

構造物の 信賴度 解析모델에 關한 研究

李 奉 鶴*

A Study on Structural Reliability Analysis Models

Bong Hak Lee*

Abstract

Recently-used structural reliability models are studied, and the usage and characteristics of each method are discussed.

Although the First-Order Second Moment method may be efficient in structural reliability analysis, it has limitations which the limit state equation is linear and all the variables are normal.

In that point, the Advanced Second-Moment(ASM) method have many good results, but computation of iterative method are troublesome. The results of ASM method similar to Variance Reduction Techniques (VRT), which is one of the Monte Carlo simulation methods.

As a results, it is concluded that ASM method and VRT method are most efficient one.

1. 序 論

그동안 많은 학자들이 確率論에 입각한 安全 解析과 設計節次의 開發에 기여하여 왔다. 完全한 형태의 것은 60年代에 처음으로 形成되었지만, 그 以前에도 A. M. Freudenthal^{14, 15, 16}, A. M. Freudenthal 과 J. M. Garrelts 그리고 M. Shinozuka¹³, C. A. Cornell⁷, A. H. -S. Ang 과 M. Amin²⁰ 등에 의하여 여러 부류의 論文에서 거론되기도 하였다. 이러한 研究者들은 構造設計 分野에서 確率論의 概念 使用을 本格的으로 착수하게끔 하는 動機가 되게 하였다. 특히 1階 2次 모멘트 方法에 근거한 成文化된 設計 示方書를 낳는 結果를 가져오게 하였다. 이 系統의 전형적인 論文으로서는 C. A. Cornell⁸, F. Moses²⁰, A. H. -S. Ang²⁰, J. D. Stevenson²⁰, A. H. -S. Ang 과 C. A. Cornell¹,

M. K. Ravindra, N. C. Lind, W. Siu²³ 등이 다.

N. C. Lind, A. M. Hasofer, D. Veneziano 등의 노력에 의하여 상당한 理論의 背景을 가진 1階 2次 모멘트法을 제공하였는데 그 結果 M. K. Ravindra, T. V. Galambos²² 그리고 B. Ellingwood 등은 確率論에 기인한 荷重-抵抗係數 設計法(LRFD)을 開發하게 되었다.

構造物の 設計에는 여러 種類의 不確實量들이 存在하고 있다. 未來狀態의 荷重條件 豫測, 材料性質의 豫測 등은 事實상 부정확하며 또한 여러가지 착오 등에 의하여 構造物の 絶對적인 安全을 보장 한다는 것은 不可能 한 일이다.

構造物の 信賴性 解析問題에 對한 여러 종류의 方法들은 모두가 이러한 不確實量에 대한 要素들—平均, 分散, 標準偏差, 確率密度, 分布函數 等—을 고려하므로써 行하여 지고있다.

*江原大學校 工科大學 土木工學科 助教授

*Assistant Professor, Dep't of Civil Engineering, Kangweon National University.

위험을 算定하는 各各의 方法들은 分布函數, 또는 數值計算 方式에 따라 약간의 차이를 보이고 있는데 이 論文에서는 이제까지 發表되어 行하여지고 있는 信賴性 解析技法을 재음미 하고 比較算定 하므로써 效果적인 方法 또는 시뮬레이션을 제시하고자 한다.

2. 構造 信賴性 解析모델(古典的 方法)

構造物의 信賴度 解析과 危險率에 근거한 設計法에 대한 古典的 理論의 基本概念은 과기 많은 研究者들에 의하여 제안 되었다.^{1, 9, 13)}

構造物의 信賴度를 算定하는 첫번째 과정은 荷重과 抵抗要素들 간의 關係를 決定 짓는 것이다. 數學的으로는 이들 關係를 다음과 같은 式으로 表示할 수 있다.

$$Z = g(X_1, X_2, \dots, X_m) \dots\dots\dots(1)$$

이 式을 限界狀態 方程式이라고 하는데 破壞面 또는 極限狀態는 $Z=0$ 로 定義 될 것이며 $Z < 0$ 이면 破壞가 일어난다. 構造物의 極限狀態는 極限 構造物 破壞, 使用 不能狀態, 作動不能 中의 어느 하나로 表現되는데, 이러한 極限狀態面에 도달하려는 確率, 即 破壞確率 P_f 는

$$P_f = \int \dots \int f_x(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_1 dx_2 \dots dx_m \dots\dots(2)$$

로 表示될 수 있는데 여기서 $f_x(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 은 X_1, X_2, \dots, X_m 에 대한 共同 確率密度 函數이고 積分은 $g(\) < 0$ 인 極域에 對하여 수행되어진다. 一般的으로 確率密度 函數는 알려져 있지 않은 狀態이다.

具體的인 問題로서 抵抗要素를 R , 荷重要素를 S 라고 하고 그들의 確率密度 函數를 各各 $f_R(r)$, $f_S(s)$ 라고 한다면 破壞될 條件은 $R \leq S$ 이므로 破壞確率은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} P_f &= P(R \leq S) \\ &= \int_0^\infty \left[\int_0^\infty f_R(r) dr \right] f_S(s) ds \\ &= \int_0^\infty F_R(s) f_S(s) ds \dots\dots\dots(3) a \end{aligned}$$

$$\text{또는 } P_f = \int_0^\infty f_R(r) [1 - F_S(r)] dr \dots\dots\dots(3) b$$

(2)式이나 (3)式을 使用함에 있어서 어려운 점은 두가지가 있다. 첫째로, 큰 變數 偏差가 나는 범위일 때, 不足하며 不充分한 現存의 데이터에서 공동밀도 함수를 만든다는 것이 非實用的 命題이며, 둘째로는 (2)式에서와 같이 非正規領域에 對한 多重積分을 解析的으로 수행하기가 不可能하고, 단일 可能 하다면 數值計算을 하는데 큰 어려움이 따르게 될 것이다.²⁴⁾ 그러므로 이러한 古典的 理論은 安全解析에 있어서 論理的인 背景을 提供하는데 의의가 있는 모델이라고 할 수 있다.

