國數學敎育學會誌<數學敎育>
5. 12. Vol. XXIV, No. 1

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Dec. 1985. Vol. XXIV, No. 1

Fixed point property를 가진 finite partially ordered sets

서울大學校 김 연 식

1. 서 론

Partially ordered set P가 *fixed point property*를 갖는다는 것은 임의의 order preserving map $f: P\to P$가 fixed point를 갖는다는 이다. A. Tarski는 임의의 complete lattice fixed point property를 갖는다는 것을 밝혔 ([4]), B. C. Davis는 fixed point property 갖는 임의의 lattice는 complete임을 밝혔다 1]). 이 후에 partially ordered set가 fixed int property를 갖기 위한 필요충분조건을 찾 연구가 계속되고 있다([2], [3]).

여기서는 finite partially ordered set인 경우 fixed point property를 갖기 위한 필요조건 , 충분조건을 찾아서 증명하고자 한다.

2. 정 리

Partially ordered set P가 *fixed point free* 는 것은 P가 fixed point property를 갖지 않 경우를 말한다. 또 order preserving map $: P\to P$가 fixed point free라는 것은 f가 fixed int를 갖지 않을 때를 말한다. partially ordered set P의 subset Q가 P의 *retract*라고 하 것은 적당한 order preserving map $f: P\to P$ 존재하여 $f(P)=Q$이고 $f|Q$가 Q에서의 identity map일 때를 말한다. 이 때의 mapping $: P\to Q$를 *retraction*이라고 한다.

보조정리 1 P가 finite partially ordered set 고 $f: P\to P$가 order preserving map이면 $f^n(P)$가 $f^n(P)$에서 $f^n(P)$로의 automorphism 되는 양정수 n이 존재한다.

증명 임의의 양정수 m에 대하여 $f^m(p)\neq\varnothing$이고 $f|f^m(P)$는 $f^m(P)$에서 $f^m(P)$로의 order preserving map인 것은 분명하다. 그런데 order preserving map f에 대하여 $P=f^0(P)$, $f^i\circ f=f^{i+1}$이라고 놓으면

$$P=f^0(P)\supset f^1(P)\supset f^2(P)\supset\cdots\cdots$$

P는 finite이므로 $f^n(P)=f^{n+1}(P)$가 될 최소의 양정수 n이 존재한다. 따라서

$$g=f|f^n(P)\text{는 bijection이다.}$$

이제, g^{-1}가 order preserving이 됨을 밝히면 된다.

임의의 $a\in f^n(P)$에 대하여,

$$g^k(a)\in\{g^0(a),\ g^1(a),\ g^2(a),\ \dots,\ g^{k-1}(a)\}$$

인 최소의 양정수 k를 택할 수 있다. 따라서, 적당한 정수 j $(0\leq j\leq k-1)$가 존재하여

$$g^k(a)=g^j(a)$$

그러므로 $g^{k-1}(a)=a$, 곧 $j=0$

따라서, 임의의 $a\in f^n(P)$에 대하여,

$g^k(a)=a$인 최소의 양정수 k를 얻을 수 있다.

이제 $g(x)>g(y)$라고 가정하자. 위의 성질에 의하여

$g^r(x)=x$인 최소의 양정수 r이 존재하며

$g^s(y)=y$인 최소의 양정수 s가 존재한다.

따라서

$$g^{r\cdot s}(x)=x,\qquad g^{r\cdot s}(y)=y$$

$g^{r\cdot s-1}$은 order preserving이므로

$$x=g^{r\cdot s-1}(g(x))>g^{r\cdot s-1}(g(y))=y$$

이상으로 g는 automorphism이다.

정리 2 P가 finite partially ordered set일 때 다음 조건은 동치이다.

(i) P가 fixed point property를 갖는다.

(ii) P의 임의의 retract Q가 fixed point property를 갖는다.

증명 먼저 P의 적당한 retract Q가 존재해서 fixed point free가 된다고 가정하자. $h: Q \to Q$를 임의의 order preserving map이라고 하고 $g: P \to Q$를 retraction이라고 하자. 가정에 의하여 P는 fixed point property를 가지므로 $hg: P \to P$는 fixed point를 갖는다. 곧 $hgi_Q: Q \to Q$가 fixed point를 갖는다. 그런데 $h = hgi_Q$이므로 h가 fixed point를 갖게 되어 모순이 일어난다.

