

# 擬似變數法에 의한 有限次元 構造物의 設計敏感度 解析 및 最適化에 관한 研究

Design Sensitivity Analysis and Optimization of Finite Dimensional  
Structures by Adjoint Variable Method

徐	官	世*
Suh,	Kwan	Se
邊	根	周**
Byun,	Keun	Joo

---

## Abstract

This paper deals with the adjoint variable method in design sensitivity analysis that is essential to the structure optimization. The method is shown to be much simpler than the conventional method in structure optimization by applying it to the optimal design of finite dimensional structures.

Design sensitivity analyses and their numerical solutions for the principal constraints, i.e., displacement and stress constraints under static loads are obtained. Furthermore, it is proved that optimization can be carried out efficiently by applying the optimization algorithm.

Structure optimization problems of minimizing the volumes of the truss structures(finite dimensional structures) under the appropriate boundary conditions, loading conditions and constraints are considered.

---

## 要 旨

본 연구에서는 구조물 최적 설계시 필수적인 설계민감도 해석을 의사변분법을 도입하여 유한차원 구조물에 적용함으로써 구조물 최적설계를 기존의 방법보다 훨씬 간편하게 할 수 있음을 보인다.

정하중하에서 제약조건의 주종을 이루고 있는 변위 및 응력의 제약조건에 대하여 설계민감도 해석 및 그 수치해를 구하며 나아가 최적화 알고리즘을 사용하여 최적설계가 효율적으로 수행됨을 입증한다.

유한차원 구조물인 트러스의 적당한 경계조건, 하중조건 및 제약조건하에서 구조물의 무게를 최소화 시키는 최적설계 문제를 고려한다.

---

\*正會員 · 陸軍士官學校 副教授, 土木工程科

\*\*正會員 · 延世大學校 工科大學 教授, 土木工程科

# 1. 서 론

지난 수십년 동안 구조물 最適設計는 괄목할 만한 발전을 거듭해 왔고 (11-12) 70년대 많이 사용된 간접적인 방법인 最適性 基準法(optimality criteria method)보다는 그 기원은 훨씬 오래되었으나, 유용한 수치적 방법의 缺如로 발전이 부진하였던 직접적 방법인 數學的 計劃技法(mathematical programming method)이 유한요소법과 같은 수치적 방법의 등장으로 오늘날 구조물의 최적설계를 더욱 가속화 시키고 있으며, 형상이 복잡하거나 제약조건이 까다로운 구조물의 최적화 문제를 비교적 광범위하게 다룰 수 있게 되었다(13,14).

구조물 최적설계는 주어진 제약조건을 모두 만족 시키면서 건설경비를 극소화 하거나 구조물의 기능을 극대화하는 것이 설계의 기본 목표로서, 모든 구조물의 목적함수나 제약조건을 설계변수의 직접함수로 표시할 수 있는 경우의 최적화는 현존하는 최적화 알고리즘을 사용하여 비교적 용이하게 최적해를 구할 수 있다. 지금까지의 대부분의 구조물 최적설계는 이렇듯 목적함수나 제약조건을 가능한 설계변수의 직접함수로 표시하도록 노력하였고 그것이 가능한 문제들을 주로 설계하여 왔다.

대부분 구조물의 반응을 나타내는 변위나 응력 또는 고유 진동수와 같은 제약조건은 설계변수의 직접함수로 나타낼 수 없는 경우가 있고, 이러한 문제의 해결을 위해 최적화 알고리즘에 필요한 設計敏感度의 解析(design sensitivity analysis)이 오늘날 구조물 최적설계의 큰 난제로 대두되고 있는 실정이다. 외력에 대한 구조 반응의 해석, 고유 진동수 및 좌굴하중의 해석 등에 관해서는 많은 이론과 계산방법이 있지만, 구조물의 설계변수 변화에 따른 구조물 제약조건 변화 분석하는 設計敏感度 解析을 위한 연구는 아직까지도 미흡한 상태이다.

이의 해결 방법으로 지금까지는 설계변수 변화에 따른 敏感度 해석을 有限差分法(finite difference method)이나 再解析法(reanalysis method)을 사용하여 왔으나, 해석적인 민감도

공식을 유도하지 않았기 때문에 실제로는 민감도 수치 결과의 부정확을 초래하고 나아가 최적화를 어렵게 만드는 원인이 되기도 하였다.

