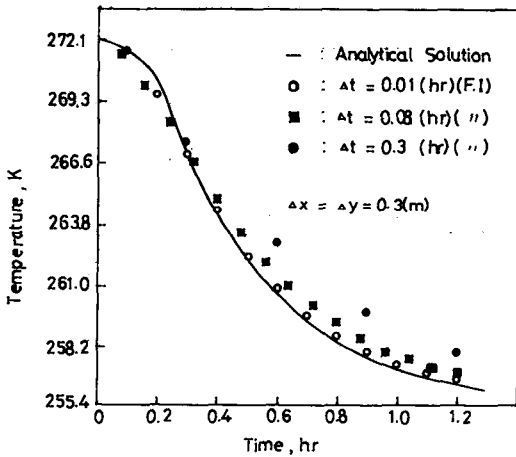


Fig. 4. Variation of centerpoint temperature of square long rod subjected to constant temperature boundary condition at various time step.

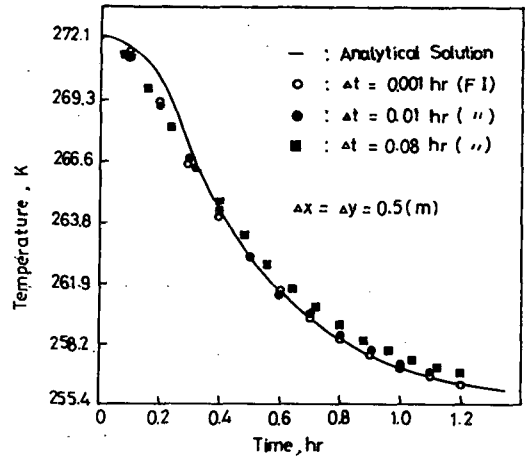


Fig. 5. Variation of centerpoint temperature of square long rod subjected to constant temperature boundary condition at various time step.

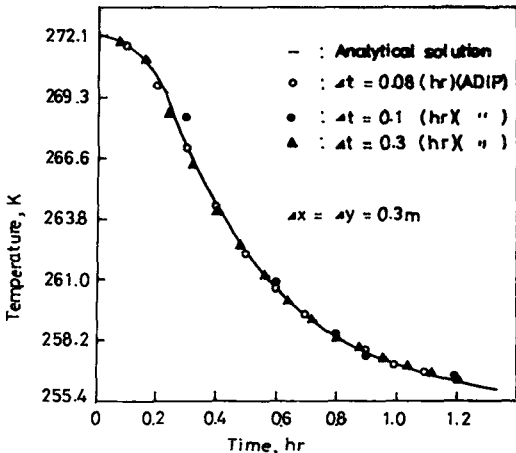


Fig. 6. Variation of centerpoint temperature of square long rod subjected to constant temperature boundary condition at various time step.

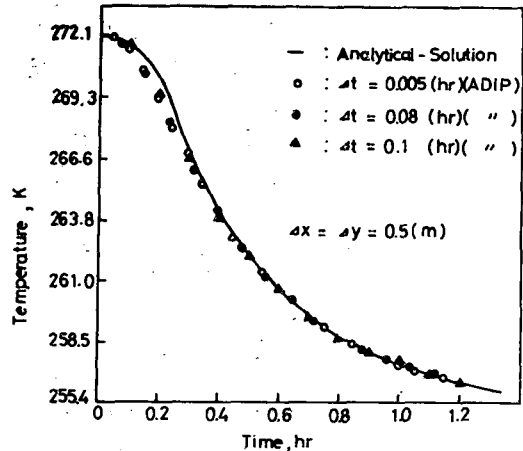


Fig. 7. Variation of centerpoint temperature of square long rod subject to constant temperature boundary condition at various time step.

