

# 兩端固定 拋物線아치의 自由振動 解析

## Free Vibration Analysis of Fixed Ended Parabolic Arches

朱	銑	萬*
Joo,	Sun	Man
朴	光	圭**
Park,	Kwang	Kyu
李	炳	求***
Lee,	Byoung	Koo
黃	鶴	周****
Hwang,	Hack	Joo

### Abstract

The governing differential equations and the boundary conditions for the free vibration of fixed-ended uniform parabolic arch are derived on the basis of the equilibrium equations and the D'Alembert principle. The effect of rotary inertia as well as extensional and flexural deformations is considered in the governing differential equations.

A trial eigenvalue method is used for determining the natural frequencies. The Runge-Kutta method is used in this method to perform the integration of the differential equations.

The detailed studies are made of the lowest three vibration frequencies for the span length equal to 10m. The effect of the rotary inertia is analyzed and its numerical data are presented in table. And as the numerical results the frequency versus the rise of arch and the radius of gyration are presented in figures.

### 要 旨

아치의 微小要素에 作用하는 合應力들의 平衡方程式과 D'Alembert의 原理를 利用하여 回轉慣性을 考慮한 拋物線아치의 自由振動에 對한 微分方程式을 誘導하였다.

本 研究에서 誘導한 微分方程式을 檢證하기 爲하여 拋物線아치의 微分方程式을 보의 微分方程式으로 收斂시킨 結果, 拋物線아치의 微分方程式이 보의 微分方程式으로 收斂되는 것을 보였다.

本 研究에서 誘導한 微分方程式을 試行錯誤的 固有值問題와 Runge-Kutta method를 利用하여 數值解析하였으며, 本 研究의 數值解析 結果와 SAP IV의 結果가 잘 一致함을 보였다.

\*正會員·延世大學校 大學院 博士課程,

\*\*正會員·延世大學校 大學院 博士課程,

\*\*\*正會員·圓光大學校 土木科 助教授

\*\*\*\*正會員·延世大學校 土木科 教授

## 1. 序 論

아치는 構造的으로 매우 理想的인 擘단 아니라 그 美的인 感覺때문에 옛부터 橋梁 等 各種 構造物에 많이 利用되었다<sup>(1)</sup>. 특히 20世紀初부터 發展하기 始作한 鋼材의 壓延技術은 鋼構造物材의 輕量化를 가져왔으며, 800 N/mm<sup>2</sup> 級의 高張力 鋼材의 出現은 支間이 긴 拱橋의 架設을 可能하게 하여 自然景觀과 調和를 이루는 아름다운 拱橋가 發達하게 되었다. 拱橋에 있어서 拱의 舉動에 振動이 미치는 影響은 相當히 크기 때문에 拱構造의 振動에 대한 綜合的인 檢討가 必須的으로 要請되고 있다<sup>(2)</sup>.

拱의 自由振動解析에 관한 研究는 많은 參考文獻들<sup>(3,4,5)</sup>에서 찾아 볼 수 있지만 大部分이 理論的 展開가 比較的 容易한 圓弧拱를 研究의 對象으로 하고 있다.

이러한 觀點에서 本 研究는 回轉慣性을 考慮한 兩端固定 拋物線拱의 自由振動特性을 把握함으로써, 拱의 振動에 대한 理論을 擴張하고, 나아가서 實際로 拱構造物의 設計時에 더욱 正確한 自由振動特性을 考慮하도록 하는 데에 本 研究의 目的이 있다.

本 研究에서 使用한 基本假定은 다음과 같다.

- (1) 拱의 圓心軸은 拋物線이며, 拱頂을 基準으로 對稱이다.
- (2) 拱의 斷面積은 一定하다.
- (3) 自由振動解析에서 減衰效果는 考慮하지 않는다.
- (4) 拱의 應力解析은 彈性理論을 따른다.
- (5) 拱斷面은 變形을 일으킨 後에도 平面을 維持한다.

## 2. 基本理論

### 2.1 變位關係式

아치가 自由振動하게 되면 拱軸의 任意點  $S_0$ 의 位置는 一定한 週期를 갖고 變化한다. 그림 1에서 처럼 接線方向의 變位를  $u$ , 曲率中心方向의 變位를  $v$ 라 한다.

$S_0$  점에서 拱軸의 微小增分  $dS$  距離의 點을

$S_1$ 이라 하면 이 點의 變位는  $u+du$ ,  $v+dv$ 로 되고 이들 사이의 變位關係式들을 얻을 수 있다<sup>(6)</sup>.

拱軸의 接線方向의 變形率  $\epsilon_s$ 는 다음과 같이 求할 수 있다.

$$\epsilon_s = \frac{1}{\rho} \left( \frac{du}{d\phi} - v \right) \quad (1)$$

(1)式에서  $\rho$ 는  $S_0$  點의 曲率半徑이며,  $\phi$ 는  $S_0$  點의 曲率中心方向과 水平軸이 이루는 radian으로 表示된 角度이다.

