

# 平面 트리스 構造物의 形狀最適化에 관한 究研

## A Study on Shape Optimization of Plane Truss Structures

李	奎	遠*
Lee,	Gyu	won
邊	根	周**
Byun,	Keun	Joo
黃	鶴	周***
Hwang,	Hak	Joo

---

### Abstract

Formulation of the geometric optimization for truss structures based on the elasticity theory turn out to be the nonlinear programming problem which has to deal with the cross sectional area of the member and the coordinates of its nodes simultaneously.

A few techniques have been proposed and adopted for the analysis of this nonlinear programming problem for the time being.

These techniques, however, bear some limitations on truss shapes, loading conditions and design criteria for the practical application to real structures.

A generalized algorithm for the geometric optimization of the truss structures, which can eliminate the above mentioned limitations, is developed in this study.

The algorithm developed utilizes the two-phases technique.

In the first phase, the cross sectional area of the truss member is optimized by transforming the nonlinear problem into SUMT, and solving SUMT utilizing the modified Newton-Raphson method.

In the second phase, the geometric shape is optimized utilizing the unidirectional search technique of the Rosenbrock method which make it possible to minimize only the objective function.

The algorithm developed in this study is numerically tested for several truss structures with various shapes, loading conditions and design criteria, and compared with the results of the other algorithms to examine its applicability and stability.

The numerical comparisons show that the two-phases algorithm developed in this study is safely applicable to any design criteria, and the convergency rate is very fast and stable compared with other iteration methods for the geometric optimization of truss structures.

---

\*正會員 · 全北大學校 工科大學 教授, 土木工學科

\*\*正會員 · 延世大學校 工科大學 教授, 土木工學科

\*\*\*正會員 · 延世大學校 工科大學 教授, 土木工學科

## 要 旨

彈性理論에 의하여 트러스의 形狀最適化 問題를 形成하게 되면 部材의 斷面積과 節點의 座標를 동시에 考慮해야 하는 複雜한 非線形 計劃問題가 된다. 이런 非線形 計劃問題를 解析할 수 있도록 提示된 技法이 별로 없고 현재 使用하고 있는 技法들도 實際의 適用에 制限을 받는 경우가 많다.

그러므로 트러스의 形態, 載荷條件, 設計條件 등에 구애됨이 없이 트러스의 形狀을 最適化할 수 있는 一般 解析技法이 必要한 것이다.

이에 本研究에서는 全 解析過程을 two-phases 로 나누어 phase 1에서는 斷面을 最適化하고 phase 2에서는 트러스의 節點座標를 變數로 하여 形狀을 最適化하는 알고리즘을 開發한 것이다.

이 알고리즘의 phase 1에서 誘導된 非線形 計劃問題를 SUMT 問題로 變換시켜 Modified Newton-Raphson Method 에 의한 SUMT 法을 採擇하고 phase 2에서는 Rosenbrock Method 의 一方向 探索 技法에 의해 目的函數만이 最小가 되도록 하는 技法을 導入하여 最適化 알고리즘을 開發하였다. 開發된 알고리즘을 트러스의 形態, 設計制約條件, 載荷條件 등을 變化시켜 가면서 數種의 트러스에 適用하여 數值計算을 實施하고 그 結果를 다른 알고리즘의 結果와 正較하므로써 開發된 알고리즘의 妥當性 安定性 適用性을 檢討하였다.

研究 結果 開發된 이 two-phases 알고리즘은 트러스의 設計條件에 구애받지 않고 트러스의 形狀 最適化에 適用할 수 있으며 安定性있게 빠른 速度로 最適解에 收斂한다는 事實이 確認되었다.

이에 本 알고리즘을 트러스의 形狀最適化 알고리즘으로 새로이 提案하고 本 알고리즘이 트러스의 經濟的인 設計에 도움을 줄 수 있을 것으로 思料된다.

## 1. 序 論

### 1.1. 研究目的 및 範圍

1638년에 갈릴레오(Galileo)가 最初로 보의 強度에 對한 그의 關心을 發表한 以來 構造物의 最適設計는 工學者들에게 많은 關心의 對象이 되어 이에 關한 研究가 많이 進行되었다.

지금까지의 最適設計는 1950年代에 塑性理論에 依한 線形設計問題 1960年代 以後에는 彈性理論에 依한 非線形問題가 中心이 되어 主로 幾何學의 形狀이 固定된 鋼構造物의 最適化만 다루어 왔으며, 幾何學의 形狀을 考慮한 鋼構造物의 最適化를 取扱한 劃期的인 研究結果는 거의 찾아 볼 수 없다.

실제 文獻調查結果 發表된 幾何學의 形狀을 考慮한 鋼 構造物의 最適化에 對한 文獻은 極히 稀薄에 지나지 않으며 그나마도 70年代에 들어와서 發表된 것을 보면 幾何學의 形狀을 考慮한 鋼構造物의 最適設計는 아직도 初步段階에 있음을 알 수 있다. 그 理由는 幾何學의 形狀을 考

慮한 最適化는 幾何學의 形狀이 固定된 最適化 보다는 設計變數가 증가하고 節點座標를 設計變數로 取扱하는 形狀最適化 問題에서 그 變數의 값이 變함에 따라 部材의 斷面積도 變化하여 最適化 技法의 適用이 困難하기 때문으로 생각된다. 그러나 幾何學의 形狀을 考慮한 最適解가 幾何學의 形狀이 固定된 경우의 最適解보다도 重量 또는 體積을 더 감소시킬 수 있다는 事實을 지금까지의 研究結果로부터 알 수 있다. 따라서 幾何學의 形狀을 考慮한 鋼構造物의 最適設計理論과 效率의인 技法에 關한 研究가 시급히 要請되고 있는 實情이다.