따라서 본 연구의 주요 목표는 트러스와 같은 有限次元 構造物(finite dimensional structure)의 최적설계를 위한 設計敏感度 解析을 위하여 在來式的 매트릭스 구조해법이나 유한요소법에 擬似變數 方法(adjoint variable method)을 적용하여 敏感度 解析의 간편성과 효율성을 제시하고자 한다.

이상과 같이 設計敏感度 解析이 끝나면 최적화 알고리즘인 傾斜投影法(gradient projection method)를 사용하여 최적해를 구하게 된다. 이를 특징의 有限次元 構造物인 10-부재 트러스 구조물의 모형에 적용하여 최적화 한다.

## 2. 設計敏感度 解析

有限次元 構造物(finite dimensional structure)의 특정한 函數(目的函數나 制限條件 函數)에 대한 설계민감도 解析을 실시한다. 구조물의 變分 方程式을 소개하고, 이를 실제 구조물의 민감도 해석에 사용한다. 이 章을 통해 에너지 雙線型 形式(bilinear form)은 항상 正의 값을 갖는다는 조건을 만족하고, 에너지 雙線型 形式이나 線型荷重項은 設計變數에 대해 미분이 가능하다고 가정한다. 有限次元 構造物에서 정의된 특정한 函數에 대한 민감도 해석을 위해 直接微分方法(direct differentiation method)과 擬似變數方法(adjoint variable method)을 소개한다.

### 2.1 構造物에 대한 變分方程式

설계민감도 해석을 위해 구조물의 고유 특성을 나타내는 변분 방정식을 어떤 통일된 기법으로 공식화 시키면, 이는 모든 구조물의 설계 민감도 해석 시 크게 유용하게 사용된다.

유한차원 구조물에 대한 행렬 방정식은 식(2-1)과 같다.

$$K(b)z = F(b) \dots\dots\dots(2-1)$$

여기서  $z$ ,  $K(b)$  및  $F(b)$ 는 각각 변위, 축소형 전체 강성 매트릭스(reduced global stiffness matrix) 및 수정된 하중벡터이다.  $K(b)$ 와  $F(b)$ 는 모두 다 설계변수에 의존하게 된다.

공식(2-1)을 변분형태로 나타내면 식(2-2)와 같다.

$$a(z, \bar{z}) = \bar{z}^T K(b) z = \bar{z}^T F(b) = f(\bar{z}) \dots (2-2)$$

식(2-2)는 모든 임의의 가상변위  $\bar{z}$ 의 영역에서 성립되며 여기서  $a(z, \bar{z})$ 는 雙線型 에너지항이고,  $f(\bar{z})$ 는 선형 하중항이다.

### 2.2 有限次元 構造物에 대한 設計感度 解析

대부분의 구조물 설계에 있어서 당면한 문제는 제한 조건인 응력 및 변위 등을 만족 시키면서 목적함수를 어떻게 최소화 하느냐에 있다. 혹 경우에 따라서는 목적함수를 최대화 시킬 경우도 있지만 이때는 간단히 수식의 부호만을 바꾸어 줌으로써 해결된다. 이와 같은 구조물의 반응을 나타내는 일반적인 제약함수를 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$\psi = \psi(b, z(b)) \dots (2-3)$$

여기서  $b$ 는 설계변수를 나타내며,  $z(b)$ 는 설계변수에 의존하는 변위함수이다. 설계변수를 내포하고 있는 일반함수는 크게 두가지 형태로 대별된다. 첫째는 설계변수의 직접함수로 표시되는 경우이고, 둘째는 상태 방정식의 解  $z$ 를 통해서 간접적으로 표시되는 경우이다. 설계 민감도 해석의 목적은 설계변수에 대한 이와 같은 제약함수들의 도함수를 구하는 것이다. 매트릭스 형태로 주어진 식(2-1)은 설계변수  $b$ 에 대하여 축소형 전체 강성 매트릭스  $K(b)$ 가 非特異解이므로 그 역이 구해진다. 축소형 전체 강성 매트릭스  $K(b)$ 와 하중항  $F(b)$ 의 모든 구성요소는 설계변수에 대하여 연속 미분이 가능하다. 陰函數定理(implicit function theorem)에 의하면 방정식(2-1)의 해  $Z(b)$ 도 설계변수에 대해 또한 연속적으로 미분할 수 있다<sup>(16)</sup>. 설계변수에 대한 제약함수인 식(2-3)의 도함수를 구하기 위하여 다음절에서는 직접 미분법과 의사변수 방법을 논한다.

