產業科學技術硏究(江原大學校 產業技術硏究所 論文集) 第5輯(1985)
Research Report, The Institute of Industrial Technology, Kangweon Nat'l Univ., Korea, Vol. 5, 1985.

多種生產方式을 갖는 動的 롯트決定 問題에 관한 計劃期間 節次

盧 載 皓*

Planning Horizon Procedure for the Dynamic Lot Size Model with Multiple Production Modes

Jae-Ho Ro*

Abstract

This paper presents a problem of a Wagner-Whitin type in which there are several options for setup and production in a period. Theorems that efficiently decrease the computational effort required to find optimal policies and a Planning Horizon Theorem are developed.

I. 序 論

一般的인 動的 롯트 決定問題는 有限 計劃期間동안에 每 期間마다 롯트 크기를 決定하는 問題이다. 이때 전혀 生產을 하지 않는 期間도 存在할 수 있다. 그러나 이러한 類型의 問題들이 모두 單一生產方式을 假定하여, 每 期間별 生產量만을 決定하고 있다. 本 論文에서는 生產現場에서 여러 方法으로 生產이 可能한 경우, 每 期間의 롯트 크기뿐만 아니라 生產形態도 함께 決定할 수 있는 動的 롯트 決定問題을 硏究하고자 한다.

動的 롯트 決定問題에 관한 硏究는 Wagner-Whitin [3]에 의해 소개되었다. 그들은 單一 製品生產에서 item의 生產(혹은 購入), 販賣價格이 一定한 경우 經濟的 一回 生產量(lot)이 期間에 따라 變化하는 動的인 경우, 總費用을 最小化하는 最適解를 求할 수 있는 前進解法(forward algorithm)과 最適政策의 動的計劃 特性으로부터 計算量을 상당히 減小시킬 수 있는 效果的인 計劃期間 定理(Planning horzion theorem)을 開發하였다.

Zablel, Eppen[2, 3] 등은 item의 生產 ,販賣價格들이 時間에 따라 變化하는 경우를 다룰 수 있도록 Wagner-Whitn의 結果를 擴張하였으며, 一般的인 計劃期間 定理(general planning horizon)를 開發하였다.

Blackburn[1] 등은 積滯(backlogging)가 있는 좀 더 現實的인 경우로 Zablel, Eppen의 結果를 擴張하였다. 이러한 硏究들은 單一 生產方式에 대해 硏究되었다.

따라서, 本 硏究에서는 多種生產方式이 存在하는 좀더 現實的인 경우에 대해서 動的 롯트 決定問題를 다루는데, II절에서는 이러한 경우에 對한 數學的 모델을 定立하여, 이를 前進定

*江原大學校 工科大學 產業工學科 專任講師
*Full-time Instructor, Dep't of Industrial Engineering, Kangweon National University

式(forward formulation)으로 變形하고, Ⅲ절에서는 計算時間을 줄일 수 있는 定理들과 計劃期間 定理를 誘導하며, Ⅳ절에서는 앞 절에서 開發된 定理들을 利用하는 計算節次를 세워 簡單한 例題에 適用하여 보려한다.

Ⅱ. 定 式 化

모델 定立을 위해 使用된 記號들은 다음과 같다.

〈記號說明〉

N : 計劃期間(總 生産週期의 數)

x_t : t번째 期間에서의 生産量

m_t : t번째 期間에서의 生産方式

d_t : t번째 期間에서의 需要

$S^m{}_t$: m 生産方式으로 t번째 期間에서의 生産準備費

$P^m{}_t$: m 生産方式으로 t번째 期間에서의 單位當 生産費

h_t : t번째 期間에서의 單位當 在庫 維持費

I_t : t번째 期間에서의 在庫水準

여기서 品切은 허용하지 않고, 生産量은 크기에 制限이 없다고 假定하면 計劃期間동안의 總費用을 最小化하는 數學的 모델은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$P1 ;\ \min_{x_t, m_t} \left[\sum_{t=1}^{N} \{ S_t^m \cdot \delta(x_t) + P_t^m \cdot x_t + h_t \cdot I_t \} \right] \tag{1}$$