다음은 역을 증명하자. P가 fixed point free를 갖는다고 가정한다. 그러면 fixed point free인 order preserving map $f: P \to P$가 존재한다. P는 finite partially ordered set이므로 보조정리 1에 의하여 적당한 최소의 양정수 n이 존재해서 $f^n(P) = f^{n+1}(P)$가 되고 $f|f^n(P)$가 automorphism이 된다.

$g = f|f^n(P)$라고 하고 $f^n(P) = Q$라고 하자. 그러면 g가 automorphism이므로 적당한 최소의 양정수 k가 존재해서 $g^k: Q \to Q$가 identity가 된다. 따라서

$f^{nk}(P) = Q$이고, $f^{nk}|Q$는 identity

그러므로 Q는 P의 retract이다.

또 $f: P \to P$는 fixed point free이므로 $g: Q \to Q$도 fixed point free가 되므로 가정에 어긋난다.

다음은 finite partially ordered set P가 fixed point property를 갖기 위한 충분조건을 알아본다.

a, b를 partially ordered set P의 원이라고 하자. a가 b를 *cover* 한다(또는 a는 b의 upper cover, b는 a의 lower cover)는 것은 $a > c \geq b$일 때 $b = c$임을 뜻한다. a가 P에서 *irreducible*이라는 것은 a가 P에서 꼭 하나의 upper cover를 갖거나 lower cover를 가질 때를 말한다. $I(P)$는 P 안에 있는 irreducible인 모든 원의 집합을 나타낸다. n개의 원을 가진 partially ordered set P가 *dismantlable by irreducible* (간단히 dismantlable)이라는 것은 P의 원을 모든 $i = 1, 2, \cdots, n-1$에 대하여

$$a_n \in I(P - \{a_1, a_2, \cdots, a_{i-1}\})$$

가 되게 $a_1, a_2, \cdots, a_n$으로 나타낼 수 있을 때를 말한다. 또 finite partially ordered set P에 대하여 $\max(P)$ $(\min(P))$는 P의 maximal element (minimal element) 전체의 집합을 나타낸다. P의 subset S가 P의 spanning subset라는 것은 $\max(S) \subset \max(P)$, $\min(S) \subset \min(P)$일 때를 말한다.

보조정리 3 finite partially ordered set P의 subset Q가 P의 retract이면 P의 적당한 spanning subset Q'가 존재해서 Q'가 Q에 isomorphic이고 P의 retract가 되게 할 수 있다.

증명 Q를 P의 retract라고 하자. Q가 P의 spanning subset가 아니면 $\max(Q) - \max(P) \neq \emptyset$라고 가정해도 무방하다. 이제 $x \in \max(Q) - \max(P)$라고 하고 $x' \in \max(P)$, $x < x'$인 x'를 택하자.

$y < x'$인 Q의 원 y를 택하면 Q가 P의 retract이므로

$$y \leq x$$

이다. 따라서 Q'을

$$Q' = (Q - \{x\}) \cup \{x'\}$$

라고 놓으면 Q'는 Q에 isomorphic이고 P의 retract이다.

$\max(Q) - \max(P)$와 $\min(Q) - \min(P)$의 모든 원 x에 대하여 위의 방법을 적용하면 Q'는 P의 spanning subset가 된다.

정리 4 finite partially ordered set P가 dismantlable이면 P는 fixed point property를 갖는다.

증명 P가 fixed point property를 갖지 않는다고 하자. 그러면 fixed point free인 order preserving map $f: P \to P$가 존재한다. P가 dismantlable이므로 모든 $i = 1, 2, \cdots, n-1$에 대하여 $a_i \in I(P - \{a_1, a_2, \cdots a_{i-1}\})$인 원으로

$$P = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$$

과 같이 나타낼 수 있다.