#### 1) 直接 微分法(direct differentiation method)

미분에 대한 連鎖規定(chain rule)을 도입시켜 식(2-3)의 제약함수를 설계변수  $b$ 에 관하여 편미분 하면

$$\frac{d\psi}{db} = \frac{\partial\psi}{\partial b} + \frac{\partial\psi}{\partial z} \cdot \frac{dz}{db} \dots (2-4)$$

(또한 식(2-1)의 양변을 설계변수  $b$ 에 관하여

편미분하면

$$K(b) \frac{dz}{db} = - \frac{\partial}{\partial b} (K(b)\bar{z}) + \frac{\partial F(b)}{\partial b} \dots (2-5)$$

여기서  $\bar{z}$ 는 편미분사 상수로 취급되는 변수임을 의미한다. 강성 매트릭스  $K(b)$ 는 그 역이 존재하므로 방정식(2-5)를  $dz/db$ 에 대하여 풀면

$$\frac{dz}{db} = K^{-1}(b) \left[ - \frac{\partial F(b)}{\partial b} - \frac{\partial}{\partial b} (K(b)\bar{z}) \right] \dots (2-6)$$

식(2-6)의 결과를 식(2-4)에 대입하면 다음을 얻는다.

$$\frac{d\psi}{db} = \frac{\partial\psi}{\partial b} + \frac{\partial\psi}{\partial z} K^{-1}(b) \left[ - \frac{\partial F(b)}{\partial b} - \frac{\partial}{\partial b} (K(b)\bar{z}) \right] \dots (2-7)$$

방정식(2-7)은 설계변수  $b$ 에 대한 제약함수의 도함수를 나타내지만 이는 실용적이 되지 못한다. 그 이유는 강성 매트릭스 속에 미지수인 설계변수를 포함하고 있는데 미지수를 포함한 逆 강성 매트릭스인  $K^{-1}(b)$ 를 구한다고 하는 것이 실제의 계산 과정에서는 매우 비능률적이기 때문이다. 따라서 다음과 같은 기법을 이용하게 된다.

먼저, 식(2-5)를 수치적인 방법으로  $dz/db$ 에 대하여 풀 다음 이 결과를 식(2-4)에 대입시켜 소정의 결과를 얻는 방법이다. 이와 같은 기법을 통상 직접 미분법이라고 부르는데 이 방법은 구조물의 최적화를 구하는데 널리 사용되어 왔다.

#### 2) 擬似 變數法(adjoint variable method)

이 방법에서는 의사 변수  $\lambda$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\lambda = \left[ \frac{\partial\psi}{\partial z} K^{-1}(b) \right]^T = K^{-1}(b) \frac{\partial\psi}{\partial z}^T \dots (2-8)$$

여기서도 강성 매트릭스  $K$ 는 대칭이다. 역매트릭스  $K^{-1}(b)$ 를 포함하고 있는 식(2-8)로부터 직접 의사 변수  $\lambda$ 를 구하는 대신 식(2-8)의 양변에 매트릭스  $K(b)$ 를 곱하여 준다. 그러면 의사변수  $\lambda$ 를 포함하고 있는 다음과 같은 의사변수 방정식을 얻는다.

$$K(b)\lambda = \frac{\partial \psi}{\partial x} \dots (2-9)$$

식 (2-9)를 의사변수  $\lambda$ 에 대하여 풀 후 이 결과를 방정식 (2-7)에 대입하면

$$\frac{d\psi}{db} = \frac{\partial \psi}{\partial b} + \lambda^T \left[ \frac{\partial F(b)}{\partial b} - \frac{\partial}{\partial b} (K(b)\varepsilon) \right] \dots (2-10)$$

식 (2-10)을 보다 더 편리하게 미분하기 위하여 다음과 같이 나타낸다.

$$\frac{d\psi}{db} = \frac{\partial \psi}{\partial b} + \frac{\partial}{\partial b} [\lambda^T F(b) - \lambda^T K(b)\varepsilon] \dots (2-11)$$

이와 같은 접근법을 設計 敏感度 解析時 擬似 變數 방법이라 한다. 이는 최적설계시 설계민감도의 역할을 담당한다. 즉 傾斜投影法의 최적화 알고리즘 단계 3)에 식(2-11)의 결과를 적용하여, 설계민감도 해석을 수행함으로써 형성된 최적화 문제의 최적화 가능성을 분석한다.