3. 1階 2次 모멘트法(FOSM)

3. 1. 概 要

1階 2次 모멘트法(First-Order Second-Moment Method)은 기대되는 平均값과 分散으로 만들어질 수 있는 것들에 대해서만 制限하므로써 古典的인 方法에서와 같은 난점을 회피하기 위하여 導入 되었다.

基本變數 X_i 의 平均值 \bar{x}_i , 分散 $\sigma_{x_i}^2$ 또는 變動係數(Coefficient of Variation, COV)를 使用하여 Z 의 平均과 分散을 求할 수 있다. (1)式에서 $g(\)$ 를 Taylor Series로 展開하면 Z 에 대한 1階 平均과 分散을 나타낼 수 있다.^{1, 10, 17)} 즉,

$$\bar{Z} = g(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m) \dots\dots\dots(4)$$

$$\sigma_z^2 = \left[\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right) \left(\frac{\partial g}{\partial X_j} \right) \text{Cov}(X_i, X_j) \right] \dots\dots(5)$$

$g(\)$ 의 偏微分은 모든 要素의 平均值에 대하여 算定한다. $\text{Cov}(X_i, X_j)$ 는 X_i, X_j 의 共分散이다. 2次 平均(Taylor Series에서 2次項을 고려)은

$$\begin{aligned} \bar{Z} &= g(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \\ &\left[\left(\frac{\partial^2 g}{\partial X_i \partial X_j} \right) \text{Cov}(X_i, X_j) \right] \dots\dots\dots(6) \end{aligned}$$

로 표현 되는데 偏微分은 모든 要素의 平均值에 對하여 算定 되어진다. 2次 分散의 算出은 꽤 복잡하다. 實用的 目的을 위하여 2次 平均

과 1次 分散의 사용만으로도 工學的 目的에는 충분한 것으로 알려져 있다.

3. 2. 正規分布

抵抗 R 과 荷重 S 가 正規分布(Normal Distribution)를 한다고 가정하면 限界狀態 方程式 $Z=R-S$ 도 正規分布이므로 生存確率 $P_s(=1-P_f)$ 는 다음 式으로 表現된다.

$$P_s = 1 - P_f = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\beta} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \dots\dots\dots (7)$$

단, $\beta = \frac{\bar{R} - \bar{S}}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}$, \bar{R} , \bar{S} ; R 과 S 의 平均, σ_R , σ_S ; 각각 R 과 S 의 分散이다. (7)式을 標準化 變數로 나타내면

$$P_f = P[R - S < 0] = \Phi\left(\frac{\bar{R} - \bar{S}}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\bar{R} - \bar{S}}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}\right) = 1 - \Phi(\beta) \dots\dots\dots (8)$$

로 되는데, 여기서 Φ 는 標準化 變數 $U\left(U = \frac{(R-S) - (\bar{R} - \bar{S})}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}\right)$ 의 累積分布 函數이다. 여기서 β 를 信賴性 指數(Reliability Index)라고 불리우며 다음 式으로 定義된다.

$$\beta = \frac{\bar{R} - \bar{S}}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \dots\dots\dots (9)$$

(7), (8)式으로부터 破壞確率 P_f 와 信賴性 指數 β 와의 관계는 Table 1과 같다.

Table 1. Safety Index and Failure Probability

β	$P_f = \Phi(-\beta)$	限界狀態
1.282	10^{-1}	使用
2.326	10^{-2}	
3.090	10^{-3}	極限
3.719	10^{-4}	
4.265	10^{-5}	
4.753	10^{-6}	
5.199	10^{-7}	
5.617	10^{-8}	

(9)式의 信賴性 指數 β 를 기하학적으로 說明하기 위하여 $\xi = (r - \bar{r})/\sigma_R$, $\eta = (s - \bar{s})/\sigma_S$ 로 定義하면 (1)式의 限界狀態 方程式 Z는 다음 式과 같다.¹⁹⁾

$$Z = \xi\sigma_R - \eta\sigma_S + \bar{r} - \bar{s} = 0 \dots\dots\dots (10)$$

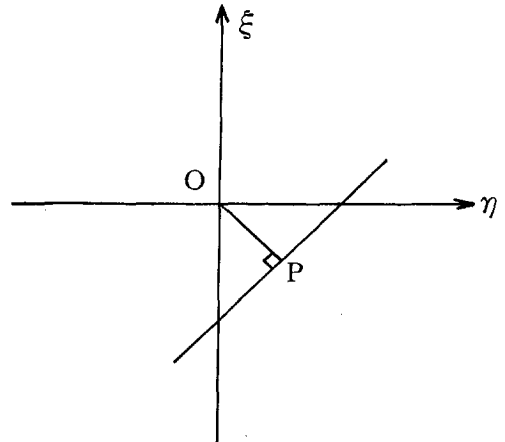


Fig. 1. Illustration of β

Fig 1에서 ξ, η 座標의 原點 O에서 (10)式의 直線까지의 距離 OP는

$$OP = \frac{\bar{r} - \bar{s}}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} = \beta$$

가 된다.