Table 2. Impossible temperatures at the first time step of an an alternating direction implicit difference procedure with F=4

| | | | | | | | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 255.37 | 255.37 | 255.37 | 255.37 | 255.37 | 255.37 | 255.37 | 255u37 | 255.37 | 255.37 | 255.37 |
| 255.37 | 255.37 | 255.35 | 255.34 | 255.33 | 255.33 | 255.33 | 255.34 | 255.35 | 255.37 | 255.37 |
| 255.37 | 255.35 | 259.42 | 261.40 | 262.30 | 262.56 | 262.30 | 261.40 | 259.42 | 255.35 | 255.37 |
| 255.37 | 255.34 | 261.40 | 265.70 | 266.09 | 265.70 | 264.37 | 261.40 | 255.34 | 255.37 | 255.37 |
| 255.37 | 255.33 | 262.30 | 265.70 | 267.24 | 267.68 | 267.24 | 295.70 | 262.30 | 355.33 | 255.37 |
| 255.37 | 255.33 | 262.56 | 269.09 | 267.68 | 268.14 | 267.68 | 266.09 | 262.56 | 255.33 | 255.37 |
| 255.37 | 255.33 | 262.30 | 265.70 | 267.24 | 267.68 | 267.24 | 265.70 | 262.30 | 255.33 | 255.38 |
| 255.37 | 255.34 | 261.40 | 264.37 | 265.70 | 266.09 | 265.70 | 264.37 | 261.40 | 255.34 | 255.37 |
| 255.37 | 255.35 | 259.42 | 261.40 | 262.30 | 262.56 | 262.30 | 261.40 | 259.42 | 255.35 | 255.37 |
| 255.37 | 255.37 | 255.35 | 255.35 | 255.34 | 255.33 | 255.33 | 255.33 | 255.34 | 255.34 | 255.35 |
| 255.37 | 255.37 | 255.37 | 255.37 | 255.37 | 255.37 | 255.37 | 255.37 | 255.37 | 255.37 | 259.37 |

(F=Fourier modulus increment, $\Delta x=0.3 m$, $\Delta t=0.288 hr$)

Table 3. Impossible temperatures at first time step of an alternating direction implicit finite difference procedure with F=4.1667

| | | | | | | | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 255.37 | 255.37 | 255.37 | 255.37 | 255.37 | 255.37 | 255.37 | 255.37 | 255.37 | 255.37 | 255.37 |
| 755.37 | 255.38 | 255.24 | 255.17 | 255.14 | 255.13 | 255.14 | 255.17 | 255.24 | 255.38 | 255.37 |
| 255.37 | 255.24 | 259.18 | 261.13 | 262.02 | 262.28 | 262.02 | 261.13 | 259.18 | 255.24 | 255.37 |
| 255.37 | 255.17 | 261.13 | 264.08 | 265.42 | 265.81 | 265.42 | 264.08 | 261.13 | 255.17 | 255.37 |
| 255.37 | 255.14 | 262.02 | 265.42 | 266.97 | 265.42 | 262.02 | 255.14 | 255.37 | 255.37 | 255.37 |
| 255.37 | 255.13 | 262.28 | 265.81 | 267.42 | 267.88 | 267.42 | 265.81 | 262.28 | 255.13 | 255.37 |
| 255.37 | 255.14 | 262.02 | 265.42 | 266.97 | 267.42 | 266.97 | 265.42 | 262.02 | 255.14 | 255.37 |
| 255.37 | 255.17 | 261.13 | 264.08 | 265.42 | 265.81 | 265.42 | 264.08 | 261.13 | 255.17 | 255.37 |
| 255.37 | 255.24 | 259.18 | 261.13 | 262.02 | 262.28 | 262.02 | 261.13 | 259.18 | 255.24 | 255.37 |
| 255.37 | 255.38 | 255.24 | 255.14 | 255.13 | 255.14 | 255.14 | 255.17 | 255.24 | 255.38 | 255.37 |
| 255.37 | 255.37 | 255.37 | 255.37 | 255.37 | 255.37 | 255.37 | 255.37 | 255.37 | 255.37 | 255.37 |

($\Delta x=0.3 m$, $\Delta t=0.3 hr$)