많은 學者들에 의하여 開發된 트러스의 形狀 最適化 알고리즘을 大別하면 one-phase 알고리즘과 two-phases 의 알고리즘으로 나눌 수 있다.

two-phases 란 phase 1 과 phase 2 로 構成되어 있고 phase 1에서는 트러스 形狀을 固定시킨 狀態下에서 部材의 斷面을 最適化하고, phase 2에서는 트러스의 節點座標를 變數로 하여 形狀을 最適化하는 것이다.

이러한 two-phases 의 形狀最適化에 對하여 開

發된 종래의最適化 알고리즘은 대부분 適用時 各種 制限을 받는 경우가 많다.

이에 本 研究에서는 two-phases의 技法을 採擇하고, 一段階로 phase 1에서는 誘導된 非線形 計劃問題를 SUMT로 變化시켜 modified Newton Raphson method에 의한 SUMT法으로 斷面을最適化하고 phase 2에서는 Rosenbrock method의 一方向 探查에 의해 目的函數만이 最小가 되도록 트러스의 形狀最適化를 試圖한다.

트러스의 形狀最適化에 전혀 試圖된바 없는 以上の最適化 技法을 새로이 導入하고 이들을 實際의 트러스의 構造物의 形狀最適化에 適用해봄으로써 트러스의 形態, 載荷條件, 制約條件 등의 制限을 받지 않고 效率적으로 트러스의 最適 形狀을 얻을 수 있는 알고리즘을 誘導하는데 그 目的을 두고 있다.

한편 本 研究에서는 彈性理論에 의하여 鋼材 平面트러스의 形狀과 斷面을 同時에最適化하고 最小重量設計를 目的으로 하는 形狀最適化 알고리즘을 誘導提示하고 몇개의 數值例를 通하여 誘導된 알고리즘의 安定性, 效率性 및 適用性을 分析하는데 局限한다.

## 1.2. 本 研究의 關聯된 研究沿革

'50年代 말까지의 構造最適化에 관한 初期의 發展過程의 內容과 文獻은 Wasitynski의 文獻<sup>(1)</sup>에 綜合 定理하여 詳細하게 紹介되었으며, 60年代의 最適設計 發展過程 및 理論에 關한 文獻은 Shue, Prager, Schmit의 文獻<sup>(2)</sup>을 들 수 있다.

그리고 70年代初까지의 最適設計理論의 發表 狀況은 Gallagher의 文獻<sup>(3)</sup>과 Majid의 文獻<sup>(4)</sup> 등에서 詳細히 紹介하고 있다.

이 文獻들을 中心으로 調査한 結果 거의 대부분 構造物의 幾何學의 形狀을 考慮하지 않았다.

本 研究과 關聯된 研究에 對해서만 言及하면 다음과 같다.

1962年 Lucien A Schmit와 Thomas P Kicher<sup>(5)</sup>는 簡單한 3部材트러스 構造物의 最適 形狀 및 最適材料로 Gradient Method를 誘導하였다.

1964年 Dorn Gomory와 Greenberg<sup>(6)</sup>는 線形 計劃法을 適用하여 reduced optimal structure

를 誘導함으로써 構造物의 形狀最適化의 研究에 상당한 關心을 갖게 되었다.

1969年 Dobbs와 Fleton은 Dorn Gomory<sup>(7)</sup>와 Greenberg의 理論을 擴張하여 多載荷條件 應力 및 挫屈應力을 실제 制約條件으로 包含한 最適化 問題 形式에 gradient method의 技法을 適用하여 Dorn Gomory와 Greenberg의 研究結果와의 差異點에 대해 考察한 것으로써 이 最適設計方法은 一般의이며 훌륭한 數學的인 計劃法이었다.

이상의 研究中 Schmit의 理論을 除外하고는 節點座標를 設計變數로 取扱하지 않았으므로 엄밀한 意味의 形狀最適化라고는 할 수 없다.

1971年 Pedersen<sup>(8)</sup>은 平面트러스의 two-phases의 形狀最適化를 最初로 試圖하였다.

多載荷條件의 最適化는 試圖되지 않았으므로 이를 擴張하여 1972, 1973년에 減度系數(sensitivity coefficients)를 使用한 反復試行的 設計法<sup>(9,10)</sup>에 의해 平面트러스 및 立體트러스의 最適 形狀을 誘導하였다.

1972年 Vanderplates와 Moses<sup>(11)</sup>도 Pedersen과 마찬가지로 two-phases의 形狀最適設計를 取扱하였다.

처음에는 stress-ratio method와 Zoutendijk의 feasible direction method<sup>(12)</sup>를 修正한 알고리즘(algorithm)으로 多制約條件下의 트러스 構造物의 斷面을最適化한 後 節點座標에 관한 目的函數의 gradient方向으로 目的函數를 修正하는 소위 steepest descent method의 技法에 의한 形狀最適問題를 다루었다.

1975年 Spillers<sup>(13)</sup>는 Friedland<sup>(14)</sup>의 研究와 똑같은 最適化모델을 提示하여 Kuhn Tucker條件을 利用한 트러스構造物의 形狀最適化理論을 誘導 發表하였으나 이 研究 結果로는 트러스構造物의 重要한 部分을 차지하는 多載荷條件, 挫屈應力 및 變位條件을 考慮한 形狀最適化를 試圖할 수가 없었다.

그래서 1980년에는 위의 研究를 擴張하여 AI SC(The American Institute of Steel Construction) 示方書의 挫屈應力에 關한 設計規定을 만족하는 最適解를 Kuhn-Tucker條件에 의해 誘導하였다.

그러나 多載荷條件 및 變位條件을 考慮한 形狀最適化는 試行할 수가 없었다<sup>(14)</sup>.

1977年 Ovadia<sup>(15)</sup>는 獨立된 二個의 載荷條件 下의 트러스構造物에 各各의 載荷條件에 對한 反復試行設計의 適用으로 얻은 解를 各各 重疊함으로써 形狀最適化를 試圖할 수 있는 定理을 發表하였다.