R 과 S가 모두 正規分布인때에 (8)式으로부터

$$OP = \beta = -\Phi^{-1}(P_f) \dots\dots\dots (11)$$

로 되고 여기서 $\Phi^{-1}(\)$ 은 標準化 累積 正規分布의 逆函數를 의미한다. 그러므로 標準化 正規變數 ξ, η 에서 β 는 원점으로부터 限界狀態 直線까지의 距離로 表現되고 (11)式은 設計 信賴度의 尺度가 된다.

3. 3. 中央安全率

中央安全率(Central Safety Factor)은 다음과 같은 의미를 갖는다. 즉, 中央安全率 n_0 는

$$n_0 = \bar{r}/\bar{s} \dots\dots\dots (12)$$

이며 (8), (9)式으로부터

$$\beta = -\Phi^{-1}(P_f) = \frac{\bar{r} - \bar{s}}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} = \frac{n_0 - 1}{\sqrt{V_R n_0^2 + V_S^2}} \dots\dots\dots (13)$$

로 되며 여기서 V_R 과 V_S 는 각각 變動 係數인 $\frac{\sigma_R}{\bar{r}}$, $\frac{\sigma_S}{\bar{s}}$ 를 뜻한다. (13)式을 整理하면

$$n_0 = \frac{1 + \sqrt{\beta^2(V_R^2 + V_S^2) - \beta^4 V_R^2 V_S^2}}{1 - \beta^2 V_R^2} \dots\dots\dots (14)$$

와 같이 된다.

3. 4. 對數正規分布

R 과 S 가 對數正規(Log-Normal)分布인 경우 (1)式의 限界狀態 方程式은 $Z = \ln R - \ln S$ 이므로

$$\left. \begin{aligned} P_f &= P\{Z < 0\} = \Phi(-\beta) \\ \bar{Z} &= \ln\left\{\frac{r}{s} \sqrt{\frac{V_R^2+1}{V_S^2+1}}\right\} \\ \sigma_z &= \sqrt{\ln(V_R^2+1) + \ln(V_S^2+1)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(15)$$

이 되며 그러므로 β 는 다음 式과 같이 된다.

$$\beta = \frac{\ln\left\{\frac{\bar{R}}{\bar{S}} \sqrt{\frac{1+V_S^2}{1+V_R^2}}\right\}}{\sqrt{\ln(V_R^2+1) + \ln(V_S^2+1)}} \dots\dots\dots(16)$$

이로부터 中央安全率 n_0 는

$$n_0 = \sqrt{\frac{V_R^2+1}{V_S^2+1}} \exp\{\beta \sqrt{\ln(V_R^2+1) + \ln(V_S^2+1)}\} \quad (17)$$

이 되는데 V_R 과 V_S 가 1에 비하여 매우 적을 때는 (약 0.3 이하) 개략적으로 다음과 같이 표시할 수도 있다.¹⁾

$$n_0 \doteq \exp\{\beta \sqrt{V_R^2 + V_S^2}\} \dots\dots\dots(18)$$

그러므로 이때 β 는

$$\beta = \frac{\ln \frac{\bar{R}}{\bar{S}}}{\sqrt{V_R^2 + V_S^2}} \dots\dots\dots(19)$$

正規分布와 對數 正規分布에 대한 中央安全率과 破壞確率 間의 關係가 Fig.2에 나타나 있으며 Table 2는 Fig.2에 대한 資料이다. 또한, 參考로 Extreme type 1 分布에 대한 中央安全率과 P_f 의 關係를 Fig.3에 나타내었다.¹⁴⁾ Fig. 4는 $\beta=4$, 荷重變動係數 $V_s=0.1$ 과 0.3에 대한

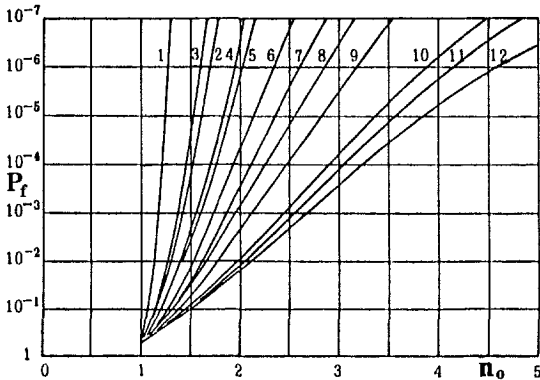


Fig. 2. Probability of Failure as Function of Central Safety Factor(Log-Normal Distribution)

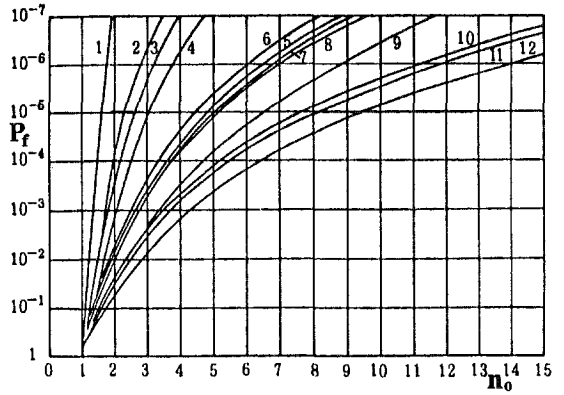


Fig. 3. Probability of Failure as Function of Central Safety Factor(Extreme-Value Distribution)