拱軸이 變形을 일으키게 되면 拱斷面은 回轉을 發生시키며 이 回轉角  $\psi$ 는 다음과 같이 求할 수 있다.

$$\psi = \frac{1}{\rho} \left( \frac{dv}{d\phi} + u \right) \quad (2)$$

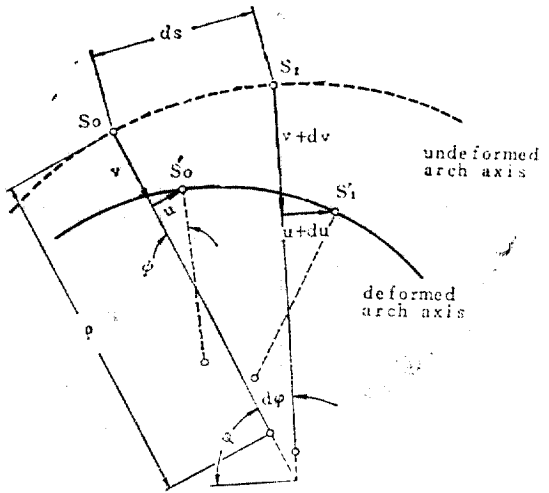


그림 1. Diagram of the geometric quantities of an arch

### 2.2 合應力

拱軸의 任意點  $S_0$ 가 變位를 일으키면 이 斷面에는 變位로 인한 合應力이 發生하게 된다. 本 研究에서는 拱의 面內振動만을 考慮하기 때문에 斷面에는 軸方向力  $N$ , 剪斷力  $V$  및 힘모멘트  $M$ 이 發生하며  $N$  및  $M$ 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} N &= EA\epsilon_s \\ &= \frac{EA}{\rho} \left( \frac{du}{d\phi} - v \right) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} M &= -\frac{EI}{\rho^2} \left( \frac{d^2v}{d\phi^2} + v - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\phi} u \right) \\ &= EI\phi \end{aligned} \quad (4)$$

以上の (3), (4)式에서  $E$ 는 彈性係數,  $A$ 는 斷面積,  $I$ 는 斷面二次모우멘트이며, (4)式에서  $\phi$ 는 다음 式과 같다.

$$\phi = -\frac{1}{\rho^2} \left( -\frac{d^2v}{d\phi^2} + v - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\phi} u \right) \quad (5)$$

### 2.3 D'Alembert의 慣性力

아치는 다음 式들과 같이 調和振動<sup>(7)</sup>을 한다고 假定한다.

$$u(\phi, t) = u \sin \omega t \quad (6)$$

$$v(\phi, t) = v \sin \omega t \quad (7)$$

$$\psi(\phi, t) = \psi \sin \omega t \quad (8)$$

上記式들에서  $u(\phi, t)$ ,  $v(\phi, t)$  및  $\psi(\phi, t)$ 는 時間  $t$ 일때 아치軸  $S_0$ 點(그림 1 參照)의 接線方向變位, 曲率中心方向變位 및 斷面回轉角을 各各 나타낸다.  $u$ ,  $v$  및  $\psi$ 는 自由振動의 振幅을 나타내는 基準函數이며  $\phi$ 단의 函數이다. 또한  $\omega$ 는 rad/sec로 表示되는 角振動數이다.

아치가 振動하게 되면  $u(\phi, t)$ 와  $v(\phi, t)$ 는 時間  $t$ 에 따라서 直線運動을 하며,  $\psi(\phi, t)$ 는 回轉運動을 하게 된다. 따라서 質量을 갖는 아치의 微小要素에는 直線運動  $u(\phi, t)$ 와  $v(\phi, t)$ 에 의해서 D'Alembert의 慣性力이 回轉運動  $\psi(\phi, t)$ 에 의해서 D'Alembert의 回轉慣性偶力이 發生한다.

$u(\phi, t)$ 에 의한 接線方向의 慣性力  $P_t(\phi, t)$ 는 다음과 같이 調和振動式으로 나타낼 수 있다<sup>(8)</sup>.

$$\begin{aligned} P_t(\phi, t) &= m \frac{\partial^2 u(\phi, t)}{\partial t^2} \\ &= -m\omega^2 u \sin \omega t \\ &= -P_t \sin \omega t \end{aligned} \quad (9)$$

(9)式에서  $m$ 은 아치의 單位길이當 質量이며, 調和振動式  $P_t(\phi, t)$ 의 振幅  $P_t$ 는 다음과 같다.

$$P_t = m\omega^2 u \quad (10)$$

마찬가지로 接線方向의 慣性力의 調和振動式  $P_r(\phi, t)$ 의 振幅  $P_r$ 은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$P_r = m\omega^2 v \quad (11)$$

또한  $\psi(\phi, t)$ 의 回轉運動에 의해서 發生되는 回轉慣性偶力도 調和振動式으로 나타낼 수 있다. 그림 2에서 아치軸의 微小길이  $dS$ , 아치의 圖心에서  $z$ 距離의 微小斷面  $dA$ 를 갖는 아치의 微小要素에는 다음과 같은 慣性力이 接線方向으로

로 作用하게 된다.