그러나 이 方法은 載荷條件에 制限을 받으면 挫屈應力 및 變位制約條件式을 考慮할 수가 없다.

1978년에는 2個의 獨立된 載荷條件 下의 트러스構造物에 decomposition method를 適用하여 two-phases의 形狀最適化를 試圖하고 있으나 多載荷條件, 挫屈應力 및 變位制約을 考慮한 形狀最適化는 不可能하다<sup>(16)</sup>.

1980年 Saka<sup>(17)</sup>는 逐次線形計劃法(SLP)의 適用으로 部材力이 零인 部材를 除外함으로써 最適形狀을 誘導하였다.

國內에서는 1973年에 鋼構造物의 離散型 最適設計에 關한 研究<sup>(18)</sup>를 發表하면서부터 國內研究者<sup>(19,20,21)</sup>의 關心을 끌기 시작하였으나 幾何學的 形狀을 考慮한 最適設計에 關한 研究는 찾아볼 수 없다.

지금까지 外國에서 發表된 트러스構造物의 最適形狀에 關한 研究는 거의 two-phases의 最適化로 各 段階에서는 多樣한 알고리즘이 適用되어 왔다.

그러나 幾何學的 形狀을 固定시킨 狀態下에서 트러스部材斷面의 最適化를 求하는 phase 1에서 매우 效率的이라고 알려진 modified Newton-Raphson method<sup>(22)</sup>에 依한 SUMT 法과 트러스節點의 座標를 變數로 取하여 트러스形狀의 最適化를 求하는 phase 2에서 gradient를 計算하지 않고도 效率的으로 解를 求할 수 있는 Rosenbrock method를 使用한 形狀最適化 알고리즘은 試圖된 바가 없음을 알 수 있다.

## 2. 最適化 모델

### 2.1 SUMT 法에 依한 斷面最適化 形式

部材數  $m$ , 自由變  $n$ , 壓縮力을 받는 部材數가

$f$ 인 트러스 構造物의 解析制約條件式, 應力制約條件式, 挫屈應力制約條件式, 變位制約條件式, 設計變數 限界制約條件式 및 目的函數를 多載荷條件(multiple loading condition)과 함께 非線形計劃問題로 綜合하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{Minimize : } & M(A) = \{A\}^T \{L\} \\ \text{Subject to } & \left. \begin{aligned} \{\sigma_s\} - [B][\tilde{K}][\beta] \\ [K]^{-1}\{A^{NL}\} \geq \{0\} \\ \{\sigma_{cb}\} - [C]\{Q\} \geq \{0\} \\ \text{or } \{\sigma_{cb}\} - [C]\{F^{NL}\} \geq \{0\} \\ \{q_s\} - [K]\{Q^{NL}\} \geq \{0\} \\ \{X_u\} - \{X\} \leq \{0\} \\ \{X\} - \{X_L\} \leq \{0\} \end{aligned} \right\} \dots(2-1) \end{aligned}$$

여기서

$\{A\}$  = 部材의 斷面積 매트릭스

$$= (A_1, \dots, A_i, \dots, A_m)^T$$

$\{L\}$  = 部材길이의 매트릭스  $= (L_1, \dots, L_i, \dots, L_m)^T$

$[\beta]$  = 位相連 매트릭스(topological incidence matrix)

$\{q_s\}$  = 許容節點變位の  $(n \times 1)$  列 매트릭스 =

$$(q_1 \dots q_n)^T$$

$\{Q\}$  = 節點荷重의  $(n \times 1)$  列 매트릭스  $= (Q_1 \dots Q_n)^T$

$\{F\}$  = 部材力의  $(m \times 1)$  列 매트릭스  $= (F_1 \dots F_m)^T$

$$= [\tilde{K}][\beta][K]^{-1}\{Q\}$$

$[\tilde{K}]$  = 部材剛性對角 매트릭스  $= \begin{bmatrix} \tilde{K}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde{K}_m \end{bmatrix}$

$$\text{但 } \tilde{K}_i = \frac{E_i A_i}{L_i}$$

$[K]$  = 剛性 매트릭스(stiffness matrix)

$$= [\beta]^T [\tilde{K}][\beta]$$

$[B]$  =  $(m \times m)$ 의 各 部材斷面의 逆매트릭스

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} & \dots & \textcircled{1} & \dots & 0 \\ & & \vdots & & \\ \textcircled{1} & & \frac{1}{A_i} & & \\ & & \vdots & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \frac{1}{A_m} \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} & \dots & \textcircled{1} & \dots & 0 \\ & & \vdots & & \\ \textcircled{1} & & \frac{1}{A_i} & & \\ & & \vdots & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \frac{1}{A_m} \end{bmatrix}$$

$$\{\theta\} = (\theta_1, \dots, \theta_i, \dots, \theta_j)^T$$

$$\theta_i = \frac{\pi^2 E \alpha_i A_i}{L_i}$$

$\alpha_i = i$  部材의 形狀에 關係되는 常數

$\{X_u\}$  = 設計變數 上限值 매트릭스

$\{X_L\}$  = 設計變數 下限值 매트릭스

NL = 載荷條件數

### 3. 平面트러스 構造物의 形狀最適化 技法

#### 3.1 SUMT 法에 依한 斷面最適化

##### 1) SUMT 問題形成

앞 章에서 誘導된 式(2-1)의 非線形計劃問題를 SUMT 計劃問題로 形成하면 式(3-1)과 같은 interior penalty function 을 얻는다.