$a_1 \in I(P)$이므로

a_1의 단하나의 lower cover b의 존재를 가정해도 무방하다. P가 finite이므로 $f(b) \neq a_1$이다

바서, $g: P-\{a_1\} \to P-\{a_1\}$을

$$f_1(x)=\begin{cases} b & x\in f^{-1}(a_1) \\ f(x) & x\notin f^{-1}(a_1) \end{cases}$$

고 정의하자. 그러면

$P-\{a_1\}$의 원 x, y가 $x\geq y$이면

$x,\ y\notin f^{-1}(a_1)$ 일 때는 $f_1(x)\geq f_1(y)$

$x\in f^{-1}(a_1)$, $y\notin f^{-1}(a_1)$ 일 때는 $f_1(x)=b$

$a_1=f(x)\geq f(y)=f_1(y)$이므로 $b\geq f_1(y)$

그러므로 $f_1(x)\geq f_1(y)$

$x\notin f^{-1}(a_1)$, $y\in f^{-1}(a_1)$일 때는 $f_1(y)=b$

$f_1(x)=f(x)=a_1>b=f_1(y)$ 곧 $f_1(x)\geq f_1(y)$

$x, y\in f^{-1}(a_1)$ 일 때는 $f_1(x)=b=f_1(y)$

따라서 $f_1: P-\{a_1\}\to P-\{a_1\}$은 order preser-ng map이다. 다음은 f_1이 fixed point free을 밝히자.

$f_1(c)=c$인 $P-\{a_1\}$의 원 c가 존재하면

$c\neq b$일 때는 $f(c)=c$가 되어 모순

$c=b$일 때는 $b\in f^{-1}(a_1)$에서 $f(b)=a_1$이 되어 순이다. 따라서 f_1은 fixed point free이다.

이상의 방법을 $a_2\in I(P-\{a_1\})$에 대해서도 적 하면 fixed point free인 order preserving ap

$$f_2: P-\{a_1, a_2\} \to P-\{a_1, a_2\}$$

존재한다.

이상을 계속하면 fixed point free인 order eserving map $f_{n-1}: \{a_n\}\to\{a_n\}$이 존재하게 므로 모순이 일어난다.

다음에 정리 5를 취급하기 전에 기호를 정해 다. Partially ordered set P의 임의의 subset 에 대하여 집합 $\{x\in P|\forall s\in S,\ x\leq s\}$을 S_*로 타내기로 한다.

리 5 finite partially ordered set P에서 ax(P)의 임의의 non-empty subset S에 대한 $_*$가 fixed point property를 가지면 P는 fixed oint property를 갖는다.

증명 P가 fixed point property를 갖지 않는 고 가정하자. 그러면 정리 2와 보조정리 3에 하여 P의 retract Q가 존재하여

Q는 P의 spanning subset가 되고

Q가 fixed point free automorphism을 갖게 할 수 있다. 이 때의 retraction을 $f: P\to Q$, fixed point free automorphism을 $g: Q\to Q$라고 하자. 또 $b\in\max(Q)\subset\max(P)$라고 하고 $B=\{b,\ g(b),\ g^2(b), \cdots\}$라고 하자, g는 Q 위에서의 automorphism이므로

$$B\subset\max(Q)\subset\max(P).$$

이제 B_*가 fixed point free가 되어 모순이 일어난다는 것을 밝힌다.

공집합 $\varnothing$는 fixed point free이므로 $B_*\neq\varnothing$일 때를 생각한다.

$x\in B_*$ 라면

모든 $i=0, 1, 2, \cdots$에 대하여 $x\leq g^i(b)$

(단, $g^0(b)=b$)

따라서 $f(x)\leq f(g^i(b))=g^i(b)$

$$f(x)\in B_*$$

그러므로 $f(B_*)\subset B_*\cap Q$

$y\in B_*\cap Q$라고 하면

모든 $i=0, 1, 2\cdots$에 대하여 $g(y)\leq g^i(b)$

따라서, $g(B_*\cap Q)\subset B_*\cap Q$

g는 automorphism이므로 $g(B_*\cap Q)=B_*\cap Q$

그러므로 $f(B_*)=B_*\cap Q$

$f|B_*\cap Q$는 identity이므로 $f|B_*$는 $B_*\to B_*\cap Q$인 retraction이다. 또 $g|B_*\cap Q$는 fixed point free automorphism이다. 따라서 $g\circ f|B_*$는 fixed point free map이므로 B_*는 fixed point free이다.

참 고 문 헌

1. A.C. Davis, A characterization of complete lattices, *Pacific J. Math.*, 5 (1955), 311~319.
2. H. Höft and M. Höft, Some fixed point theorems for partially ordered sets, *Can. J. Math.*, 5 (1976) 992~907.
3. I. Rival, A fixed point theorem for finite partially ordered sets, *J. Comb. Th.*, 21 (1976) 309~318.
4. A. Tarski, A lattice theoretical fixed point theorem and its applications, *Pacific J. Math.*, 5 (1955) 285~309.