Table 2. Probability of Failure as Function of Central Safety Factor

Curve (1)	V_s (2)	V_R (3)
(a) Fig. 2. logarithmic normal distributions		
1	0.00	0.05
2	0.10	0.05
3	0.00	0.10
4	0.10	0.10
5	0.00	0.15
6	0.10	0.15
7	0.20	0.05
8	0.20	0.10
9	0.20	0.15
10	0.30	0.05
11	0.30	0.10
12	0.30	0.15
(b) Fig. 3. extreme-value distributions		
1	0.00	0.05
2	0.10	0.05
3	0.00	0.10
4	0.10	0.10
5	0.00	0.15
6	0.20	0.05
7	0.20	0.10
8	0.10	0.15
9	0.20	0.15
10	0.30	0.05
11	0.30	0.10
12	0.30	0.15

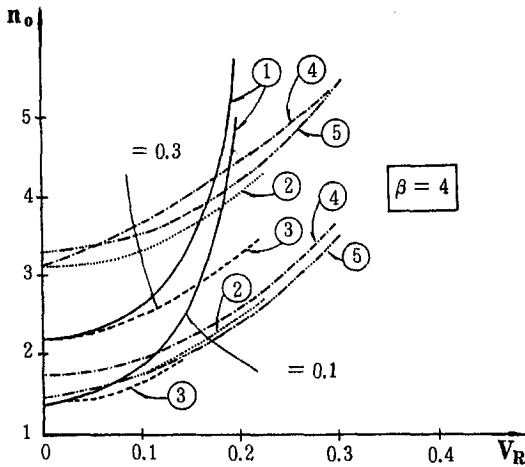


Fig. 4. Central Safety Factor vs Coefficient of Variation V_R for $\beta=4$

中央安全率과 抵抗 變動係數 關係를 보인 것이다.

信賴性指數를 구하는 (13)식은 Cornell¹⁸⁾에 의한 $Z=R-S$ 極限狀態의 1階 2次 모멘트 식이고 (16)식 또는 (19)식은 對數 正規 分布函數 $Z=\ln R-\ln S$ 極限狀態의 1階 2次 모멘트 식이다. 이들 식은 (1)에서와 같이 X_i 變數의 平均値에서 線形化 되었는데, $g(\)$ 가 非線形 일 때는 高次項을 무시한 結果로서 커다란 오차가 생길 수도 있다. 이러한 近似法은 더구나 變數의 分布에 대한 情報를 무시하기 때문에 함수 $g(\)$ 가 線形이며 變數 X_i 는 正規分布 일때만 正確한 結果를 주게 될 것이다.⁵⁾

4. 高級 2次 모멘트法(ASM)

1階 2次 모멘트法의 단점을 극복하기 위하여 不變 2차 모멘트(Invariant Second Moment) 또는 高級 2次 모멘트(Advanced Second Moment, ASM)法 이라고 불리는 方法이 제안되었는데^{12, 17, 18, 21)}, Lind-Hasofer의 最小거리法 이라고 하기도 한다.

$g(\)$ 의 Taylor Series 展開는 平均이 아닌 破壞點에서 線形化 된것인데 이 線形化點을 設計點(design point), 또는 檢査點(Checking Point)

이라고 부른다. 設計點의 選定과정은 다음과 같이 說明할 수 있다. 즉 (1)식에 주어진 變數와 極限狀態에서 變數 X_i 는 다음과 같은 座標로 전환된다.

$$Y_i = \frac{X_i - \bar{x}_i}{\sigma_{x_i}} \dots\dots\dots (20)$$

信賴性指數 β 는 이 方法에 의하여 換算 Y 座標系¹⁸⁾의 原點으로부터 破壞面까지의 最短거리로 정의된다. Fig. 5에서 信賴性指數 β 는 거리 OA이다.

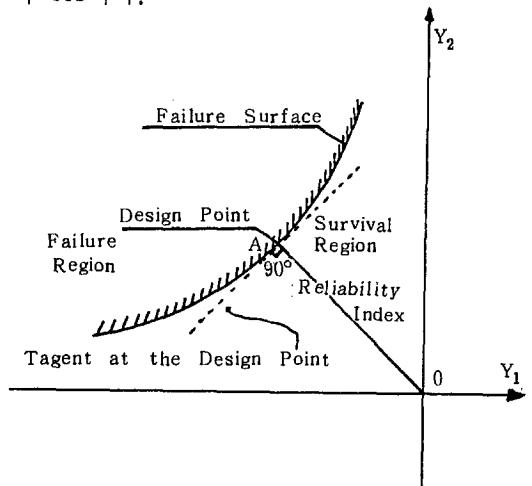


Fig. 5. Advanced Second Moment Method in Reduced Coordinates

信賴性指數 β 는 換算 座標系(Y 座標)로부터 구할 수도 있고 本座標(X 座標)系로부터 구할 수도 있다. 本座標系를 사용하면 設計點(X_1^* , X_2^* , ..., X_m^*)과 信賴性指數 β 는 다음 式들을 反復法에 의하여 구할 수 있게 된다.⁵⁾

$$\alpha_i = \frac{\left(\frac{\partial g}{\partial X_i}\right)\sigma_{x_i}}{\left[\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial g}{\partial X_i}\right)^2 \sigma_{x_i}^2\right]^{1/2}} \dots\dots\dots (21)$$

$$X_i^* = \bar{x}_i - \alpha_i \beta \sigma_{x_i} \dots\dots\dots (22)$$

$$g(X_1^*, X_2^*, \dots, X_m^*) = 0 \dots\dots\dots (23)$$

여기서 偏微分 $\frac{\partial g}{\partial X_i}$ 는 (X_1^* , X_2^* , ..., X_m^*)에서 算定해야 하며 α_i 는 變數 X_i 의 方向 Vector이다. 모든 變數가 正規分布이면 β 와 P_f 의 關係는 (13)식과 같게 된다.