로 시간간격을 선정하면 초기시간을 제외하고는 收束性이 대단히 좋았다. 즉 앞의 完全陰函數方法에 比較해서 같은 空間增분에 대해서 큰 時間間隔의 선택이 可能性을 알 수 있다. 다만 交叉方向陰函數方法의 문제점으로 지적될 수 있는 것은 Table 2, 3에서 나타난 결과처럼 F값을 4 이상으로 하게 되면 첫 번째 시간간격의 경계면 바로 다음의 節點에서 현실적으로 不可能한 溫度가 나타났다는 점이다. 그러나 이같은 현상은 다음 시간 간격부터는 나타나지 않았으며, 收束性도 양호했다. Fig. 8~10은 크랭크-니콜슨 陰函數方法의 收束性 및 溫度振動 현상을 나타낸 것이다. Fig. 8, 9를 보면 알 수 있듯이 크랭크-니콜슨 陰函數方法은 交叉方向陰函數方法과 거의 유사한 收束性을 갖는 것을 알 수 있다. X값이 0.1인 경우는 F값이 1.4 이하로 되게, X값이 0.17인 경우는 0.4 이하로 空間增분의 선정이 이루어졌을 때 收束性이 좋음을 알 수 있다. Fig. 10은 다른 方法에서 찾아 볼 수 없는 크랭크-니콜슨 陰函數方法의 溫度振動 현상을 나타낸 것으로 數值計算結果 F

값이 1.4 이상인 경우는 예외없이 나타났는데, 이것은 時間間隔의 선정이 앞에서 규정된 값 이상으로

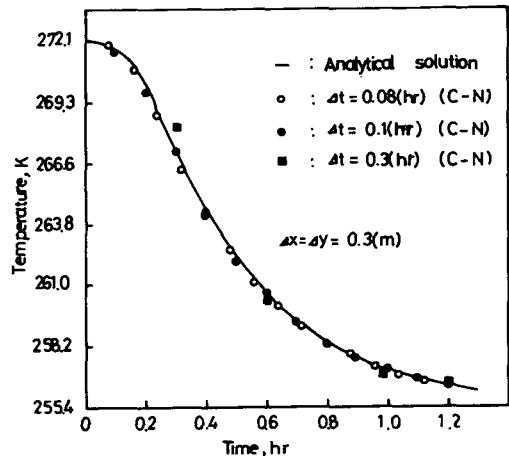


Fig. 8. Variation of centerpoint temperature boundary condition at various time step.

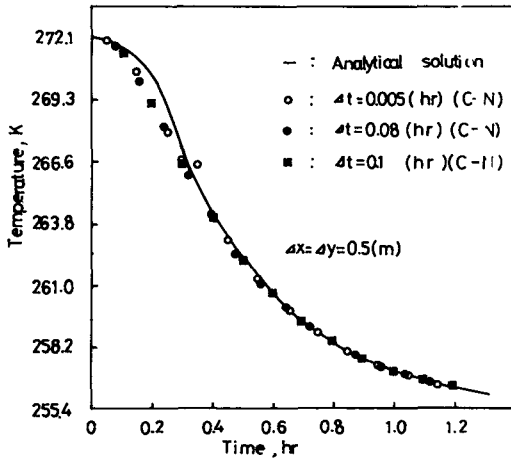


Fig. 9. Variation of centerpoint temperature of square long rod subjected to constant temperature boundary condition at various time step.

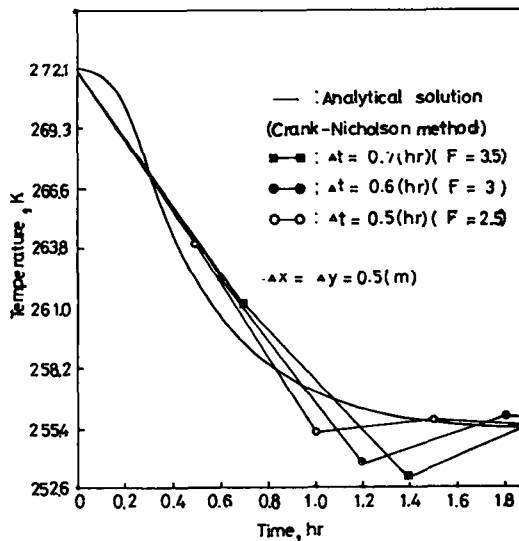


Fig. 10. A phenomenon of temperature oscillation occurring in the Crank-Nicholson implicit finite difference method when the space increment and time step by value having $F \geq 1.4$ were chosen.