接線方向의 慣性力(TI)

$$= (d \cdot dA \cdot dS) \left[ z \frac{\partial^2 \psi(\phi, t)}{\partial t^2} \right] \quad (12)$$

(12)式에서  $d$ 는 아치材料의 單位體積當 質量이며, 이 慣性力에 의하여 發生되는 回轉慣性偶力은 다음과 같다.

$$T(\phi, t) dS = \left[ (d \cdot dA \cdot dS) \left[ z \frac{\partial^2 \psi(\phi, t)}{\partial t^2} \right] \right] (z) \quad (13)$$

(13)式은 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} T(\phi, t) &= d \frac{\partial^2 \psi(\phi, t)}{\partial t^2} \int z^2 dA \\ &= \frac{m}{A} (-\omega^2 \psi \sin \omega t) I \\ &= -m \frac{I}{A} \omega^2 \sin \omega t \\ &= -T \sin \omega t \end{aligned} \quad (14)$$

(14)式에서  $d$ 는  $\frac{m}{A}$ 과 같고 調和振動式  $T(\phi, t)$ 의 振幅  $T$ 는 다음 式과 같다.

$$\begin{aligned} T &= m \frac{I}{A} \omega^2 \psi \\ &= m\omega^2 r^2 \psi \end{aligned} \quad (15)$$

(15)式에서  $r$ 은 아치斷面の 回轉半徑이다.

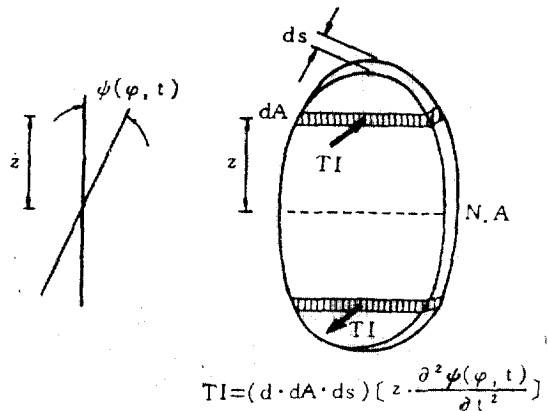


그림 2. Tangential inertia forces due to the arch element rotation  $\psi$

### 2.4 平衡方程式

그림 3과 같이 弧의 길이  $dS = \rho d\phi$ 를 갖는 아치의 微小要素에 대한 平衡을 생각한다. 아치가 振動하면 前述한 바와 같이 이 微小要素에는 變位에 의한  $N$ ,  $V$ ,  $M$ 과 慣性에 의한  $P_t$ ,  $P_r$ ,  $T$ 가 發生한다. 이 微小要素에 作用하는  $N$ ,  $V$ ,

$M$ ,  $P_t$ ,  $P_r$  및  $T$ 에 대한 平衡方程式을 세우면 다음과 같다.

$$\frac{dN}{d\varphi} - V + \rho P_t = 0 \quad (16)$$

$$\frac{dV}{d\varphi} + N + \rho P_r = 0 \quad (17)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{dM}{d\varphi} - V - T = 0 \quad (18)$$

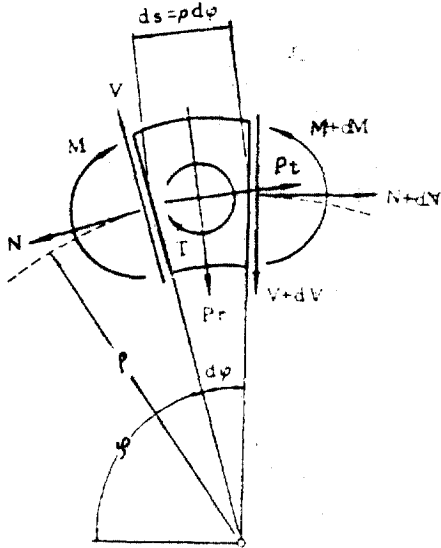


그림 3. Diagram of forces acting on the arch element

### 3. 微分方程式의 誘導

#### 3.1 變數變換

以上에서 언급한 基本理論을 그림 4와 같이 支間길이  $l$ , 높이  $h$ 인 拋物線아치의 平面內 自由振動에 適用시킨다. 이때 아치軸의 方程式은 直交座標係  $(x, y)$ 에서 다음과 같이 表示된다.

$$y = kx(x-l) \quad (19)$$

(19)式에서  $k$ 는 다음과 같다.

$$k = -\frac{4h}{l^2} \quad (20)$$

그림 4에서 拋物線의 任意點  $S_0(x, y)$ 에서 曲率半徑  $\rho(x)$ , 曲率中心方向과 水平軸이 이루는 角度를  $\varphi(x)$ 라 하면 이들은  $x$ 에 관한 函數로 表示될 수 있다.