### 3. 最適化 알고리즘

목적함수나 제약조건 같은 구조물의 반응을 나타내는 함수의 설계변수 변화에 따른 민감도를 구하는 것은 구조물 최적설계시 결정적인 요인이 된다. 앞章에서와 같이 일단 설계 민감도 해석이 가능하면 그 민감도의 정보로서 최적화의 수렴 속도가 빠르고 안정된 非線型 計劃技法 중의 하나인 傾斜投影法을 사용하는 것이 바람직하다.

이 장에서는 이 傾斜投影法 알고리즘을 소개한다. 非線型計劃技法인 傾斜投影法은 等次 및 非等次 제약조건을 받으며 목적함수인 가격함수(cost function)를 최소화 시킬 목적으로 사용되는 보편적인 非線型計劃技法이다. 이 기법을 사용하기 위해서는 주어진 문제에 대하여 목적함수인 가격함수와 제약함수를 정의한 후 그의 설계변수에 대한 도함수를 구해야 한다. 非線型計劃 문제(nonlinear programming method)를 다루기 위하여 다음을 정의한다.

목적함수인 가격함수는

$$\psi_0(\vec{b}) \dots (3-1)$$

等次 制約條件은

$$\psi_j(\vec{b}) = 0, \quad j=1, 2, \dots, p \dots (3-2)$$

非等次 制約條件은

$$\psi_{p+i}(\vec{b}) \leq 0, \quad i=1, 2, \dots, m \dots (3-3)$$

최적화에 대한 알고리즘 (16)을 요약하면 다음과 같다.

단계 1:  $\vec{b}^0$ 를 최초의 설계변수로 취한다.

단계 2: 제약조건값을 계산한 후 아래와 같은 벡터를 形成한다.

$$\vec{\psi}(b) = [\psi_i(\vec{b})],$$

여기서  $\psi_i, i=1, \dots, p$ , 그리고  $\psi_{p+i}$ 는 다음 조건을 만족하는 제약조건식이다. 즉  $\psi_{p+i}(\vec{b}) \geq -\varepsilon$ .  $\varepsilon$ 는 임의의 작은 상수이다.

단계 3: 방정식 (3-4)~(3-6)으로부터  $\lambda^0, \bar{\varepsilon}, \Delta\vec{\psi}$ 를 구한다.

$$\frac{\partial \psi_0(\vec{b}^0)}{\partial \vec{b}} = \lambda^{0T} \dots (3-4)$$

$$\frac{\partial \vec{\psi}(\vec{b}^0)}{\partial \vec{b}} = \bar{\varepsilon}^T \dots (3-5)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta\psi_j = -\psi_j(\vec{b}^0), \quad j=1, \dots, p \\ \Delta\psi_{p+i} = -\psi_{p+i}(\vec{b}^0) \end{bmatrix} = \Delta\vec{\psi} \dots (3-6)$$

식 (3-6)에서  $i$ 는 다음 조건을 만족해야 한다.

$$\psi_{p+i}(\vec{b}^0) > -\varepsilon$$

단계 4: 식 (3-7)과 (3-8)로부터 벡터  $M_{\psi\psi_0}$ 와 매트릭스  $M_{\psi\psi}$ 를 계산한다.

$$M_{\psi\psi_0} = \bar{\varepsilon}^T W^{-1} \lambda^0 \dots (3-7)$$

$$M_{\psi\psi} = \bar{\varepsilon}^T W^{-1} \bar{\varepsilon} \dots (3-8)$$

여기서  $W$ 는 설계변수에 대한 변환 매트릭스(weighting matrix)이다.