構造工學의 여러가지 諸問題에서 設計變數는

正規分布가 아니다. 이에 따라 Rackwitz 와 Fiessler²¹⁾는 非正規分布 函數를 等價의 正規分布 函數로 轉換 하는 方法을 고려했다. 즉, 等價의 正規分布 \bar{x}_i^N 과 $\sigma_{x_i}^N$ 요소를 算定하였는데 다음 式과 같다.

$$\sigma_{x_i}^N = \frac{\phi\{\Phi^{-1}[F_i(x_i^*)]\}}{f_i(x_i^*)} \dots\dots\dots(24)$$

$$\bar{x}_i^N = X_i^* - \Phi^{-1}[F_i(X_i^*)]\sigma_{x_i}^N \dots\dots\dots(25)$$

여기서 F_i 와 f_i 은 각각 X_i 의 非正規分布 函數와 密度函數이고 $\Phi()$ 와 $\phi()$ 는 각각 標準正規變數에 對한 累積 分布函數와 密度函數이다. \bar{x}_i^N 와 $\sigma_{x_i}^N$ 을 決定하여 (21)~(23)式으로 β 값을 구할 수 있다. 만일 원래의 分布가 더욱 非對稱化 되면 非正規分布의 이러한 近似값은 더더욱 不正確해진다.⁵⁾

實用的인 目的을 위하여 荷重을 部分荷重의 合으로 나타내면 限界狀態 函數 $Z=R-S_D-S_L$ 로 표현할 수 있는데 Ellingwood 등은 R 은 標準對數 正規變換 시키고 荷重 S 는 標準正規 變換시킨 部分對數 正規 標準化 變換方法을 쓰고 있다.⁹⁾ 즉,

$$\phi(1+\rho)n_0 = \gamma_D + \rho\gamma_L \dots\dots\dots(26)$$

여기서

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \exp(-\alpha_R \beta V_R) \\ \gamma_D &= 1 + \alpha_{SD} \beta V_{SD} \\ \gamma_L &= 1 + \alpha_{SL} \beta V_{SL} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(27)$$

$\rho = \bar{L}/\bar{D}$, $n_0 = \bar{R}/\bar{S}$ 이며 이때 α_i 는 (21)式의 定義에 의하여 整理하면

$$\left. \begin{aligned} \alpha_R &= \frac{\phi V_R (1+\rho) n_0}{\sqrt{\phi^2 V_R^2 (1+\rho)^2 n_0^2 + V_{SD}^2 + V_{SL}^2 \rho^2}} \\ \alpha_{SD} &= \frac{V_{SD}}{\sqrt{\phi^2 V_R^2 (1+\rho)^2 n_0^2 + V_{SD}^2 + V_{SL}^2 \rho^2}} \\ \alpha_{SL} &= \frac{V_{SL} \rho}{\sqrt{\phi^2 V_R^2 (1+\rho)^2 n_0^2 + V_{SD}^2 + V_{SL}^2 \rho^2}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(28)$$

信賴性 指數 β 는 (26)~(28)式을 연립하여 反復法에 의하여 구할 수 있다.²⁵⁾

한편 抵抗 및 荷重을 모두 對數正規 標準化 變換시킬 경우에는 $r = (\ln R - \ln \bar{R})/V_R$, $s_i = (\ln S_i - \ln \bar{S}_i)/V_{s_i}$ 로 標準化 하면 原點에서 破壞域까지의 最小거리 座標點은

$$\left. \begin{aligned} r^* &= -\alpha_R \beta \\ s_D &= \alpha_{SD} \beta \\ s_L &= \alpha_{SL} \beta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(29)$$

이므로 限界狀態 方程式은

$$\begin{aligned} Z &= \bar{R} \exp(r^* V_R) - \bar{S}_D \exp(s_D^* V_{SD}) \\ &\quad - \bar{S}_L \exp(s_L^* V_{SL}) = 0 \dots\dots\dots(30) \end{aligned}$$

로 되어 위의 두식은 결국 (26)式과 같이 되는데 이때

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \exp(-\alpha_R \beta V_R) \\ \gamma_D &= \exp(\alpha_{SD} \beta V_{SD}) \\ \gamma_L &= \exp(\alpha_{SL} \beta V_{SL}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(31)$$

이며, 여기서 α_i 는

$$\left. \begin{aligned} \alpha_R &= \frac{\phi V_R (1+\rho) n_0}{\sqrt{\sum a_i^2}} \\ \alpha_{SD} &= \frac{\gamma_D \cdot V_{SD}}{\sqrt{\sum a_i^2}} \\ \alpha_{SL} &= \frac{\gamma_L \cdot V_{SL} \rho}{\sqrt{\sum a_i^2}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(32)$$

단, $\sqrt{\sum a_i^2} = \sqrt{\phi^2 V_R^2 (1+\rho)^2 n_0^2 + \gamma_D^2 V_{SD}^2 + \gamma_L^2 V_{SL}^2 \rho^2}$ 이다.