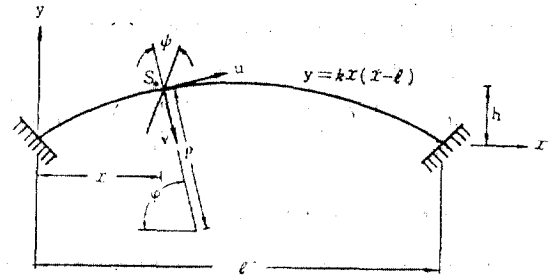


그림 4. Configuration of fixed ended parabolic arch

$$\rho(x) = -\frac{\xi_1^{3/2}}{2k} \quad (21)$$

$$\varphi(x) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} k(2x-l) \quad (22)$$

(21)式에서  $\xi_1$ 은 (23)式과 같고, 이 後에  $\rho(x)$  및  $\varphi(x)$ 는  $\rho$ 와  $\varphi$ 로 各各 表示한다.

$$\xi_1 = 1 + k^2(2x-l)^2 \quad (23)$$

前章에서  $\varphi$ 에 대한 基本理論의 微分方程式들을  $x$ 에 대한 拋物線아치의 微分方程式들로 變數變換하기 위하여 (22)式을 微分하여 다음 式을 求한다.

$$d\varphi = -2k\xi_1^{-1}dx \quad (24)$$

(24)式을 利用하면  $\frac{dv}{d\varphi}$ 와  $\frac{d^2v}{d\varphi^2}$ 를 다음과 같이  $x$ 의 微分으로 變換시킬 수 있다.

$$\frac{dv}{d\varphi} = -\frac{\xi_1}{2k}v' \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2v}{d\varphi^2} &= \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{dv}{d\varphi} \right) \\ &= -\frac{\xi_1^2}{4k^2}v'' + \xi_1\xi_2v' \end{aligned} \quad (26)$$

(25), (26)式에서  $v' = \frac{dv(x)}{dx}$ ,  $v'' = \frac{d^2v(x)}{dx^2}$ 를 意味하며 즉 프라임(')은 基準函數의  $x$ 에 대한 微分을 나타낸다. 또 (26)式에서  $\xi_2$ 는 다음과 같다.

$$\xi_2 = 2x-l \quad (27)$$

위와 마찬가지로 方法으로 다음의 關係式들을 얻을 수 있다.

$$\frac{du}{d\varphi} = -\frac{\xi_1}{2k}u' \quad (28)$$

$$\frac{dN}{d\varphi} = -\frac{\xi_1}{2k}N' \quad (29)$$

$$\frac{d\phi}{d\varphi} = -\frac{\xi_1}{2k}\phi' \quad (30)$$

$$\frac{d^2\phi}{d\phi^2} = -\frac{\xi_1^2}{4k^2}\phi'' + \xi_1\xi_2\phi' \quad (31)$$

$$\frac{d\psi}{d\phi} = -\frac{\xi_1}{2k}\psi' \quad (32)$$

또한 (21), (24)식을 利用하면  $\frac{d\rho}{d\phi}$ ,  $\frac{d}{d\phi}\left(\frac{1}{\rho}\right)$  을  $x$ 의 函數로 나타낼 수 있다.

$$\frac{d\rho}{d\phi} = \frac{3}{2}\xi_1^{3/2}\xi_2 \quad (33)$$

$$\frac{d}{d\phi}\left(\frac{1}{\rho}\right) = -6k^2\xi_1^{-3/2}\xi_2 \quad (34)$$

### 3.2 微分方程分의 誘導

平衡方程式 (18)식을 剪斷力  $V$ 에 대하여 整理하면 다음과 같다.

$$V = \frac{1}{\rho} \frac{dM}{d\phi} - T \quad (35)$$

(4)式에서  $\frac{dM}{d\phi}$  을 求하면 다음과 같다.

$$\frac{dM}{d\phi} = EI \frac{d\phi}{d\phi} \quad (36)$$

(35)式에 (36)式 및 (15)式을 代入하면 다음 式과 같다.

$$V = \frac{EI}{\rho} \frac{d\phi}{d\phi} - m\omega^2 r^2 \psi \quad (37)$$

(37)式에서  $\frac{dV}{d\phi}$  를 求하면 다음과 같다.

$$\frac{dV}{d\phi} = \frac{EI}{\rho} \frac{d^2\phi}{d\phi^2} + EI \frac{d}{d\phi} \left( \frac{1}{\rho} \right) \frac{d\phi}{d\phi} - m\omega^2 r^2 \frac{d\psi}{d\phi} \quad (38)$$

平衡方程式 (16)式에 (37)式을 代入하면 (39)式을 얻을 수 있고, 平衡方程式 (17)式에 (38)式을 代入하면 (40)式을 얻을 수 있다.