단계 5: 식 (3-9)로부터 변수  $\gamma$ 를 구한다.

$$\gamma = \frac{\lambda^{0T} W^{-1} \lambda^0}{2\beta \psi_0(\vec{b}^0)} \dots (3-9)$$

여기서  $\gamma$ 는 반복 설계시 각 단계변화의 크기를 좌우하는 변수이며,  $\beta$ 는 목적함수를 감소시키는 減小係數이다.

단계 6: 식 (3-10)으로부터  $\vec{\mu}^1$ 와  $\vec{\mu}^2$ 를 구한다.

$$M_{\psi\psi} \vec{\mu}^1 = -M_{\psi\psi_0} \dots (3-10)$$

$$M_{\psi\psi} \vec{\mu}^2 = -\Delta\vec{\psi}$$

또한 식 (3-11)로부터 Lagrange 係數  $\vec{\mu}$ 를 구한다.

$$\vec{\mu} = \vec{\mu}^1 + 2\gamma \vec{\mu}^2 \dots (3-11)$$

만약 제약함수  $\psi_i(b^0) \geq -\varepsilon$ 에 상응되는 Lagrange 계수가 음수라면 이 제약함수  $\psi_i$ 를  $\tilde{\psi}$ 로부터 제거한 후 단계 3으로 되돌아 간다. 그렇지 않으면 다음 단계로 넘어간다.

단계 7: 식 (3-12)로부터  $\delta b^1$ 과  $\delta b^2$ 를 구한다.

$$\delta b^1 = W^{-1}[\bar{p}^0 + \bar{\varepsilon}\bar{\mu}^1] \dots\dots\dots (3-12)$$

$$\delta b^2 = -W^{-1}\bar{\mu}^2$$

단계 8: 식 (3-13)으로부터  $\delta b$ 를 구한다.

$$\delta b = -\frac{1}{2r}\delta b^1 + \delta b^2 \dots\dots\dots (3-13)$$

단계 9: 식 (3-14)를 사용하여 최초설계치를 수정한다.

$$\bar{b}^1 = \bar{b}^0 + \delta b \dots\dots\dots (3-14)$$

단계 10: 만약 모든 제약조건이 허용된 값 내에서 만족되고, 또한 식 (3-15)를 만족시킨다면 모든 과정은 종결된다. 그렇지 않으면 새로운 설계변수  $\bar{b}^1$ 를 가지고 단계 2로 되돌아 간다.

$$\|\delta b^1\| = \left[ \sum_{i=1}^n W_i (\delta b^1)_i^2 \right]^{1/2} \leq \delta \dots\dots\dots (3-15)$$

여기서  $\delta$ 는 허용된 특정치이다.

#### 4. 適應 및 考察

그림 4.1에 표시된 10-部材 캔틸레버 트러스를 고려한다. 그림에서 보는 바와 같이 좌단 2점이 고정되어 있고 하단 두 절점에서 집중하중을 받고 있다. 이 문제의 설계변수는 각 트러스 부재의 단면적이고 상태변수는 각 절점에서의 X 및 Y 방향 변위이다.

##### 4.1 최적설계 문제에 대한 공식화

실제과정에서 목적함수(가격함수)를 쏘구조물의 무게로 한다.

$$\psi_0 = \sum_{i=1}^n \rho_i L_i b_i \dots\dots\dots (4-1)$$

여기에서  $\rho_i, L_i, b_i$ 는 각각  $i$ 번째 부재에 대한 재료의 비중, 길이, 단면적을 나타낸다.

##### 1) 변위에 대한 제약조건

입의의 점에 대한 변위의 제약을 다음의 함수

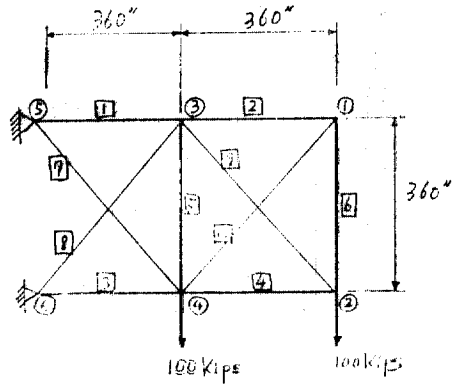


그림 4.1 一端이 固定된 트러스 구조물

로서 정의한다.

$$\psi_1 = |z_i| - z^a \leq 0, \quad i=1, \dots, n \dots\dots\dots (4-2)$$

여기서  $z_i$ 는  $i$ 번째 절점의 변위이고,  $z^a$ 는 허용치이다.