$$s \cdot t \quad I_t = I_{t-1} + x_t - d_t \tag{2}$$

여기서, $I_0 = I_N = 0$

$$\delta(x_t) = \begin{cases} 0, & x_t = 0 \\ 1, & x_t > 0 \end{cases}$$

Wagner-Whitin〔3〕에서와 같이 前進定式(forward formulation)을 만들기 위한 다음 4가지의 定理를 證明없이 展開한다.

〔定理 1〕 모든 t에 대해 $I_{t-1} \cdot x_t = 0$인 最適解가 存在한다.

〔定理 2〕 $t_1 (\leq t_2)$ 時點의 需要가 x_t에 의해 만족된다며. t_1과 t_2사이의 需要는 모두 x_t에 의해 만족되는 最適解가 存在한다.

〔定理 3〕 모든 t에 대해, $x_t = 0$ 또는 $x_t = \sum_{i=t}^{k} d_i$, $t \leq k \leq N$ 인 最適解가 存在한다.

〔定理 4〕 $I_t = 0$이면, 期間1부터 t까지의 問題를 따로 고려하여 最適化할 수 있다.

위와 같은, 定理 1부터 定理 4까지의 最適解에 대한 性質을 利用함으로써 無限히 많은 候補解를 限定된 數로 줄일 수 있다. 이들 定理를 利用하여 定式化된 問題 P1을 다음 記號를 使用하여 前進定式으로 展開할 수 있다.

〈記號說明〉

$f(t)$: t期間問題의 最小費用

$\ell(t)$: t期間問題의 最適解에서 最終生産準備가 發生하는 時點

$m(t)$: $\ell(t)$時點에서의 生産方式

$f^m(\ell, t)$: t期間問題에서 最終生産準備가 ℓ이고, 그때의 生産方式이 m일때의 最小費用

그러면,

$$f^m(\ell, t) = f(\ell-1) + S_t^m + P_t^m \sum_{i=\ell}^{t} d_i + \left[\sum_{i=\ell}^{t-1} h_i \cdot \left\{ \sum_{j=i+1}^{t} d_j \right\} \right] \tag{3}$$

$$f(t) = \min_{\ell, m} \{ f^m(\ell, t) \} = f^{m(t)}(\ell(t), t), \quad f(0) = 0 \tag{4}$$

單一 生産方式인 경우, 즉 $m(t) = m$ 이면 式(4)는 Eppen〔2〕의 式과 같아진다. 따라서 Eppen이 展開한 方法을 따라 計劃期間 定理를 開發하면 다음과 같다.

Ⅲ. 計劃期間 定理

앞 Ⅱ절의 4개 定理는 効率的으로 計算量을 줄일 수 있다. 여기서는 最適이 될 수 있는 候補를 더욱 줄이고, 또한 어떤 一定期間동안의 解가 앞으로의 需要變化에 관계없이 항상 最適解가 되는 條件을 보장하는 計劃期間 定理를 開發하려한다.

우선 다음과 같은 集合을 定義한다.

$$W^m(t_1, t_2) = \{ (t, n) ;\ t \in \{1, 2, \cdots, t_2\},\ n \in \{1, 2, \cdots, M\} \mid A^n(t, t_2) < A^m(t_1, t_2) \} \tag{5}$$

여기서, $A^m(t_1, t_2) = P_{t_1}^m + \sum_{i=t_1}^{t_2-1} h_i$ 이고 (6)

$A^m(t,t) = P_t^m$ 이다. (7)

〔定理 5〕

A. 어떤 t에 대해, $f^m(\ell, t+1) < f^{m(t)}(\ell(t), t+1)$ 이면, $(\ell, m) \in W^{m(t)}(\ell(t), t+1)$ 이다.

B. 어떤 $t_1 < t_2$인 期間들에 대해서는 $(\ell(t_2), m(t_2)) = (\ell(t_1), m(t_1))$ 이거나 $(\ell(t_2), m(t_2)) \in W^{m(t)}(\ell(t_1), t_2)$ 이다.