$$\frac{dN}{d\phi} - \frac{EI}{\rho} \frac{d\phi}{d\phi} + Rm\omega^2 r^2 \psi + \rho P_1 = 0 \quad (39)$$

$$\frac{EI}{\rho} \frac{d^2\phi}{d\phi^2} + EI \frac{d}{d\phi} \left( \frac{1}{\rho} \right) \frac{d\phi}{d\phi} - Rm\omega^2 r^2 \frac{d\psi}{d\phi} + N + \rho P_1 = 0 \quad (40)$$

(39), (40)式에서  $\psi$ 의 項은 (15)式에서 보인 것처럼 回轉慣性의 項이므로 微分方程式에 回轉慣性의 考慮與否를 나타내는 回轉慣性指標  $R$ 을 곱하였고,  $R$ 은 다음과 같다.

$$\text{回轉慣性을 考慮하는 境遇, } R=1. \quad (41)$$

回轉慣性을 無視하는 境遇,  $R=0$ . (42)

(39)式에 (29), (21) 및 (30)式을 代入하고 整理하면 (43)式을, (40)式에 (21), (31), (34), (30) 및 (32)式을 代入하고 整理하면 (44)式을 얻을 수 있다.

$$N' + 2EI k \xi_1^{-3/2} \phi' - 2Rk m \omega^2 r^2 \xi_1^{-1} \psi + \xi_1^{1/2} P_1 = 0 \quad (43)$$

$$EI \phi'' - 2EI k^2 \xi_1^{-1} \xi_2 \phi' - Rm\omega^2 r^2 \xi_1^{1/2} \psi' - 2k \xi_1^{-1/2} N + \xi_1 P_1 = 0 \quad (44)$$

(3)式에 (21)式 및 (28)式을 代入하면  $x$ 의 函數로 表示된  $N$ 을 求할 수 있고, 이를 微分하여  $N'$ 를 求하면 다음과 같다.

$$N = EA (\xi_1^{-1/2} u' + 2k \xi_1^{-3/2} v) \quad (45)$$

$$N' = EA (\xi_1^{-1/2} u'' - 2k^2 \xi_1^{-3/2} \xi_2 u' + 2k \xi_1^{-3/2} v' - 12k^3 \xi_1^{-5/2} \xi_2 v) \quad (46)$$

마찬가지 方法으로  $\phi'$ ,  $\phi''$  및  $\psi$ ,  $\psi'$ 를 求하면 다음 式들과 같다.

$$\phi' = -\xi_2^{-1} v''' + (32k^4 \xi_1^{-3} \xi_2^2 - 4k^2 \xi_1^{-3} - 8k^2 \xi_1^{-2}) v'' + 48k^4 \xi_1^{-4} \xi_2 v - 12k^3 \xi_1^{-3} \xi_2 u' + (144k^5 \xi_1^{-4} \xi_2^2 - 24k^3 \xi_1^{-3}) u \quad (47)$$

$$\phi'' = -\xi_1^{-1} v'''' + 4k^2 \xi_1^{-2} \xi_2 v''' + (32k^4 \xi_1^{-3} \xi_2^2 - 4k^2 \xi_1^{-3} - 8k^2 \xi_1^{-2}) v'' + (-384k^5 \xi_1^{-4} \xi_2^3 + 96k^4 \xi_1^{-4} \xi_2 + 192k^4 \xi_1^{-3} \xi_2) v' + (-768k^5 \xi_1^{-5} \xi_2^2 + 96k^4 \xi_1^{-4}) v - 12k^3 \xi_1^{-3} \xi_2 u'' + (288k^5 \xi_1^{-4} \xi_2^2 - 48k^3 \xi_1^{-3}) u' + (-2304k^7 \xi_1^{-5} \xi_2^3 + 864 \xi_1^{-4} \xi_2) u \quad (48)$$

$$\psi = \xi_1^{-1/2} v' - 2k \xi_1^{-3/2} u \quad (49)$$

$$\psi' = \xi_1^{-1/2} v'' - 2k^2 \xi_1^{-3/2} \xi_2 v' - 2k \xi_1^{-3/2} u' + 12k^3 \xi_1^{-5/2} \xi_2 u \quad (50)$$

(43)式에 (46), (47), (49) 및 (10)式을 代入하고 整理하면 (51)式을 얻을 수 있고, (44)式에 (48), (47), (50), (45) 및 (11)式을 代入하고 整理하면 (52)式을 얻을 수 있다.