Minimize :

$$\omega(A, R_j) = \{A\}^T \{L\} + R_j \left( \sum_{NL=1}^{NL} \sum_{i=1}^m \frac{1}{G_i^{NL}} + \sum_{k=1}^f \frac{1}{G_{2k}} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{G_{3i}} \right) \dots \dots \quad (3-1)$$

여기서

$R_j$  : penalty parameter ( $R_0, R_1, \dots$ )

式(3-1)에서 設計變數 限界制約條件式은 最適化 反復試行過程에서 調節할 수 있으므로 이를 包含시키지 않았으며  $\sum_{j=1}^m G_{1j}$ ,  $\sum_{k=1}^f G_{2k}$ ,  $\sum_{i=1}^n G_{3i}$  을 벡터의으로  $\{G_{v1}\}$ ,  $\{G_{v2}\}$ ,  $\{G_{v3}\}$  로 表現하면 다음과 같은 量이 된다.

$$\begin{Bmatrix} \{G_{v1}\} \\ \{G_{v2}\} \\ \{G_{v3}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\sigma_a\} - [B][\tilde{K}][\beta][K]^{-1}[Q^{NL}] \\ \{\sigma_a\} - [C]\{\theta\} \text{ or } \{\sigma_{CB}\} - [C][F] \\ \{q_a\} - [K][Q^{NL}] \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (3-2)$$

式(2-1)의 最適化 問題는 式(3-1)의 interior penalty function 이  $R_j$  의 값을 單調減小시키면서 最小化될 때 最適解에 收斂하게 된다.

式(3-1)에 表示된 penalty parameter  $R_j$  의 初期值에 따라 interior penalty function 의 收斂速度 및 最適解의 값이 달라지므로  $R_j$  의 初期點 決定에 유의하여야 한다.

이와 같이  $R_j$  의 값의 決定에 관한 明白한 基

準이 없으므로 本 研究에서는 初期의  $R_0$  값 및  $(K+1)$ 번째 反復試行에서 必要한  $R_{k+1}$  을 Kaviilie 와 Moe<sup>(23)</sup>가 추천한 方法을 擇하였다.

2) Modified Newton-Raphson Method 에 의한 penalty function 의 最適化

上記한 penalty function 을 modified Newton-Raphson method 에 의해 幾何學의 形狀이 固定된 트러스 構造物을 最適化할 경우  $(k+1)$ 번째 設計變數의 값은 다음과 같이 주어진다.

$$\{X^{k+1}\} = \{X^k\} - \{B^k\} \dots \dots \dots (3-3)$$

여기서,

$\{B^k\}$  = feasible direction vector

$$= [H(X_k)]^{-1} \Delta \omega(X^k)$$

$\Delta \omega(X^k)$  =  $k$  번째 設計點에서 penalty function 의 gradient 매트릭스.

$[H(X)]$  =  $k$  번째 設計點에서 penalty function 의 Hessian matrix

$$= \left[ \frac{\partial^2 \omega}{\partial X_i \partial X_j} \right]_{i,j=1 \sim m} \dots \dots \dots (3-4)$$

本 研究에서는 Fiacco 와 McCormick<sup>(24)</sup>가 展開한 modified Raphson method 를 使用하여 보다 效率의으로 最適值에 收斂하도록 하였다. 자세한 內容은 文獻(22)에 收錄되어 있다.

#### 3.2 Rosenbrock Method 에 의한 形狀最適化

節點의 座標를 設計變數로 하는 最適化問題의 最適解를 first order method 의 利用으로 求하기 힘든다는 事實을 Spillers 의 研究로부터 알 수 있어 本 研究에서는 gradient 없이도 解를 求할 수 있는 Rosenbrock method 의 一方向 探查法에 依하여 目的函數값만이 最小가 되도록 트러스의 最適形狀을 求한다.

本 技法으로 解를 求하는 알고리즘은 文獻(25)에 收錄되어 있다.

#### 3.3 最適化 알고리즘

本 研究에서 使用하는 SUMT 法 및 Rosenbrock method 의 一方向 探查法에 依해 目的 函數만이 最小가 되도록 트러스의 構造物의 形狀을 最適化하는 綜合的인 알고리즘은 다음과 같이 要約할 수 있다.

step 1 : 斷面의 初期值  $\{X_0\}$  附與

스의 設計條件은 表 4-1, 適用알고리즘은 表 4-2 와 같고, 適用構造에 대한 Moses의 研究와 本 研究와의 比較는 表 4-3 에, 本 研究方法에 依한 最適解는 表 4-4에 收錄되어 있고 表 4-3의 結果를 表示하면 그림 4.1과 같다.

한편 Moses와 本 研究의 알고리즘에 依한 最適形狀을 圖示하면 그림 4.2와 같다.

表 4-1 Moses의 構造模型에 對한 設計條件

載荷條件	載荷條件種類	節點	11部材트러스
	單一載荷條件 (lb)	7	$-2 \times 10^4$
制約條件	應力制約 (psi)		$-2 \times 10^4 \leq \sigma_0 \leq 2 \times 10^4$
	挫屈應力制約 (psi)		—
	變位制約 (in)		—
彈性係數 (psi)			$10^7$
單位重量 (lb/in <sup>3</sup> )			0.1

表 4-2 Moses의 構造模型에 對한 適用 알고리즘.