證明) 證明은 附錄 A, B에 있음

이제 計劃期間 定理를 誘導하기 위해 $(\ell^*(t), m^*(t))$를 $\ell \in \{1, 2, \cdots, t\}$, $m \in \{1, 2, \cdots, M\}$ 중에서 $A^m(\ell, t)$를 最小化하는 하나의 解라하고, θ_t를 적어도 하나의 m에 대해

$(\theta, m) \in W^{m^*(t)}(\ell^*(t), \theta)$가 되는 가장 적은 θ $(>t)$라 定義한다.

〔定理 6 計劃期間 定理〕

$f(t_1) = f^{m^*(t)}(\ell^*(t_1), t_1)$ 이라면, 어떤 計劃期間이 더 긴 問題에서도 最終 生產準備가 期間 $\ell^*(t_1)$에서 있고, 그때의 生產方式이 $m^*(t_1)$인 하나의 最適解가 存在한다. 그러므로, $\ell^*(t_1)-1$ 期間이 하나의 計劃期間이다.

證明) 證明은 附錄 C에 있음

Ⅳ. 計算節次 및 例題

앞에서 誘導된 定理들을 利用하고, 計劃期間을 決定하기 위해, 다음과 같은 計算節次를 使用한다.

期間 t에 對하여,

1. $A^m(j,t)$를 計算한다.
2. $A^m(j,t)$값중 最小값의 (j,m), 즉 $\ell^*(t)$와 $m^*(t)$를 求한다.
3. $A^{m(t-1)}(\ell(t-1), t)$ 보다 적은 값을 나타내는 (j,m), 즉 $W^{m(t-1)}(\ell(t-1), t)$를 求한다.
4. $(\ell(t-1), m(t-1)) \cup W^{m(t-1)}\{\ell(t-1), t\}$에 속하는 (j,m)에 대해서만 $f^m(j,t)$를 計算한다. (단, 첫번째 期間에서는 定義되지 않으므로 모든 m에 대해서 $f^m(1,1)$을 計算한다.)
5. $f^m(j,t)$중 最小값을 보여주는 (j,m), 즉 $(\ell(t), m(t))$와 $f(t)$를 求한다.
6. $(\ell(t), m(t)) = (\ell^*(t), m^*(t))$ 이면, 1부터 $\ell(t)-1$은 하나의 計劃期間이다.
7. t+1 期間 問題에 對하여 위 節次를 反復 遂行한다.

Table 1. Data of the Example

	mode \ t	1	2	3	4	5
S_t^m	1	900	800	900	1,000	600
	2	800	700	1,000	700	700
P_t^m	1	8	6	7	7	9
	2	9	5	5	8	6
h_t		1	1	1	1	1
d_t		200	100	500	300	200

期間이 5이고, 生產方式이 2가지인 경우, 簡單한 例題를 통해 計算節次와 計算量의 減小, 計劃期間 定理의 成立함을 보이고자 한다.

表 1은 관련된 資料를 나타낸다.

表 2는 앞서 提示한 計算節次를 나타내고 있다. 表 2의 結果를 考察하면, 最適解는 期間 1에 生產方式 1로 300個를 生產하고, 期間 3에 生產方式 2로 1,000個를 生產할 경우 總 費用이 10,100으로 最小가 된다. $f^m(j,t)$의 計算은 〔定理 5〕로부터 効率的으로 減小되었다. (30번에서 14번으로 줄어듬).

또한, 期間 3까지의 最適解는 期間이 더 延長되어 資料가 첨가되더라도 變化가 없는 하나의 計劃期間이 된다.