$$u'' = 2kr^2 \xi_1^{-2} v'' + (8k^3 r^2 \xi_1^{-4} - 64k^5 r^2 \xi_1^{-4} \xi_2^2 + 16k^3 r^2 \xi_1^{-3} - 2k \xi_1^{-1} + 2RkF \xi_1^{-1}) v' + (-96k^5 r^2 \xi_1^{-5} \xi_2 + 12k^3 \xi_1^{-2} \xi_2) v + (24k^4 r^2 \xi_1^{-4} \xi_2 + 24k^2 \xi_1^{-1} \xi_2) u' + (-288k^5 r^2 \xi_1^{-5} \xi_2^2 + 48k^4 r^2 \xi_1^{-4} - r^{-2} F \xi_1 - 4Rk^2 F \xi_1^{-2}) u \quad (51)$$

$$v'''' = 6k^2 \xi_1^{-1} \xi_2 v'''' + (32k^4 \xi_1^{-2} \xi_2^2 - 4k^2 \xi_1^{-2} - 8k^2 \xi_1^{-1} + Rr^{-2} F \xi_1) v'' + (-448k^5 \xi_1^{-3} \xi_2^3$$

$$\begin{aligned}
& +104k^4\xi_1^{-3}\xi_2^2+208k^4\xi_1^{-2}\xi_2 \\
& +2Rk^2r^{-2}F\xi_2)v'+(-864k^6\xi_1^{-4}\xi_2^2 \\
& +96k^4\xi_1^{-3}-4k^2r^{-2}\xi_1^{-1}+r^{-4}F\xi_1^2)v \\
& -12k^3\xi_1^{-2}\xi_2u''+(312k^5\xi_1^{-3}\xi_2^2-48k^3\xi_1^{-2} \\
& -2kr^{-2}+2Rkr^{-2}F)u'+(-2592k^7\xi_1^{-4}\xi_2^3 \\
& +912k^5\xi_1^{-3}\xi_2-12Rk^3r^{-2}F\xi_1^{-1}\xi_2)u(52)
\end{aligned}$$

(51), (52)式에서  $F$ 는 다음 식으로 주어지는 無次元振動數媒介變數이다.

$$F = \frac{m\omega^2 r^2}{EA} \quad (53)$$

以上에서 (51), (52)式이 回轉慣性を考慮한 拋物線아치의 自由振動에 관한 微分方程式이다.

### 3.3. 境界條件

$x=0$  및  $x=l$ 에서의 아치의 左右端은 固定이므로 境界條件은 다음과 같다.

$$u=0 \quad (54)$$

$$v=0 \quad (55)$$

$$\psi=0 \quad (56)$$

(56)式은 (49)式과 (54)式에 의하여 다음과 같이 된다.

$$v'=0 \quad (57)$$

以上에서 아치 左右端의 境界條件은 (54), (55) 및 (57)式과 같다.

### 3.4 微分方程式의 檢證

本 研究에서 誘導한 微分方程式을 檢證하기 위하여 拋物線아치에 대한 微分方程式을 보에 대한 微分方程式으로 收斂시켜서 比較한다.

拋物線아치에서 아치의 높이  $h$ 가 0으로 收斂하게 되면 拋物線아치는 보로 收斂한다.  $h=0$ 이므로 (20)式에서  $k=0$ 이 되고, (23)式에서  $\xi_1=1$ 이 된다. 本 研究에서 誘導한 (51), (52)式에  $k=0$ ,  $\xi_1=1$  및 (53)式의  $F=\frac{m\omega^2 r^2}{EA}$ 을 代入하면 다음 식들과 같이 된다.

$$u'' + \frac{m\omega^2}{EA}u = 0 \quad (58)$$

$$v'''' + R\frac{m\omega^2}{EA}v - \frac{1}{r^2}\frac{m\omega^2}{EA}v = 0 \quad (59)$$

(58)式 및 (59)式은 보의 自由縱振動 및 橫振動에 대한 微分方程式이며, 이 식들은 參考文獻들<sup>(10), (11)</sup>의 結果들과 一致되는 것을 알 수 있다.

## 4. 數值解析例

### 4.1 數值解析方法

微分方程式의 數值積分法에는 많은 方法들이 있지만 本 研究에서는 다른 方法에 비하여 精度가 높은 Runge-Kutta method<sup>(12)</sup>를 利用하여 數值積分하였다.

또한 微分方程式 (52), (53)式에는 不確定量  $F$ 의 項이 포함되어 있으므로 이  $F$ 의 값을 假定하여 微分方程式에 代入한 후에 數值積分을 施行한다.

Runge-Kutta method는 初期值問題이므로 아치左端의 境界條件을 利用하여 數值積分을 始作하고, 앞에서 假定한  $F$ 의 값이 自由振動의 固有值인지는 아치右端의 境界條件을 利用하여 判斷한다. 즉 아치의 左右端의 境界條件을 만족하는 自由振動의 固有值  $F$ 값을 찾기 위하여 試行錯誤的 固有值問題를 利用한다. 以上과 같은 數值解析方法에 대해서는 參考文獻(13)에 자세하게 說明되어 있다.

위의 같은 數值解析方法으로 無次元振動數媒介變數  $F$ 의 값을 찾으면, (53)式으로부터 固有振動數  $f$ 는 다음과 같이 求할 수 있다.

$$\begin{aligned}
f &= \frac{\omega}{2\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi r} \sqrt{\frac{EAF}{m}} \\
&= \frac{1}{2\pi r} \sqrt{\frac{EF}{d}} \quad (60)
\end{aligned}$$

### 4.2 本 研究와 SAP N의 結果比較

表 1은 支間길이는  $l=10$  m, 아치의 斷面은  $0.15 \times 0.64$  m의 矩形斷面에 대하여 아치의 높이를  $h=2$  m, 4 m, 6 m의 3가지 境遇에 대하여 最低次의 3個의 固有振動數를 本 研究의 數值解析結果와 SAP N<sup>(14)</sup>의 結果를 比較한 것이다.