되면 中間時間에서의 溫度는 無用한 값임을 말해주는 것이다.

이상에서 各 陰函數方法的의 收束性을 공간증분과 時間間隔의 關係에서 보았는데, 앞에서 규정한 값보다 더 작은 F 값을 적용하더라도 解의 收束性에는 거의 變化가 없었다. 따라서 解의 精度와 計算時間을 고려한 최적치가 존재한다고 생각된다.

一般的으로 過渡狀態熱傳導問題에서는 有限差分法이 有限要素法보다 計算時間面에서 우수하다는 것이 알려져 있는데,^{1,11)} 같은 時間間隔, 空間増分 조건에 대해서 살펴 보았을 때 完全陰函數方法을 제외한 交叉方向陰函數方法과 크랭크-니콜슨 陰函數方法이 四角柱要素에 의한 有限要素法에 비해 精度面에서도 좋았다.

2. 計算時間의 檢討

Table 4는 12개의 자기 다른 時間間隔과 空間増分에 대해서 有限差分法の 各 時間 間격當의 計算時間을 나타낸 것으로, 同一한 時間間隔, 空間増分の 條件下에서는 交叉方向陰函數方法이 計算時間面에서 가장 빨랐으며, 또한 同一한 無次元増分에서는 시간 간격에 관계없이 計算時間이 一定하였으므로, 결국 計算時間에 영향을 미치는 것은 空間増분인 것으로 생각되었다. 따라서 精度와 計算時間을 고려한 合理的인 條件으로는 無次元空間増分の 값이 0.1 일 때 F 값이 4.2 以下の 값으로 時間間隔이 선정될 때로 보아진다.

Table 4. Computer execution time in seconds for each time step

| Space and time increments | Fully implicit finite difference | Crank-Nicholson finite difference | Alternating-direction implicit method |
|--|----------------------------------|-----------------------------------|---------------------------------------|
| $\Delta t = 0.1$ (hr) $\Delta x = 0.3$ (m) | 185 | 151 | 40 |
| $\Delta t = 0.1$ $\Delta x = 0.5$ | 24 | 24 | 12 |
| $\Delta t = 0.3$ $\Delta x = 0.3$ | 338 | 293 | 40 |
| $\Delta t = 0.08$ $\Delta x = 0.3$ | 162 | 133 | 40 |
| $\Delta t = 0.08$ $\Delta x = 0.5$ | 23 | 23 | 12 |
| $\Delta t = 0.05$ $\Delta x = 0.3$ | 117 | 107 | 40 |
| $\Delta t = 0.05$ $\Delta x = 0.5$ | 20 | 20 | 12 |
| $\Delta t = 0.03$ $\Delta x = 0.3$ | 86 | 79 | 40 |
| $\Delta t = 0.01$ $\Delta x = 0.3$ | 49 | 53 | 40 |
| $\Delta t = 0.008$ $\Delta x = 0.5$ | 11 | 12 | 12 |
| $\Delta t = 0.005$ $\Delta x = 0.5$ | 8 | 11 | 12 |
| $\Delta t = 0.001$ $\Delta x = 0.5$ | 5 | 9 | 12 |

完全陰函數方法과 크랭크-니콜슨 陰函數方法的의 경우는 固定된 空間増분에 대해서 時間間隔의 變動에 따라 計算時間의 差가 컸다. 無次元空間増분이 0.1 인 경우는 크랭크-니콜슨 陰函數方法이 完全陰函數方法에 비해 計算時間이 빨랐으나, 無次元空間増분이 0.17 인 경우는 完全陰函數方法이 計算時間面에서 빠른 양상을 보였다. 精度와 計算時間面에서

보게 되면 完全陰函數方法의 경우는 無次元空間增분이 0.17 이고 F 값이 0.005 이하로 되게 時間間隔을 선정하면 가장 좋으며, 크랭크-니콜슨-陰函數方法의 경우는, 無次元空間增분을 0.1로 F 값을 1.4 근방에서 선정하면 좋다고 보아진다.