構造 型態	Moses의 研究 本 研究				Tolerance
	phase 1	phase 2	phase 1	phase 2	
11部材 트러스	stress ratio 및 feasible direction	steepest descent	SUMT	Rosen- brocck	反復回數 40 軸回轉數 5 目的函數 값의 차 0.1

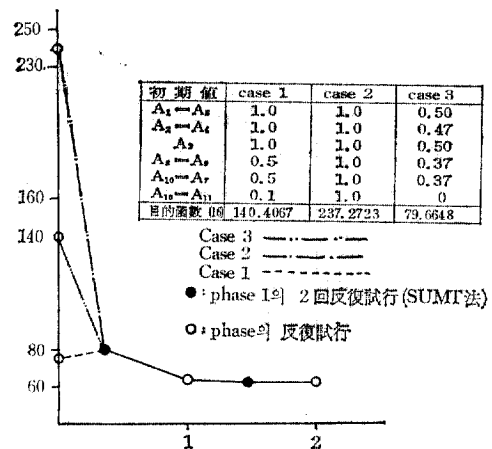


그림 4.1 Moses의 部材트러스의 目的函數 값과 phase의 反復試行數

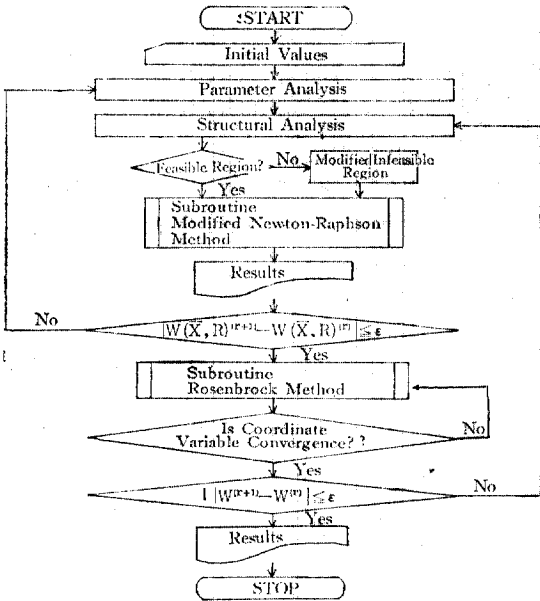


그림 3.1 本 研究의 形狀最適化 flow chart.

step 2: 斷面의 初期值 또는 反復試行中 얻은 斷面이 實行可能領域에 있는지를 檢算한다.

反復試行中 얻은 斷面이 實行可能領域에 있으면 다음 段階로 進行하나 그렇지 않으면 實行可能領域의 設計點으로 變換한다.

step 3: 다음의 設計點  $\{X^{k+1}\}$ 을 찾기 위한 modified Newton-Raphson method의 反復試行  $\{X^{k+1}\} = \{X^k\} - \{B^k\}$

로부터 收斂值를 求한다.

step 4: 앞 過程의 收斂限界值를 代入한 目的函數만 가지고 Rosenbrock method의 一方向探查法에 依해 目的函數만이 最小가 되도록 座標를 修正해 나간다.

目的函數값이 收斂하거나 許容反復回數에 到達하면 終지하나 그렇지 않으면 step 2로 되돌아 간다.

이때에는  $k=1$ 로 하여 反復試行을 시작한다. 이상의 過程에 關한 flowchart는 그림 3.1과 같다.

#### 4. 數值例 및 結果分析

##### 4.1 Moses가 適用한 11部材트러스

Moses가 適用한 그림 4.2 (a)의 11部材트러

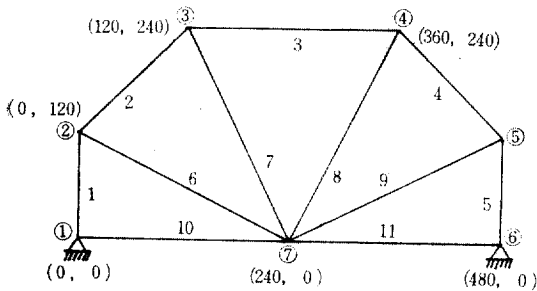
表 4-3 本 研究結果와 Moses 의 研究結果

(單位 : lb)

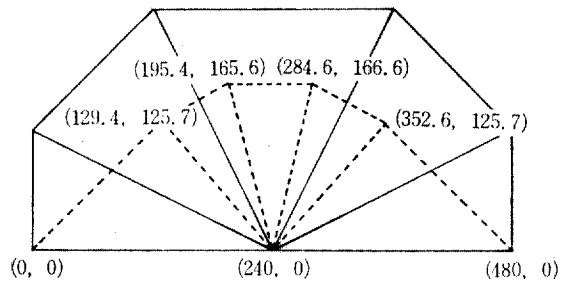
制約條件	反復回數	本 研 究 結 果			Moses 의 研究結果
單一 載荷 條件	初 期 值	初期值 (1)	初期值 (2)	初期值 (3)	79.7120
	形狀이 固定된 경우 載 適된 解	79.7128	140.4067	237.2723	80.0
許 容 應 力	1	65.3767	65.3767	65.3767	62.5
	2	65.3767	65.3767	65.3767	62.5
總 反 復 回 數		3	3	3	알 수 없 음

表 4-4 本 研究의 알고리즘에 對한 Moses 의 構造模型의 計算結果值

部 材	斷 面 積		節 點	座 標 (in)				最 適 形 狀 的 斷 面 積 (in <sup>2</sup> )
	初期值	幾何學的 形 狀이 固定된 경우의 最 適 解		初 期 值		最 適 形 狀 的 座 標 值		
				X	Y	X	Y	
1, 5	0.500	0.50000	2	0	120	75.000	117.50	0.593175
2, 4	0.470	0.47140	3	120	240	195.000	202.50	0.627433
3	0.500	0.50000	4	380	240	285.000	202.50	0.592594
6, 9	0.370	0.37268	5	480	120	405.000	117.50	0.236753
7, 8	0.370	0.37268						0.371514
10, 11	0.001	0.00099						0.000999
目的函數 (lb)	79.7128	80.048111						

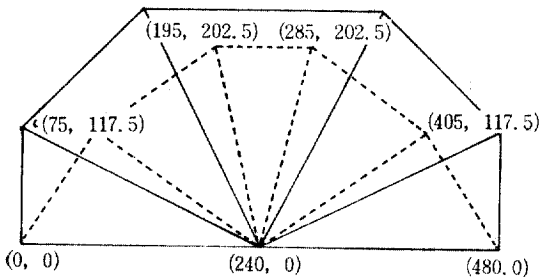


(a) Moses 의 構造模型



(c) 本 研究의 結果

그림 4.2 Mose 및 本 研究 結果의 最 適 形 狀



(b) Moses 의 研究結果

#### 4.2 Saka 가 適用한 11 部材 트러스

트러스의 最 適 化에 關하여 가장 最近에 發表한 Saka 의 SLP 法에 의한 形 狀 最 適 化에서는 여러개의 數 值 計 算을 실시하였으나 本 研究에서는 Moses 의 경우와 다른 形 態를 가진 경우에 대하여 Saka 와 同一 條 件下에서 本 研究의 結果와 Saka 의 研究結果를 比較 分析한다.