Table 2. Computational Results of the Example

	j \ m \ t		1	2	3	4	5
$A^m(j,t)$	1	1	8	9	10	11	12
		2	9	10	11	12	13
	2	1		6	7	8	9
		2		5	6	7	8
	3	1			7	8	9
		2			5	6	7
	4	1				7	8
		2				8	9
	5	1					9
		2					6
$f^m(j,t)$	1	1	900+8×200 =2500	900+8×200+9 ×100=3400	8400	—	—
		2	800+9×200 =2600	—	—	—	—
	2	1		2500+800+ 6×100=3900	2500+800+6×100 +7×500=7400	—	—
		2		2500+700+ 5×100=3700	2500+700+5×100 +6×500=6700	8800	—
	3	1			3400+900+7 ×500=7800	—	—
		2			3400+1000+5 ×500=6900	8700	10100
	4	1				—	—
		2				—	—
	5	1					—
		2					8700+700+6 ×200=10600
$f(t)$			2500	3400	6700	8700	10100
$(\ell(t),\ m(t))$			(1, 1)	(1, 1)	(2, 2)	(3, 2)	(3, 2)
$(\ell^*(t),\ m^*(t))$			(1, 1)	(2, 2)	(3, 2)	(3, 2)	(5, 2)
$(\ell(t-1),\ m(t-1))\cup W^{m(t-1)}(\ell(t-1),t)$			not define	(1, 1), (2, 1), (2, 2)	(1, 1), (2, 1), (2, 2) (3, 1), (3, 2)	(2, 2), (3, 2)	(3, 2), (5, 2)

參 考 文 獻

1. Blakburn, J.D. and Kunreuther, H., "Planning Horizons for the Dynamic Lot Size Model with Backlogging", MANAGEMENT SCIENCE, 21, 3, 251—255(1974).
2. Eppen, G.D, et. al., "Extensions of the Planning Horizon Theorem in the Dynamic Lot Size Model", MANAGEMENT SCIENCE, 15, 5, 268—277, (1969).
3. Wagner, H.M. and Whithin, T.M., "Dynamic Version of the Economic Lot Size Model, "MANAGEMENT SCIENCE, 5, 1, 89—86, (1958).
4. Zabel, E., "Some Generalizations of an Inventory Planning Horizon Theorem", MANAGEMENT SCIENCE, 10, 3, 465—471, (1964).

<附　　錄>

A. 定理 5—A

證明) i) $1 \leq \ell \leq t$인 경우

$$f^m(\ell, t+1) = f^m(\ell, t) + P_\ell^m \cdot d_{t+1} + \{\sum_{i=\ell}^{t} h_i\} \cdot d_{t+1}$$

이와 유사하게,

$$f^{m(t)}(\ell(t), t+1) = f^{m(t)}(\ell(t), t) + P_{\ell(t)}^{m(t)} \cdot d_{t+1} + \{\sum_{i=\ell(t)}^{t} h_i\} \cdot d_{t+1}$$

그러므로,

$$f^m(\ell, t+1) - f^{m(t)}(\ell(t), t+1)$$

$$= \{f^m(\ell, t) - f^{m(t)}(\ell(t), t)\} + \{P_\ell^m + \sum_{i=\ell}^{t} h_i - P_{\ell(t)}^{m(t)} - \sum_{i=\ell(t)}^{t} h_i\} \cdot d_{t+1} < 0.$$

$f^m(\ell, t) > f^{m(t)}(\ell(t), t)$이므로, 윗식은

$$P_\ell^m + \sum_{i=\ell}^{t} h_i < P_{\ell(t)}^{m(t)} + \sum_{i=\ell(t)}^{t} h_i$$