이들 역시 反復法에 의하여 信賴性 指數 β 를 구할 수 있다.²⁵⁾

5. 시뮬레이션 方法(Simulation Method)

5. 1. 直接 시뮬레이션 方法(Direct Simulation Method)

(1)式을 Monte Carlo 의 시뮬레이션 方法으로 算定할 수도 있다. 모델 $g()$ 값이 0보다 작게 될 때 파괴가 일어나는데 N_f 를 $g() < 0$ 되는 시뮬레이션 싸이클 數라고 하고 N 을 全體 시뮬레이션 싸이클 이라면 平均破壞 確率은 다음과 같이 된다.

$$\bar{P}_f = N_f / N \dots\dots\dots(33)$$

(33)式은 試料 平均值를 주는 값이고 알려지지 않은 母集團 平均 μ_f 를 算定하는데 사용된다. 이 式의 正確度는 分散值로 評價될 수 있는데 그 값은 N 에 좌우된다. 즉,

$$\text{Var}(\bar{P}_f) = \mu_f (1 - \mu_f) / N \dots\dots\dots(34)$$

로 表示되며 작은 破壞確率 또는 작은 N 수에 의한 (33)式의 P_f 는 상당한 불확실성을 내포한다. 그러나 N 이 無限大에 접근 한다면 파괴 확률은 참값에 가까울 것이다.

이와 같은 복잡한 직접 시뮬레이션 方法을 改善하여 效率를 높리며 컴퓨터 가동량을 최소화 하기 위하여 개발된 것이 分散減少法(Variance-Reduction Techniques, VRT)이다.

5. 2. 條件 期대 VRT 方法(Conditional Expectation VRT)

(34)式에서와 같이 分散値를 감소 시키므로서 그 效率性과 正確度가 증가 되므로 VRT 方法을 고려하게 된다. 이 方法은 하나 또는 그 이상으로 生成되는 基本 random 變數를 조절 하므로써 파괴확률 P_f 의 시뮬레이션 分散値를 줄이는 것이다.⁵⁾

random 變數 Z 中에서 平均值 μ 를 구한다고 하자. 다른 random 變數 X 가 있을때 어떤 實數 x 에 대하여 條件기대치 $E(Z|X=x)$ 를 計算할 수 있다.

$$\mu = E[E(Z|X)] \dots\dots\dots(35)$$

分散 $E(Z|X)$ 는

$$\text{Var}[E(Z|X)] = \text{Var}(Z) - E[\text{Var}(Z|X)]; \\ \leq \text{Var}(Z) \dots\dots\dots(36)$$

이 式에서 random 變數 x 로부터 $E(Z|X)$ 를 計算하는 것은 Z 의 直接 시뮬레이션에 의한 것 보다 적은 分散을 낳게 한다는 것을 나타내 준다.

이 方法의 節次는 다음과 같다.

① 最大分散의 random 變數를 選定하여 X_j 라 놓는다.

② 算定할 P_f 는 다음과 같다.

$$P_f = P[X_j < g'(X_1, X_2, \dots, X_{j-1}, \\ X_{j+1}, \dots, X_m)] \dots\dots\dots(37)$$

③ x_j 를 제외한 모든 入力變數에 대하여 檢査한다. 그러면 Monte Carlo 시뮬레이션에 의하여 이들 變數를 無作爲로 낳게 되고 표본의 P_f 는 다음과 같아진다.

$$P_{f_i} = P[X_j < g'(\) | X_k = X_k \text{ for } K \neq j] \dots\dots(38)$$

④. ③의 과정을 N 회 반복한다. 그후 다음 式으로 P_f 를 구한다.

$$\bar{P}_f = \frac{\sum_{i=1}^N P_{f_i}}{N} \dots\dots\dots(39)$$

$$\text{Var}(\bar{P}_f) = \frac{\text{Var}(P_f)}{N} = \frac{1}{N-1} \frac{\sum_{i=1}^N (P_{f_i} - \bar{P}_f)^2}{N} \dots\dots(40)$$

5. 3. 對應變量 VRT(Antithetic Variates VRT)

이 方法에서는 算出되는 平均值의 分散을 줄이기 위하여 시뮬레이션 中의 다른 變數 사이에 陰의 相關關係를 도입하는 것이다. U 가 0과 1 사이의 等分布 random 變數라면 $U(0, 1)$ 는 基本 random 變數를 生成하는 첫번째 變數에서 사용된다. 그러면 또 다른 random 變數 $1-U$ 가 두번째 變數에 도입 되어 진다. (1) 式에서 m 組의 基本 random 變數 $[(x_1^{(1)}, x_1^{(2)}), (x_2^{(1)}, x_2^{(2)}), \dots, (x_m^{(1)}, x_m^{(2)})]$ 을 고려하면 i 번째 變數의 시뮬레이션에 대한 Z 의 平均值는

$$Z_i = \frac{Z_i^{(1)} + Z_i^{(2)}}{2} \dots\dots\dots(41)$$

이 되므로 N 變數 동안의 시뮬레이션에 대한 Z 의 平均과 分散은

$$\bar{Z} = \frac{\sum_{i=1}^N Z_i}{N} \dots\dots\dots(42)$$

$$\text{Var}(\bar{Z}) = \frac{\text{Var}(Z_i)}{N} \\ = \frac{\text{Var}(Z_i^{(1)}) + \text{Var}(Z_i^{(2)}) + 2\text{cov}(Z_i^{(1)}, Z_i^{(2)})}{4N} \dots\dots\dots(43)$$

로 表現되는데 $Z_i^{(1)}, Z_i^{(2)}$ 의 共分散 $\text{Cov}(Z_i^{(1)}, Z_i^{(2)})$ 가 陰이라면 Z 의 分散은 줄어들게 될 것이다.

이 方法의 計算節次는 다음과 같다.

① 1組의 random 變數 $U_i; i=1, 2, \dots, m$, 을 발생 시킨다.