Saka 가 適用한 그림 4.5(a)의 11 部材 트러스의 設 計 條 件은 表 4-5, 適 用 알고리즘은 表 4-6

과 같고, 適用構造에 대한 Saka의 研究와 本 研究의 比較表는 表 4-7에, 本 研究에 依한 最適 解는 表 4-8에 收錄되어 있으며 또한 表 4-7의 結果를 圖示하면 그림 4.3과 같고 設計段階別 座標의 變換過程을 圖示하면 그림 4.4와 같다.

表 4-5. Saka의 構造模型에 대한 設計條件

載荷 條件	載荷 條件의 種類		節點	數值
	(KN)			
條件	單一載荷條件	①	④	-445
		②		-445
		④		-445
制約	應力 制約 (KN/mm)			$-0.1378 \geq \sigma_1 = \sigma_4 \geq 0.1378$ $-0.1159 \geq \sigma_2 = \sigma_3 \geq 0.1159$ $-0.1163 \geq \sigma_5 = \sigma_8 \geq 0.1163$ $-0.149 \geq \sigma_6 = \sigma_7 = \sigma_9 = \sigma_{10} \geq 0.149$
	條件			
	挫屈應力制約 (KN/mm <sup>2</sup> )			-
	變位 制約 (mm)			-
彈性係數 (KN/mm <sup>2</sup> )				207

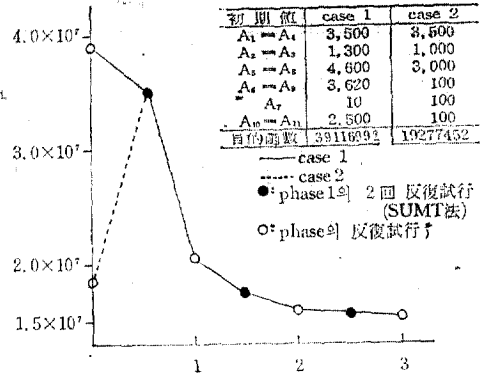


그림 4.3 Saka의 11部材 트러스의 目的函數 값과 phase의 反復試行數

表 4-6. Saka의 構造模型에 대한 適用알고리즘

構造 形態	Saka의 研究	本 研究		Tolerance
		phase 1	phase 2	
11部材 트러스	SLP	SUMT	Rosenbrock	反復回數40 轉回轉數 5 目的函數 값의 차 0.1

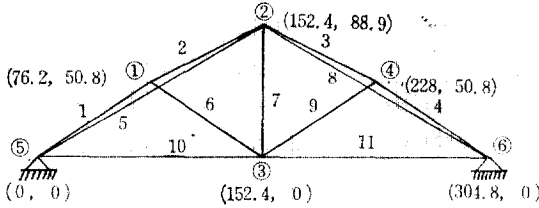
表 4-7 本 研究의 結果 및 Saka의 研究結果 (單位 : mm<sup>3</sup>)

構造 形態	制約 條件	反復 回數	SUMT 法		Saka의 研究	
			Case 1	Case 2	反復回數	目的函數 값
11部材 트러스	單一載荷條件	形狀이 固定된 경우의 最適解	39,116,992	17,277,452	9	1.698 × 10 <sup>7</sup>
		1	35,267,616	35,267,616		
		2	22,075,856	22,075,856		
	3	16,493,628	16,493,628			
	4	16,238,176	16,238,176			
	許容應力	3	16,238,176	16,238,176		
總 反復回數(回)			9			

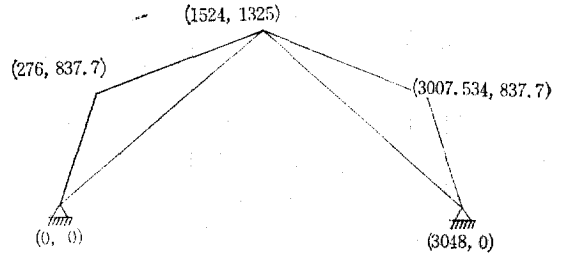
表 4-8 本 研究의 알고리즘에 의한 構造模型의 計算結果值

部 材	斷 面 積		節 點	座 標 (mm)				最適形狀의 단면적 (mm <sup>2</sup> )
	初期值	幾何學的 形狀이 固定된 경우의 最適解		初 期 值		最適形狀의 座標值		
				X	Y	X	Y	
1,4	3,500	7403.217	1	762	508	40.466	626.261	3330.4225
2,4	1,300	5678.697	2	1,524	989	1,524	1276.833	278.789
5,8	4,600	1733.956	4	2,286	508	3007.534	626.261	2805.2675
6,9	3,620	2098.518						0
7	10	2328.109						0
10,11	2,500	0						0
目的函數 (mm <sup>3</sup> )	39,116,992	35,267,616						19,238,176