表 1에서 보는 것처럼 두 方法의 數值結果는 아주 優秀하게 接近한 것을 알 수 있으며, 따라서 本 研究에서 誘導한 微分方程式과 數值解析方法의 妥當성을 立證할 수 있다.

表 1. 本研究와 SAP IV의 固有振動數 比較  
( $l=10$  m,  $0.15 \times 0.64$  m 矩形斷面)

아치 높이	mode	本研究 (f : cps)	SAP IV (f : cps)	誤差 (%)
2 m	1	69.1	70.1	1.43
	2	94.3	94.9	0.63
	3	148.4	150.7	1.53
4 m	1	41.2	41.5	0.72
	2	94.0	93.5	0.53
	3	133.2	133.4	0.15
6 m	1	25.2	25.3	0.39
	2	62.4	59.4	5.05
	3	105.7	103.8	1.83

- 註 1) 本研究: 回轉慣性考慮  
 2) SAP IV: 剪斷變形不考慮  
 3) 誤差: (本研究 - SAP IV) / SAP IV (%)의 절대값  
 4) 아치斷面の 기계적 性質  
 $E = 2.058 \times 10^{11}$  N/m<sup>2</sup>  
 $d = 7,850$  N-sec<sup>2</sup>/m<sup>4</sup>

#### 4.3 數值解析結果

表 2는 回轉慣性이 固有振動數에 미치는 影響을 分析하기 위하여  $R=0.$ 와  $R=1.$ 인 境遇에 대하여 固有振動數를 比較한 것이다. 表 2에서 처럼 回轉慣性은 固有振動數를 減小시키는 效果를 갖고 있으나, 그 影響은 比較的 적은 것을 알 수 있다.

表 2. 回轉慣性이 固有振動數에 미치는 影響  
( $l=10$  m,  $0.15 \times 0.64$  m의 矩形斷面)

아치 높이	mode	固有振動數 (cps)		$\frac{B-A}{A}$ (%)
		$R=0. (A)$	$R=1. (B)$	
2 m	1	69.5	69.1	-0.58
	2	94.5	94.3	-0.21
	3	150.2	148.4	-1.20
4 m	1	41.3	41.2	-0.24
	2	94.7	94.0	-0.74
	3	133.3	133.2	-0.08
6 m	1	25.2	25.2	0.
	2	62.7	62.4	-0.48
	3	106.7	105.7	-0.94
8 m	1	16.4	16.4	0.
	2	43.1	43.0	-0.23
	3	72.0	71.6	-0.56

註: 아치斷面の 기계적 性質은 表 1과 같음.

그림 5는  $l=10$  m에 대하여 固有振動數  $f$ 와 아치의 높이  $h$ 의 關係를 나타낸 것이다. 이 그림에서  $h=0$ 의 固有振動數는 參考文獻(15)에 의한 計算結果이며,  $h$ 가 0으로 收斂하게 되면 本研究의 數值解析 結果는 (58), (59)式에서 처럼 固有振動數로 收斂되는 것을 알 수 있다.

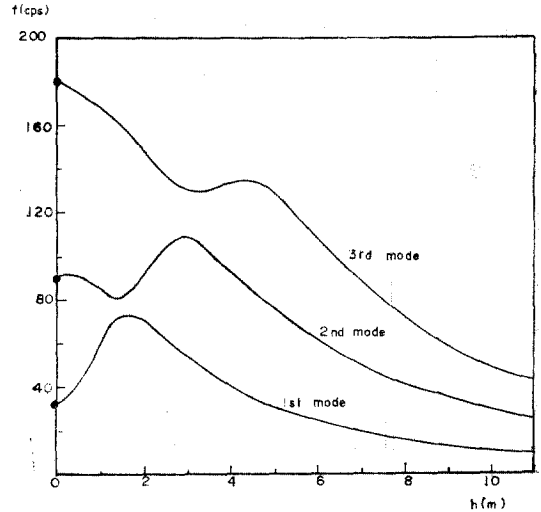


그림 5. Frequency vs. rise of arch curves  
( $l=10$  m,  $r=0.1848$  m,  $R=1.$ )

그림 6은  $l=10$  m,  $h=4$  m에 대하여 固有振動數  $f$ 와 回轉半徑  $r$ 과의 關係를 나타낸 것이다. 이 關係는 參考文獻(16)의 圓弧아치의 研究