따라서, 定義로부터

$(\ell, m) \in W^{m(t)}(\ell(t), t+1)$

ii) $\ell = t+1$인 경우

$$f^m(t+1, t+1) = f^m(t, t) + S_{(t+1)}^m + P_{t+1}^m \cdot d_{t+1}$$

$$f^m(t+1, t+1) - f^{m(t)}(\ell(t), t+1)$$

$$= \{f^m(t, t) - f^{m(t)}(\ell(t), t)\} + S_{t+1}^m + \{P_{t+1}^m - P_{\ell(t)}^{m(t)} - \sum_{i=\ell(t)}^{t} h_i\} \cdot d_{t+1} < 0.$$

$f^m(t, t) \geq f^{m(t)}(\ell(t), t)$이고, $S_{t+1}^m > 0$ 이므로

$$P_{t+1}^m < P_{\ell(t)}^{m(t)} + \sum_{i=\ell(t)}^{t} h_i$$

따라서, $(t+1, m) \in W^{m(t)}(\ell(t), t+1)$이다.

i) 과 ii)로부터 定理 5—A는 成立한다.

B. 定理 5—B

證明) 數學的 歸納法으로 證明코저 한다.

1) t_1+1인 경우는 定理 5—A에서 $t_2 = t_1+1$로 하면 成立한다.

2) $t_2 = t_1+k$인 경우,

$(\ell(t_1+k),\ m(t_1+k)) = (\ell(t_1),\ m(t_1))$ 이거나

$(\ell(t_1+k),\ m(t_1+k)) \in W^{m(t_1)}(\ell(t_1), t_1+k)$

3) $t_2 = t_1+k+1$인 경우,

$(\ell(t_1+k+1),\ m(t_1+k+1)) = (\ell(t_1),\ m(t_1))$이거나

$(\ell(t_1+k+1),\ m(t_1+k+1)) \in W^{m(t_1)}(\ell(t_1),\ t_1+k+1)$임을 보이면 된다

定理 5—A에 의해서.

$(\ell(t_1+k+1),\ m(t_1+k+1)) = (\ell(t_1+k),\ m(t_1+k))$이거나

$(\ell(t_1+k+1),\ m(t_1+k+1)) \in W^{m(t_1+k)}(\ell(t_1+k),\ t_1+k+1)$이다.

i) $(\ell(t_1+k+1),\ m(t_1+k+1))=(\ell(t_1+k),\ m(t_1+k))$인 경우,

$(\ell(t_1+k+1),\ m(t_1+k+1))=(\ell(t_1),\ m(t_1))$이거나

$(\ell(t_1+k+1),\ m(t_1+k+1))=(\ell(t_1+k),\ m(t_1+k))$

$\in W^{m(t_1)}(\ell(t_1),\ t_1+k)\subseteq W^{m(t_1)}(\ell(t_1),\ m(t_1+k+1))$이다.

ii) $(\ell(t_1+k+1),\ m(t_1+k+1))\in W^{m(t_1+k)}(\ell(t_1+k),\ t_1+k+1)$인 경우,

$(\ell(t_1+k), m(t_1+k))=(\ell(t_1),\ m(t_1))$이면, 원하는 結果를 얻을 수 있다.

$(\ell(t_1+k),\ m(t_1+k))\in W^{m(t_1)}(\ell(t_1),\ t_1+k)$ 이면, 定義로부터, $A^{m(t_1+k)}(\ell(t_1+k),\ t_1+k)<A^{m(t_1)}(\ell(t_1),\ t_1+k)$이다.

양변에 h_{t_1+k}를 더하면,

$A^{m(t_1+k)}(\ell(t_1+k),\ t_1+k+1)<A^{m(t_1)}(\ell(t_1),\ t_1+k+1)$,

$A^{m(t_1+k+1)}(\ell(t_1+k+1),\ t_1+k+1)<A^{m(t_1+k)}(\ell(t_1+k),\ t_1+k+1)$,

$A^{m(t_1+k+1)}(\ell(t_1+k+1),\ t_1+k+1)<A^{m(t_1)}(\ell(t_1),\ t_1+k+1)$ 이므로 $(\ell(t_1+k+1),\ m(t_1+k+1))$ $\in W^{m(t_1)}(\ell(t_1),\ t_1+k+1)$이다.