##### 2) 응력에 대한 제약조건

응력에 대한 제약조건을 다음의 함수로서 정의한다.

$$\psi_2 = |\sigma_j| - \sigma^a \leq 0, \quad j=1, \dots, m \dots\dots\dots (4-3)$$

여기서  $\sigma_j$ 는  $j$ 번째 部材의 응력이고,  $\sigma^a$ 는 허용응력이다. 부재의 응력은 변위의 향으로 표시될 수 있다.

##### 3) 설계변수의 한계

각 트러스 부재의 단면적들은 정해진 범위 내의 값이어야 한다. 즉,

$$A_l \leq A_i \leq A_u \dots\dots\dots (4-4)$$

여기서  $l$ 과  $u$ 는 각각의 하한치와 상한치를 나타낸다.

#### 4.2 設計敏感度 解析

주어진 문제에 대해서는 제 2장의 설계 민감도 해석 결과를 직접 도입함으로써 설계 민감도에 대한 공식을 얻을 수 있다.

목적함수인 식 (4-1)에 대한 설계 도함수는 다음과 같이 직접 구하여 진다.

$$\psi_0^1 = \rho_i L_i \dots\dots\dots (4-5)$$

변위 제약조건인 식 (4-2)의 설계 민감도를 구하기 위해서 식 (2-9)의 의사변수 방정식을 얻기 위하여 정의된 식 (2-8)의 의사변수를 사용한다.

고로

$$K(b)\lambda = \frac{\partial \psi_1^T}{\partial z} \dots\dots\dots (4-6)$$

식(4-6)은 변위가  $\lambda$ 이고 일반화된 작용하중 벡터가  $\frac{\partial \psi_1^T}{\partial z}$  인 구조 방정식과 똑같다. 2章에서 적용된 절차를 반복하면 최종 민감도 항은

$$\psi_1^1 = -\frac{\partial}{\partial b} [\lambda^T K(b) \varepsilon] \dots\dots\dots (4-7)$$

응력 제약조건인 식(4-3)의 설계 민감도 해석을 위하여 다음과 같은 의사변수 방정식을 정의한다.

$$K(b)\lambda = \frac{\partial \psi_2^T}{\partial z} \dots\dots\dots (4-8)$$

앞에서 언급한 바와 마찬가지로 식(4-8)은 일반화된 작용하중 벡터로 인한 변위  $\lambda$ 에 대한 구조 방정식과 똑같다. 변위제약 조건식에서의 같이 다음의 설계 민감도 공식을 얻는다.

$$\psi_2^1 = -\frac{\partial}{\partial b} [\lambda^T K(b) \varepsilon] \dots\dots\dots (4-9)$$

설계변수 한계식인 식(4-4)의 설계 민감도 계산은 간단하다.

### 4.3 計算結果 및 討論

그림 4.1에 나타난 자료외에 사용된 입력자료는 다음과 같다. 설계변수  $b_i = 20.0 \text{ in.}$ ,  $i=1 \sim 10$  이고 탄성계수  $E = 10^4 \text{ ksi}$  이다. 표 4.1은 설계민감도의 정확도를 나타내는 것으로  $\psi^1$ 은 최초설계시 제약조건값을 나타내고,  $\psi^2$ 는 전체 설계변수를 5% 일률적으로 변화시킨 후 얻은 제약조건값이다. 따라서  $\Delta\psi$ 는  $\psi^2$ 와  $\psi^1$ 의 변화량을 나타내고,  $\delta\psi$ 는 민감도 공식 식(2-11), 식(4-7) 및 식(4-9)에서 계산된 설계민감도의 예상치이다. 마지막 항의  $(\delta\psi/\Delta\psi) \times 100$ 은 실제 변화량과 예상치와의 일치 정도를 백분율로 표시한 것이다. 표에서 알 수 있듯이 예상치는 실제 변화량과 잘 일치하며 이로써 본 연구에서 유도한 의사변수법의 설계민감도 공식 식(2-11)은 이론적인 타당성이 입증되었고, 다음 단계에서 최