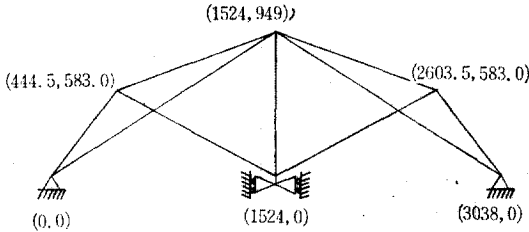




(a) Saka의 構造模型



(e) Saka의 研究結果에 의한 部材트러스의 最適形狀  
그림 4.4 本研究의 設計段階別 形狀 및 最適形狀과 Saka의 研究結果

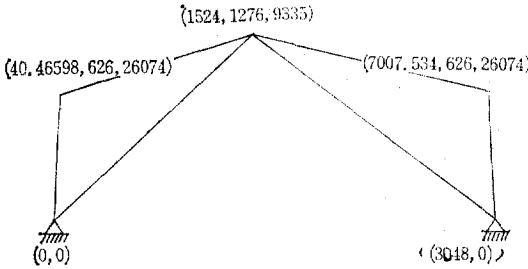


(b) 1回反復試行後 部材트러스의 形狀

技法에 의한 結果를 比較하여 要約하면 다음과 같다.

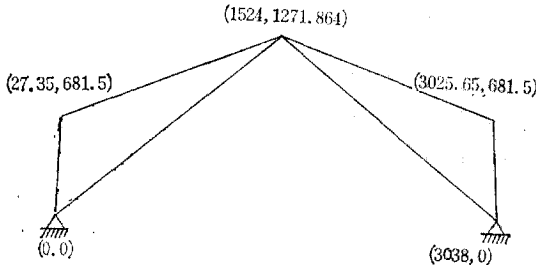
(1) 本研究과 Moses의 研究結果 比較

① 本研究의 알고리즘으로는 그림 4.1에서 알 수 있듯이 phase 1에서 2회의 反復試行, phase 2에서는 1회의 反復試行으로 最適解를 얻었기 때문에 收斂速度가 比較的 빠르다고 볼 수 있다.



(c) 2回 反復試行後 部材트러스의 形狀

② 本研究과 Moses의 알고리즘은 같이 two-phases 技法을 使用하여 同一構造의 最適化問題를 解析하였는데 phase 1에서는 同一한 最適解를 얻었으나 phase 2에서는 最適의 目的函數 값에 약 4.4% 差異가 생겼고 最適形狀의 節點座標에도 多小 差異가 났다. 이러한 現象은 phase 2에서 適用알고리즘의 差異로 인하여 發生한 것으로 思料된다.



(d) 本研究 結果에 의한 部材트러스의 最適形狀

③ 그림 4.1 과 그림 4.3 으로부터 本 알고리즘은 初期值의 遠近에 關係없이 同一한 最適解에 到達함을 알 수 있다.

(2) 本研究과 Saka의 研究結果

① Saka가 SLP 法으로 適用하였던 同一한 構造模型에 Saka의 경우와 同一한 設計條件을 賦與하여 本研究의 알고리즘으로 트러스의 形狀 最適化한 結果를 그림 4.3에서 알 수 있듯이 phase 1에서는 2회의 反復試行 phase 2에서는 3회의 反復試行으로 最適解를 얻었으나 Saka의 研究에서는 SLP 法을 利用하여 最適解를 얻는데 9회의 反復試行過程이 요구되었다.

4.3 既發表된 形狀最適化 알고리즘과의 比較

本研究의 알고리즘을 適用하여 얻어진 結果와 Moses의 two-phases 알고리즘 및 Saka의 SLP

결국 두 方法으로 트러스의 形狀을 最適化할 때 目的函數의 값에는 별 差異가 없고 反復試行 過程만으로 보면 거의 同一한 收斂성과 效率性이 있음을 보여준다.

② 初期值의 遠近에 關係없이 最適解에 到達하는 收斂速度는 同一함을 그림 4.3으로부터 알았다.

즉 收斂過程을 볼 때 本例題에서는 目的函數 값이 第1回 反復試行에서 37.4% 第2回 反復試行에서 25.3% 第3回 反復試行에서 1.55%씩 減少하여 最適解에 到達함을 알 수 있다.

## 5. 結 論

本 研究에서는 트러스 構造物의 形狀을 最適化하기 위하여 two-phase 技法을 擇하고 phase 1에서는 前에 아무도 試圖한 바 없는 Modified Newton-Raphson 에 依한 SUMT 技法, phase 2에서는 Rosenbrock Method 를 利用하는 形狀最適化 알고리즘을 誘導한 것이다.

誘導된 알고리즘의 妥當성과 收斂성을 分析하기 위하여 2種의 트러스 構造模型에 適用하여 얻어진 研究結果를 要約하면 다음과 같다.

1. 本 研究에서 提案하는 phase 1에서 Modified Newton-Raphson Method 의 SUMT 法에 의한 斷面最適化, phase 2에서는 Rosenbrock Method 의 一方向 探查法에 依해 目的函數만이 最小가 되도록 하는 形狀最適化 技法으로 構成된 本 研究의 알고리즘은 트러스의 形態, 載荷條件, 制約條件의 變化에 拘束없이 Oscillation 現象이 생기지 않으면서 最適解를 求할 수 있다는 事實이 證明되었다.

2. 誘導된 알고리즘을 2種의 트러스의 形狀最適化에 適用해 본 結果 phase 1에서는 모두 2回以內의 反復試行, phase 2에서도 3回以內의 反復試行으로 初期值의 遠近에 關係없이 最適解에 빨리 收斂한다는 事實을 알았다.

3. 트러스의 形狀을 最適化할 때는 挫屈應力 制約條件이 最適解에 미치는 영향이 크다는 事實이 確認되었기 때문에 트러스의 形狀最適化에는 挫屈應力을 考慮하는 것이 妥當할 것으로 思料된다.