② 逆變換 方法에 의하여 基本變數에 대응하는 變數 $F^{-1}(U_i)$ 를 生成시킨다.

③ 基本變數의 또 다른 값 $F^{-1}(1-U_i)$ 을 발생

시킨다.

④ ②, ③에서의 平均值를 算定한다.

⑤ ①~④項 反復

以上과 같이 VRT 法을 소개하였는데 위에 든 두가지의 VRT 方法을 조합하여 사용하면 더욱 효과적일 수도 있다.⁵⁾

6. 分析 및 考察

지금까지 열거한 여러가지 技法에 대하여 간단한 例題를 들어 보기로 한다. 어떤 韃 部材에 대하여 限界狀態 方程式을 다음과 같이 定義할 수 있다.

$$Z = F_y \cdot S - M \dots \dots \dots (44)$$

여기서 F_y 는 降伏應力, S 는 斷面係數, M 은 作用한 韃 모멘트 이며 이들 變數는 서로 獨立이라고 하고, 그 값을 Table. 3에 보였다.

Table 3. Characteristics of Design Parameters

Parameter	Mean Value	COV	Probability Distribution
F_y	2800 kg/cm ²	0.1	Normal
S	950 cm ³	0.05	Log-Normal
M	14tm	0.30	Type II

各 方法에 대한 破壞確率과 信賴性 指數를 求하였으며 Monte Carlo 시뮬레이션 方法은 Ayyub 와 Haldar⁴⁾의 計算結果를 引用, 比較 설명하기로 하였다.

中央安全率 n_0 는 $n_0 = \frac{\bar{R}}{S} = 1.9$ 가 되며 信賴性 指數 β 는 1階 2次 모멘트 法에 의하여 (13) 式으로 求할 수 있으며 그에 對應되는 파괴확률도 구할 수 있게 된다. 한편 R 과 S 가 對數 正規分布를 따른다고 한다면 (16) 式, 또는 간략히 (19) 式에 의하여 信賴性 指數 β 를 구할 수 있게 된다. 이들 近似式은 正規分布 함수이며 함수 Z 가 線形化될 수 있을때 限하여 有效한다. 이러한 난점을 극복하기 위하여 Lind-Hasofer의 最小거리法 또는 高級 2次 모멘트 法이 적용된다. 이 方法에서의 β 는 換算 座標系의 原點으로부터 破壞面까지의 最短거리로서

定義된다. 이들 計算結果를 Table. 4에 나타 내었다.

Table 4. First-Order Second-Moment and Advanced Second-Moment Methods' Results

Methods	β^* or β	$P_f = 1 - \Phi(\beta^* \text{ or } \beta)$
First-Order Second-Moment Method(Normal)	2.4484	0.007183
First-Order Second-Moment Method(Lognormal, Correct)	2.1615	0.015329
First-Order Second-Moment Method(Lognormal, Approximate)	2.0048	0.022494
Advanced Second-Moment Method	1.9905	0.023270

그리고 Monte Carlo 시뮬레이션 技法에 의한 計算 結果⁴⁾는 Table. 5, Table. 6, Table. 7과 같다.

Table 5. Direct Simulation's Results

N	β^*	P_f (Eq. 11)	P_f (Eq. 33)	Var(P_f) (Eq. 34)
10	2,258	0.011974	0	0.002389
100	2,844	0.002228	0	0.000239
500	2,523	0.005819	0.018	0.000048
1000	2,390	0.008424	0.021	0.000024

Table 6. Conditional Expectation VRT's Results

N	P_f	COV(P_f)
10	0.021626	0.126
100	0.021425	0.052
500	0.024250	0.026
1000	0.025025	0.020

Table 7. Conditional Expectation+Antithetic Variates VRT's Results

N	P_f	COV(P_f)
10	0.023266	0.070
100	0.024322	0.021
500	0.024233	0.010
1000	0.024489	0.008

以上の計算結果를 보면 對數正規를 취한 1階 2次 모멘트(MFOSM)法이 高級 2次 모멘트(ASM)法과 거의 동일한 信賴性 값을 주고 있음을 알 수 있다. 그러나 분명한 것은 β^* 값은 β 와 관련되어 있지 않다는 것이다. $P_f=1-\Phi(\beta)$ 는 Z 가 正規分布 일때에 한하여 有效하기 때문이다. 이러한 Z 의 分布 假定은 대부분의 경우에 실제적인 것이 못 된다. β^* 와 β 는 FOSM 方法에 필요한 平均值와 ASM 方法에 필요한 파괴면의 檢査點 사이의 差가 클수록 크게 되는 경향이 있다. 이들 中에는 정확해에 속하는 ASM 方法이 가장 타당성이 있을 것으로 생각되지만 反復法 施行의 不便한 點이 따르고 있다. 한편 ASM 方法은 VRT 技法과 같은 수준의 값을 보이고 있음을 알 수 있다.

시물레이션 方法에서는 直接 計算하는 시물레이션 方法은 非效率의인데 특히, P_f 値가 비교적 작을때 또는 Z 가 正規分布가 아닌 때에는 부정확하다. 이 例에서는 VRT 技法이 古典的인 信賴性 解析에 비하여 우월한 것으로 나타났다. 工學的 設計에 있어서 條件期待 VRT+對應變量 VRT 方法이 P_f 를 算定하는데 있어서 效果的인 것으로 예측된다. 시물레이션은 싸이클 數를 많이 할 수록 정확하다고 할 수 있겠으나 컴퓨터의 용량과 계산시간이 문제로서 대두될 것이다.