표 4.1 10-부재 트러스 구조물의 설계민감도 비교

제 약 조 건		$\psi^1$	$\psi^2$	$\Delta\psi = \psi^2 - \psi^1$	$\delta\psi$	$\frac{\delta\psi}{\Delta\psi} \times 100$	
변위 (in)	절점 1	x 방향	0.4238	0.4036	-0.0202	-0.0202	100.0
		y 방향	1.8975	1.8072	-0.0903	-0.0903	100.0
	절점 2	x 방향	0.4762	0.4534	-0.0228	-0.0227	99.6
		y 방향	1.9697	1.8759	-0.0938	-0.0938	100.0
	절점 3	x 방향	0.3516	0.3350	-0.0166	-0.0167	100.6
		y 방향	0.8372	0.7974	-0.0398	-0.0398	100.0
	절점 4	x 방향	0.3684	0.3508	-0.0176	-0.0175	99.4
		y 방향	0.9010	0.8502	-0.0428	-0.0429	100.2
응력 (psi)	부재	1	9767.5	9302.5	-465.0	-465.15	100.0
		2	2005.0	1910.0	-95.0	-95.53	100.5
		3	10232.5	9745.0	-487.5	-487.23	99.9
		4	2995.0	2850.0	-145.0	-142.56	98.3
		5	1775.0	1690.0	-85.0	-84.50	99.4
		6	2005.0	1910.0	-95.0	-95.53	100.5
		7	7417.5	7065.0	-352.5	-352.33	99.9
		8	6725.0	6405.0	-320.0	-321.10	100.3
		9	4275.0	4070.0	-205.0	-201.61	98.3
		10	2802.5	2670.0	-132.5	-135.11	101.9

표 4.2 10-부재 트러스 구조물의 최적설계 결과

설계변수	초기치 (in <sup>3</sup> .)	최적설계 (in <sup>3</sup> .)	설계변수	초기치 (in <sup>3</sup> .)	최적설계 (in <sup>3</sup> .)
$b_1$	20.0	30.06	$b_6$	20.0	0.10
$b_2$	20.0	0.10	$b_7$	20.0	7.42
$b_3$	20.0	22.97	$b_8$	20.0	20.76
$b_4$	20.0	15.40	$b_9$	20.0	21.78
$b_5$	20.0	0.10	$b_{10}$	20.0	0.10

표 4.3 10-부재 트러스 구조물의 목적함수 변천과정

반복횟수	목적함수 (in <sup>3</sup> )	반복횟수	목적함수 (in <sup>3</sup> )
1	0.8393D+04	16	0.4518D+04
2	0.6714D+04	17	0.4911D+04
3	0.6772D+04	18	0.5019D+04
4	0.6709D+04	19	0.5024D+04
5	0.6471D+04	20	0.5024D+04
6	0.6238D+04	21	0.5023D+04
7	0.6006D+04	22	0.5023D+04
8	0.5765D+04	23	0.5023D+04
9	0.5699D+04	24	0.5023D+04
10	0.5620D+04	25	0.5023D+04
11	0.5530D+04	26	0.5023D+04
12	0.5420D+04	27	0.5023D+04
13	0.5265D+04	28	0.5023D+04
14	0.5147D+04	29	0.5023D+04
15	0.4528D+04		

적화 알고리즘을 사용하여 최적설계를 할 수 있음을 시사한다.

민감도 수치해석 결과 만족할 만한 값을 얻었으므로 최적화 알고리즘인 Gradient Projection Method를 사용하여 주어진 제약조건하에서 전 구조물의 재료를 최소화 시키는 최적 설계변수를 찾는다. 최초 설계변수는 표 4.1을 얻기 위해 사용된 값과 동일하며 설계변수 하한치  $b_i^l = 0.10 \text{ in.}$ , 이며 상한치  $b_i^u = 35.0 \text{ in.}$  로써 하첨자  $i=1\sim 10$  이다.

변위에 대한 제약조건식의 한계값  $\alpha^e = 2.0 \text{ in.}$  이고 응력에 대한 제약조건식의 한계값  $\sigma^e = 25,000 \text{ psi}$  이다.

표 4.2는 주어진 문제의 최적설계를 나타내고, 표 4.3은 목적함수 값이 변하는 과정을 표시하고 있다. 표 4.3에서 보는 바와 같이 29회의 반복 설계 후 목적함수 값은  $8,393 \text{ in}^3$ 에서

$5,023 \text{ in}^3$ 으로 40.1%의 감소가 있음을 알 수 있다.