4. 同一한 條件下에서는 트러스의 幾何形態를

固定시키고 斷面만을 最適化하는 경우보다 誘導된 알고리즘에 依하여 트러스의 形狀까지도 最適化한 경우에는 트러스의 初期의 幾何形態와 設計條件에 따라 多少 差異가 있겠지만 重量을 상당히 減少시킬 수 있다는 事實을 알 수 있으므로 本 研究에 의한 트러스의 形狀最適化는 트러스 構造物의 經濟的인 設計에 도움을 줄 수 있을 것으로 思料된다.

5. 本 研究의 알고리즘을 Moses의 two-phases 알고리즘 및 Saka의 SLP 알고리즘과 比較分析한 結果 目的函數의 값에는 별 差異가 없으나 最適形狀의 모양이 같고 節點의 座標는 差異가 있으며 最適解를 求하는 收斂性에는 反復試行數만으로 볼 때 거의 같은 水準의 收斂性을 가지고 있다고 볼 수 있으므로 本 研究의 알고리즘이 실제 適用에 妥當성과 安定性이 있다고 思料된다.

## 參 考 文 獻

1. Wasiutynski Abigniew and Brandt, Andrej, "The Present of Knowledge in the Field of Optimum Design of Structures," *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 16, No. 5, May 1963, pp. 150~341.
2. Schmit, L.A., "Structural Synthesis. 1959~1969, A Decade of progress," Paper Presented at the U.S. Japan Seminar at Tokyo in August 1969.
3. Callagher, R., and Zienkiewicz, O.C., eds. *Optimum Structural Design, Theory and Applications*, John Wilcy and Sons, Inc, New York N.Y., 1973.
4. Majid, K. I., *Optimum Design of Structures* Butter Worths, London, 1974.
5. Lucien, A., Schmit, Thoms P. Kicher. "Synthesis of Material and Configuration Selection," *Journal of Structural of Structural Division*, ASCE, Proc. Vol. 88, No. ST3, June 1962, pp. 79~102.
6. William S. Dorn, Relph E. Gomory., Greenbery, H.J., "Automatic Design of optimal Structures," *Journal de Mecanique*. Vol. 3, No. 1, Mars, 1964, pp. 25~52.
7. Dobbs, M.W., Felton, L.P., "Optimization of

- Truss Geometry." *Journal of Structural Division*, ASCE, Proc. Vol. 95, No. ST10 Oct. 1969, pp. 2105~2117.
8. Pedersen, P., "On the Minimum Mass Layout of Trusses," *AGARD Symposium on Struct. OPT-Istanbul, Turkey, Oct 1961, AGARDAG-149-71*, Feb 1971.
  9. Pedersen, P., "On the Optimal Layout of Multi-Purposi Trusses," *Computers and Structures*, Vol. 2, 1972.
  10. Pedersen, P., "Optimal Joint Positions for Space Trusses," *Journal of the Structural Division*, ASCE, Prot. Vol. 99, ST12, 1973, pp. 2459~2476.
  11. Vanderplaats, G.N., and Moses, F., "Automated Design of Trusses for Optimum Geometry," *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 98, ST3, Proc. Paper 8795, Mar., 1972, pp. 671~690.
  12. Zoutendijk, J., "Methods of Feasible Direction" Elsevier Am Ams rdam, 1960.
  13. Spillers, W.R., "Iterative Design for Optimal Geometry." *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 101, No. ST7, Proc. paper 11439, July. 1975, pp. 1435~1442.
  14. Friedland, L.R., "Geometric Structural Behavior," *Thesis Presented to Columbia University*, at New York, N.Y., in 1971 in Partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Phillosophy.
  15. Ovadia, E., Lev., "Optimum Choice of Determinant Trusses under Multiple Loads," *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 103, No. ST2, Proc, Paper 12739, Feb, 1977, pp. 391~403.
  16. Ovadia, E., Lev., "Optimum Truss Geometry for Two Loading Conditions." *Journal of Structural Divisssion*, ASCE, Vol. 104, No. ST8, Proc. Paper 13953, Jan 1978, pp. 1203~1210.
  17. Saka, M.P., "Shape Optimization of Trusses" *Journal of the Structural Diviosin*, ASCE, Vol. 106, No. ST5 Proc. Paper 15437 May 1980, pp. 1155~1173. 第二十九回年次 學術講演概要集, 第一部, 1~168, 1974, pp. 361~632.
  18. 趙孝男: "뾰대 構造物의 離散型最適設計에 관한 研究", 大韓土木學會, 第21卷, 第3號, 1973. 9, pp. 107~120.
  19. 邊根周: 철근 콘크리트 뾰대 구조물의 최적화를 위한 최적단면의 결정에 관한 연구, 연세대학교 대학원(박사학위 논문). 1975.
  20. 邊根周, 趙孝男, 黃鶴周: 多制約條件下의 뾰대 構造物의 離散型 最適設計, 연세논총 第12집, 연세대학교 대학원, 1975, pp. 195~213.
  21. 邊根周, 趙孝男, 黃鶴周: 鐵筋 콘크리트 斷面의 最小經費設計를 위한 最適 鐵筋比에 관한 研究, 大韓土木學會誌, 第23卷, 第3號, 1975, pp. 131~137.
  22. 李奎遠, 邊根周, 黃鶴周: SUMT 법에 의한 鐵材 트러스의 最適設計에 관한 研究, 大韓土木學會誌 第28卷, 第4號, 1980. 8, pp. 119~130.
  23. Dag Kavilie and Jonannes Moe., "Automated Design of Frame Structures," *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 97, ST1, Proc. Paper 7823, Jan, 1971, pp. 33~62.
  24. Fiaco, A. V., and McCormick, O.P., "Nonlinear Programming, Sequential Uncontsrained Minimization," John Wiley & Sons. Inc. New York. N.Y., 1968.
  25. James L.K., "Optimization Techniques with Fortran McGraw-Hill Book Company., 1973.

(接受: 1985. 6. 1)