3. 檢 證

이상의 結果를 一般化 시키기 위해서 無次元空間增분은 0.1로서 같으나, 解領域은 2.5 m, 5 m로 되는 가상매체에 이 結果值를 적용시켜 보았다. Fig. 11은 그 結果를 나타낸 것으로서 解析解에 대한 양호한 收束性을 보여주었다. 따라서 앞의 수치 計算 結果는 다른 解領域에 대해서도 적용시킬 수 있을 것으로 생각된다.

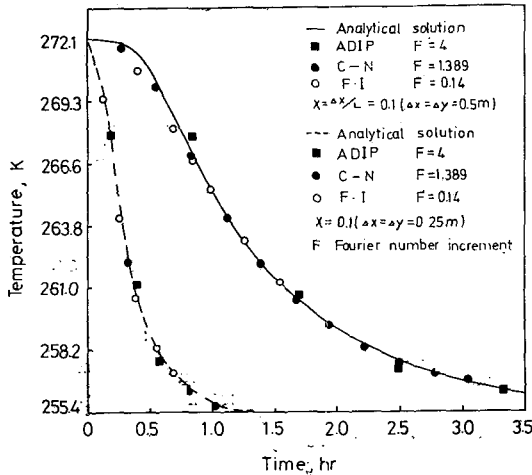


Fig. 11. Temperature vs. time.

結 論

二次元過渡熱傳導에 대한 陰函數型有限差分法의 精度에 미치는 空間增분과 時間間隔의 影響에 대해서 數值計算을 행한 結果 다음과 같은 結論을 얻었다.

1. 交叉方向陰函數方法과 크랭크-니콜슨 陰函數方法은 比較的 空間增분과 時間間隔의 影響을 均 받았으나, 完全陰函數方法은 그 影響이 컸다.
2. 二次元問題에서 空間增분과 時間間隔을 영에 가깝게 설정하는 것은 精度와 計算時間을 고려하면 不合理하다.
3. 解의 精度 및 計算時間을 고려한 合理的인 空間增분 및 時間間隔은 交叉方向陰函數方法의 경우,

X 값과 F 값이 0.1에서 4.2 이하로 크랭크-니콜슨 陰函數 方法은 0.1과 1.5 근방에서, 그리고 完全陰函數方法에서는 0.17과 0.005에서 였다.

文 獻

1. Trent, D.S. and J.R. Welty. 1974. A summary of numerical methods for solving transient heat conduction problems. Bull. No. 49, Engng. Exp. Stn., Oregon State Univ., Oct., 1974.
2. Bruch, J.C. and G. Zyzoloski. 1974. Transient two-dimensional heat conduction problems solved by the finite element method. Int. J. Num. Meth. Engng., 8, 481-494.
3. Barakat, H.Z. and J.A. Clark. 1966. On the solution of the solution of the diffusion equations by numerical methods. J. Heat Transfer. Trans. ASME, Nov., 421-427.
4. Wood, W.L. and R.W. Lewis. 1975. A comparison of time marching schemes for the transient heat conduction equation. Int. J. Num. Meth. Engng. 9, 679-689.
5. Zienkiewicz, O.C. and R.W. Lewis. 1973. An analysis of various time-stepping schemes for initial value problems. Earthquake Eng and Structural Dynamics 1, 407-408.
6. Bruch, J.C. and G. Zyzoloski. 1973. A finite element weighted residual solution to one-dimensional field problems. Int. J. Num. Meth. Engng., 6, 577-585.
7. Carnahan, B., H.A. Luther and J.O. Wilkes. 1969. Applied Numerical Methods. John Wiley and Sons 440-464.
8. Alan Adams, J. and D.F. Rogers. 1973. Computer aided heat transfer analysis. McGraw-Hill, 219-226.
9. Myers, G.E. 1971. Analytical methods in conduction heat transfer. McGraw-Hill, 263-293.
10. Petukhou, B.S. 1982. The problem and the future development of heat-transfer theory. Thermal Engng. March, 114.
11. Emery, A.F. and W.W. Carson. 1971. An evaluation of the use of the finite-element method in the computation of temperature. J. Heat Transfer, Trans. ASME, May, 136-144.
12. Suhas V. P. 1980. Numerical heat transfer and fluid flow. McGraw-Hill, 54-74.