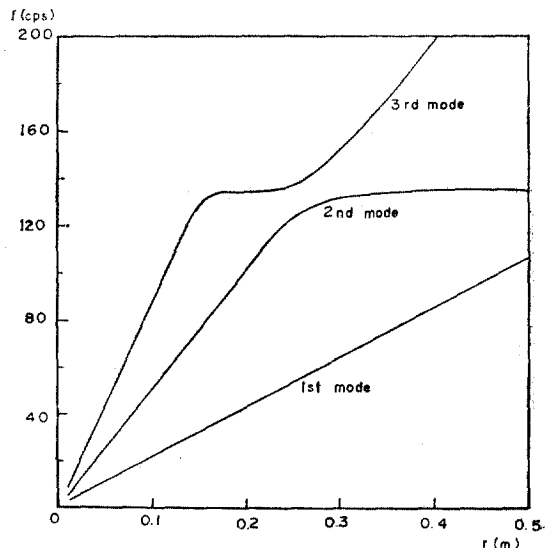


그림 6. Frequency vs. radius of gyration curves  
( $l=10$  m,  $h=4$  m,  $R=1.$ )

결과와 아주 類似한 結果를 보인다. 즉  $f-r$ 의 關係는  $r$ 軸과 傾斜를 이루는 直線部分,  $r$ 軸과 平行한 直線部分 및 이들 2個의 直線을 完만하게 連結시켜주는 曲線部分으로 되어있다. 또 2nd mode와 3rd mode의 傾斜直線部分은 거의 一直線上에 있으며, 이러한 특징은  $f-r$ 의 關係를 延長한다면 1st mode와 2nd mode, 3rd mode와 4th mode에 대해서도 같은 傾向을 나타낼 것으로 判斷된다.

## 5. 結 論

이 論文은 兩端固定 拋物線아치의 自由振動에 관한 研究로서 이 研究를 통하여 얻어진 結論은 다음과 같다.

(1) 아치의 微小要素에 作用하는 合應力과 慣性力에 대한 平衡方程式을 利用하여 回轉慣性을 考慮한 兩端固定 拋物線아치의 自由振動에 대한 基準函數의 微分方程式과 아치兩端의 境界條件을 誘導하였다.

(2) 위의 微分方程式을 Runge-Kutta method와 試行錯誤의 固有值問題를 利用하여 數值解析하였다. 實際의 數值適用例를 통하여 本 研究의 數值解析 結果와 SAP IV의 解析 結果가 잘 一致함을 보였다.

(3) 回轉慣性は 固有振動數를 減小시키는 要因이지만, 그 影響力은 매우 작은 것을 알 수 있다.

앞으로 더 많은 數值適用例를 통하여 더 광범위한 拋物線아치의 自由振動特性을 把握하고, 剪斷變形效果를 考慮한 微分方程式에 대해서는 계속적인 研究가 進行되어야 할 것이다.

## 참 고 문 헌

1. 황학주, "수평평하중을 받는 보강형을 가진 원호 아치에 대하여", 대한토목학회지, 제15권, 제3호 : 1967, p. 23.
2. Yuichi Hikami, "Wind Tunnel Test Methods and

- Facilities for Bridge Aerodynamic Stability Investigation", *IHI Report, Vol. 6*, 1982, p. 47~52.
3. Muppidi N. Reddy, "Lateral Vibrations of Plane Curved Bars", *Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 94, No. ST10*, p. 2197~2212.
4. Joseph A. Wolf, Jr., "Natural Frequencies of Circular Arches", *Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 97, No. ST9*, 1971, p. 2337~2350.
5. Walter J. Austin and Anestis S. Veletsos, "Free Vibration of Arches Flexible in Shear", *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 99, No. EM14*, 1973, p. 735~753.
6. Josef Henrych, *The Dynamics of Arches and Frames*, Elsevier, 1981, p. 18~34.
7. Demeter G. Fertis, *Dynamics and Vibration of Structures*, John Wiley & Sons, Inc., 1973, p. 3.
8. Shyr-jen Wung, "Vibration of Hinged Circular Arches", Thesis of Master of Science, Rice Univ., U.S.A., 1967, p. 10.
9. Shyr-jen Wung, *ibid*, p. 11.
10. G.B. Warburton, *The Dynamical Behaviour of Structures*, Pergamon Press, 1976, p. 111.
11. Ray W. Clough and Joseph Penzien, *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, Inc., 1982, p. 301.
12. Melvin J. Maron, *Numerical Analysis*, Macmillan Publishing Co., Inc., 1982, p. 344~352.
13. 이병구, "양단힌지 포물선아치의 자유진동에 관한 연구", 박사학위논문, 연세대학교 대학원, 1984.
14. Klaus-Jürgen Bathe, Edward L. Wilson and Fred E. Peterson, *SAP IV*, University of California, 1974.
15. Mario Paz, *Structural Dynamics*, Van Nostrand Reinhold Company, 1980, p. 371.
16. Anestis S. Veletsos, et al., "Free Vibration of Circular Arches", *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 98, No. EM 2*, 1972, p. 311~329.

(接受 : 1985. 5. 16)