표 4.2의 최적설계치를 얻는 과정에서 변위 제약 조건인 경우 결점 2 및 1의 순으로  $y$  방향의 변위가 상대적으로 크므로 이의 조정이 최적설계에 결정적인 영향을 미치며, 응력제약 조건인 경우 부재 3, 1, 7의 순으로 크기에 있어 지배적이므로 이의 조정이 역시 최적설계에 결정적인 영향을 미치게 됨을 알 수 있었다. 최적설계 결과 이 모든 제약조건을 만족시키는 설계변수의 분포는 표 4.2에서 보는 바와 같이 부재 1 및 3 단면의 증가이며 부재 2, 5, 6, 10은 현저한 단면의 감소를 가져옴을 알 수 있다.

## 5. 結 論

유한차원 구조물의 설계민감도 해석과 최적화를 통해 이론의 타당성과 효율성이 입증됨을 알 수 있었다. 다만 이론의 유용성을 뒷받침하기 위한 수치적 방법의 선정만이 문제이며, 가장 훌륭한 수치적 방법으로 간주되고 있는 유한요소법을 사용할 경우 만족할 만한 결과를 얻을 수 있다.

특히 구조물의 상태변수에 직접 관계가 되는 변위 제약조건에 대한 설계민감도는 매우 정확한데 반하여 상태변수에 간접적으로 관계되는 응력의 제약조건에 대한 설계민감도는 다소 떨어지는 형편이다.

결론적으로 정하중 상태하의 유한차원 구조물의 최적설계는 설계민감도 해석시 의사변수법을 사용함으로써 최적화가 용이하게 됨을 알 수 있다.

## 참 고 문 헌

1. Maxwell, C., *Scientific Papers 11*, Cambridge University Press, 1890.
2. Cilley, F.H., "The Exact Design of Statically Indeterminate Frameworks, An Exposition of its Possibility, But Futility," *Trans. ASCE*, Vol. 42, 1900.
3. Michell, A.G.M., "The Limits of Economy of

- Material in Frame Structures," *Phil. Mag.* Series 6, Vol. 8, 1904, pp. 589~597.
4. Prager, W., "Linear Programming and Structural Design," Rand Report p-1123, 1957.
  5. Cox, H., *The Design of Structures of Least Weight*, Pergamon, Oxford, 1965.
  6. Hemp, W.S., *Optimum Structures*, Clarendon, Oxford, 1973, pp. 12~13.
  7. Moses, F., "Optimum Structural Design Using Mathematical Programming," *J. of the Structural Division, ASCE*, Vol. 90, No. ST6, December 1964, pp. 89~104.
  8. Reinschmidt, K.F., and Alan, D.R., "Linear Methods in Structural Optimization," Research Report R 70-41, The Department of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology, July 1970.
  9. Cornell, C.A., Reinschmidt, K.F., and Brotchie, J.F., "Structural Optimization," Research Report R 65-26, Cambridge, Mass., September 1965.
  10. Brotchie, J.F., Reinschmidt, K.F., and Cornell, C.A., "Iterative Design and Structural Optimization," *J. of the Structural Division, ASCE*, Vol. 92, No. ST6, December 1966, pp. 281~318.
  11. Schmit, L.A., "Structural Design by Systematic Synthesis," *Proc. of 2nd National Conf. on Electronic Computation, ASCE*, 1960, pp. 105~132.
  12. Prager, W., and Taylor, J.E., "Problems of Optimal Structural Design," *J. of Applied Mechanics*, Vol. 35, 1968, pp. 102~106.
  13. Lev, O.E., *Structural Optimization: Recent Developments and Applications*, ASCE, 1981, pp. 1~214.
  14. Haug, E.J., and Cea, J., *Optimization of Distributed Parameter Structures*, Sijthoff & Noordhoff, Alphen ann den Rijn, Netherlands, 1981.
  15. Haug, E.J., Choi, K.K., and Komkov, V., *Structural Design Sensitivity Analysis*, Academic Press, N.Y., to appear 1985.
  16. Haug, E.J., and Arora, J.S., *Applied optimal design*, John Wiley & Sons, Inc., N.Y., 1979.

(接受: 1985. 8. 8)