따라서, i), ii)로부터, $t_2=t_1+k+1$ 경우도 成立한다.

그러므로, 1), 2), 3)으로부터 定理 5—B는 成立한다.

C' 定理 6 : Planning Horizon Theorem

證明) i) $t_1<t_2<\theta_{t_1}$인 경우,

$W^{m^*(t_1)}(\ell^*(t_1),\ t_2)$는 공집합(empty set)이다.

그러므로, 定理 5에 의해

$(\ell(t_2),\ m(t_2))=(\ell^*(t_1),\ m^*(t_1))$이므로 원하는 結果를 얻는다.

ii) $t_2>\theta_{t_1}$이라면,

우선 $\theta_{t_1}+1$期間 問題를 考察해 보면, 어떤 m에 대해서, $(\theta_{t_1}+1,\ m)\notin W^{m^*(t_1)}(\ell^*(t),\ \theta_{t_1}+1)$이고 $\ell(\theta_{t_1}+1)\neq\theta_{t_1}+1$이다.

그러므로, $(\ell(\theta_{t_1}+1),\ m(\theta_{t_1}+1))=(\ell^*(t_1),\ m^*(t_1))$이거나 $\ell(\theta_{t_1}+1)=\theta_{t_1}$이고, 이는 원하는 結果을 얻을 수 있다. 어떤 m에 대해서

$(\theta_{t_1}+1)\in W^{m^*(t_1)}(\ell^*(t_1),\ \theta_{t_1}+1)$이라면,

$(\ell(\theta_{t_1}+1),\ m(\theta_{t_1}+1))=(\ell^*(t_1),\ m^*(t_1))$ 또는

$\ell(\theta_{t_1}+1)=\theta_{t_1}$, 또는 $\ell(\theta_{t_1}+1)=\theta_{t_1}+1$이다.

그러므로,

$$f(\theta_{t_1}+1)=\min\begin{cases}\cdot\ f^{m^*(t_1)}(\ell^*(t_1),\ \theta_{t_1}+1)\\ \cdot\ f(\theta_{t_1})+\underset{m}{\mathrm{Min}}\{S^m_{\theta_{t_1}+1}+P^m_{\theta_{t_1}+1}\cdot d_{\theta_{t_1}+1}\}\\ \cdot\ f(\theta_{t_1}-1)+\underset{m}{\mathrm{Min}}\{S^m_{\theta_{t_1}}+P^m_{\theta_{t_1}}\cdot(d_{\theta_{t_1}}+d_{\theta_{t_1}+1})+h_{\theta_{t_1}}\cdot d_{\theta_{t_1}+1}\}\end{cases}$$

iii) $t_2=\theta_{t_1}$이라면.

어떤 m에 대해 $(\theta_{t_1},\ m)\in W^{m^*(t_1)}(\ell^*(t_1),\ t_2)$이다.

그러므로, $(\ell(t_2),\ m(t_2))=(\ell^*(t_1),\ m^*(t_1))$이거나

$\ell(t_2)=t_2=\theta_{t_1}$이다. 여기서 前者의 경우는 定理가 成立한다. 後者의 경우는 生產準備가 $\ell^*(t_1)$ 期間에 있고, 그때의 生產方式이 $m^*(t_1)$인 $\theta_{t_1}-1$ 期間 問題가 된다.

그러므로, i), ii), iii)의 모든 경우에 生產準備가 $\ell^*(t_1)$에서 있고, 그때의 生產方式이 $m^*(t_1)$인 하나의 最適解가 存在한다. $\theta_{t_1}+2$, $\theta_{t_1}+3$………등 擴張의 경우에도 定理는 證明될 수 있다.