7. 結 論

構造物의 信賴度 解析에 일반적으로 사용되고 있는 여러가지 方法들을 음미하고 分析하여 보았다.

一般的으로 많은 問題에서 1階 2次 모멘트法(MFOSM)이 쓰이고 있지만 限界狀態 函數가 正規分布를 따라야 하며 또한 線形일 경우만 局限되므로 제약이 뒤따르게 된다. 이러한 점에서 高級 2次 모멘트(ASM)法은 잇점을 갖고 있는데 단지 反復法의 수행이 귀찮은 점인데 이는 컴퓨터에 의하여 쉽게 극복될 수 있을 것이다.

ASM 方法에서 非正規 變數인 경우 等價의

正規變數로 전환할 수 있음을 보여 주었다.

FOSM에 의한 β^* 와 직접 시물레이션 方法에 의한 β^* 値가 비슷하게 나온것이 관찰 되었다. 그리고 또한 ASM 方法과 VRT 法の 값이 유사함을 알 수 있었다.

結論的으로 직접 시물레이션 方法은 P_f 값이 적을때 비효율적이므로 高級 2次 모멘트 法(ASM)과 VRT 方法 또는 그 組合法 등이 앞으로 有效하게 쓰일 것으로 생각 되어진다.

參 考 文 獻

1. Ang, A.H-S., and Cornell, C.A., "Reliability Bases of Structural Safety and Design", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 100, No. ST9, Sep., 1974, pp. 1755~1769
2. Ang, A.H-S., and Amin, M., "Reliability of Structures and Structural Systems", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 94, No. EM2, Apr., 1968, pp. 671~691
3. Ang, A.H-S., "Structural Risk Analysis and Reliability Based Design", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 99, No. ST9, 1973, pp. 1891~1910
4. Ayyub, B.M., and Haldar, A., "Improved Simulation Techniques as Structural Reliability Models", Proceeding of ICOSSAR 85, 4th International Conference on Structural Safety and Reliability, 1985, Kobe, Japan, pp. I 17~26
5. Ayyub, B.M., and Haldar, A., "Practical Structural Reliability Techniques", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 110, No. 8, Aug., 1984, pp. 1707~1724
6. Benjamin J.R., and Cornell, C.A., "Probability, Statistics, Decision for Civil Engineers", McGraw Hill Book Co, Inc., New York, 1970
7. Cornell, C.A., "Bounds on the Reliability of Structural Systems", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 93, No. 1, Feb., 1967, pp. 171~200
8. Cornell, C.A., "A Probability-Based Structural Code", Journal of the American Concrete Institute, Vol. 66, No. 12, Dec., 1969, pp. 974~985

9. Ellingwood, B., "Reliability Based Criteria for Reinforced Concrete Design", *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 105, No. ST4, Apr., 1979, pp. 713~727
10. Ellingwood, B., MacGregor, J. G., Galambos, T. V., and Cornell, C. A., "Probability Based Load Criteria : Load Factors and Load Combinations", *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 108, No. ST5, May, 1982, pp. 978~997
11. Ellingwood, B., "Reliability of Current Reinforced Concrete Designs", *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 105, No. ST4, Apr., 1979, pp. 69~712
12. Fiessler, B., Neumann, H.-J., and Rackwitz, R., "Quadratic Limit States in Structural Reliability", *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 105, No. EM4, Aug., 1979, pp. 661~676
13. Freudenthal, A. M., Garrelts, J. M., and Shinozuka, M., "The Analysis of Structural Safety", *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 92, No. ST1, Feb., 1966, pp. 267~325
14. Freudenthal, A. M., "Safety, Reliability and Structural Design", *Transactions of ASCE*, Vol. 127, 1962, Part I, pp. 304~323
15. Freudenthal, A. M., "Safety, Reliability and Structural Design", *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 87, No. ST3, Mar., 1961, pp. 1~16
16. Freudenthal, A. M., "Safety and Probability of Structural Failure" *Transactions, ASCE*, Vol. 121, 1956, pp. 1337~1397
17. Galambos, T. V., Ellingwood, B., MacGregor, J. G., and Cornell, C. A., "Probability Based Load Criteria : Assessment of Current Design Practice", *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 108, No. ST5, May, 1982, pp. 959~977
18. Hasofer, A. M., and Lind, N. C., "Exact and Invariant Second-Moment Code Format", *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 100, No. EM1, Feb., 1974, pp. 111~121
19. Leporati, E., "The Assessment of Structural Safety", *Series in Cement and Concrete Research*, Vol. 1, Research Studies Press, 1979, pp. 1~133
20. Mose, F., and Stevenson, J. D., "Reliability-Based Structural Design", *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 96, No. ST2, Feb., 1970, pp. 221~244
21. Rackwitz, R., and Fiessler, B., "Structural Reliability Under Combined Random Load Sequences," *Computer and Structures*, Vol. 9, 1978, pp. 489~494
22. Ravindra, M. K., and Galambos, T. V., "Load and Resistance Factor Design For Steel", *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 104, No. ST9, Sep., 1978, pp. 1337~1353
23. Ravindra, M. K., Lind, N. C., and Siu, W., "Illustrations of Reliability-Based Design", *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 100, No. ST9, Sept., 1974, pp. 1789~1811
24. Shinozuka, M., "Basic Analysis of Structural Safety", *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 109, No. 3 Mar., 1983, pp. 721~740
25. 趙孝男, "鐵筋콘크리트 道路橋 上部構造의 信賴性 設計規準에 關한 研究", *大韓土木學會 論文集 第2卷 第3號*, 1982. 9. pp. 87~99