

解析的 交會法에 의한 水平位置決定에 관한 研究

The Study on Horizontal Positioning by the Analytical Intersection and Resection

柳 福 模* 崔 哲 淳**
Yeu Bock-Mo Choi Chul-Soon
劉 煥 熙*** 申 春 億****
Yoo Hwan-Hee Shin Chun-Uhk

要 旨

本 研究에서는 解析的 交會法에 依하여 已知점수를 증가시킴에 따라 未知점에 나타나는 오차의 크기를 誤差橢圓으로 표시하여 誤差橢圓의 변화량을 고찰하였고, 각각의 觀測方向線에 對해 觀측된 角과 距離에 對해 여러가지 檢證를 적용하므로써 오차변화량을 分析하여 解析的 交會法에 의한 水平位置決定의 正確度를 向上시키고자 하는데 目的이 있다.

ABSTRACT

This paper improves the accuracy of horizontal positioning by means of the analytical Intersection and Resection. For this purpose, by increasing the number of Known points, the magnitude of errors occurred in unknown points is represented by error ellipse, and the variation of error ellipse is examined. Also, by applying weights according to each measured angles and distances, the variation of error ellipse is analyzed.

1. 序 論

解析的 交會法은 後方交會法과 前方交會法이 있으며 접근이 어려운 지점이나 접근이 가능하

더라도 기계설치가 불가능한 지점의 수평위치 결정에 이용되고 있다. 지상기준점을 이용하여 施設物의 국부적인 변형이나 지반이동을 多重方向線 觀測에 의해 精確하게 해석할 수 있으며 장기적인 施設物 변형측량이나 變遷형 측량에 解析的 交會法(前方交會法과 後方交會法)을 이용한 未知점의 水平位置決定에 있어서 誤差橢圓과 95% 信賴橢圓을 計算하므로써 未知점에 對한 信賴區間을 決定하였다.

* 延世大學校 工科大學 教授
** 關東大學 工科大學 助教授
*** 延世大學校 工科大學院 博士課程
**** 延世大學校 産業大學院

2. 解析的 交會法의 理論

2.1 距離條件

두 점 i 와 j 사이의 조정된 거리 \hat{S}_{ij} 는

$$\hat{S}_{ij} = [(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2]^{1/2} \quad (2-1)$$

이다. 여기서 (X_i, Y_i) , (X_j, Y_j) 는 i 와 j 의 직각 평면좌표이다. (2-1) 式을 선형화 하면

$$\begin{aligned} \hat{S}_{ij} = S_{ij}^0 &+ \left(\frac{\partial S_{ij}}{\partial X_i}\right) \Delta X_i + \left(\frac{\partial S_{ij}}{\partial Y_i}\right) \Delta Y_i \\ &+ \left(\frac{\partial S_{ij}}{\partial X_j}\right) \Delta X_j + \left(\frac{\partial S_{ij}}{\partial Y_j}\right) \Delta Y_j \end{aligned}$$

이며, 여기서

$$S_{ij}^0 = [(X_j^0 - X_i^0)^2 + (Y_j^0 - Y_i^0)^2]^{1/2} \quad (2-2)$$

이다.¹⁾ (2-2) 式을 j 점이 기지점으로 하여 정리하면

$$\hat{S}_{ij} = S_{ij}^0 + \left(\frac{\partial S_{ij}}{\partial X_i}\right) \Delta X_i + \left(\frac{\partial S_{ij}}{\partial Y_i}\right) \Delta Y_i \quad (2-3)$$

이고, 조정된 거리에 대한 일반식은

$$\hat{S}_{ij} = S_{ij} + V_{ij} \quad (2-4)$$

이며 S_{ij} 는 관측값이고 V_{ij} 는 잔차항이다.

(2-2) 式과 (2-4) 式으로부터

$$\begin{aligned} V_{ij} - \left(\frac{\partial S_{ij}}{\partial X_i}\right) \Delta X_i - \left(\frac{\partial S_{ij}}{\partial Y_i}\right) \Delta Y_i - \\ \left(\frac{\partial S_{ij}}{\partial X_j}\right) \Delta X_j - \left(\frac{\partial S_{ij}}{\partial Y_j}\right) \Delta Y_j = S_{ij}^0 - S_{ij} \end{aligned} \quad (2-5)$$

이며 편미분항을 다음과 같이 표시하면

$$\begin{aligned} b_1 = -\frac{\partial S_{ij}}{\partial X_i}, \quad b_2 = -\frac{\partial S_{ij}}{\partial Y_i} \\ b_3 = -\frac{\partial S_{ij}}{\partial X_j}, \quad b_4 = -\frac{\partial S_{ij}}{\partial Y_j} \end{aligned}$$

이고 $F_{ij} = S_{ij}^0 - S_{ij}$ 라 하면 조건방정식은 다음과 같다.²⁾

$$\begin{aligned} V_{ij} + b_1 \Delta X_i + b_2 \Delta Y_i + b_3 \Delta X_j + b_4 \Delta Y_j \\ = F_{ij} \end{aligned} \quad (2-6)$$

여기서 초기값은 근사값을 사용하므로 계수 b_1, b_2, b_3, b_4 는

$$b_1 = \frac{X_j^0 - X_i^0}{S_{ij}^0}, \quad b_2 = \frac{Y_j^0 - Y_i^0}{S_{ij}^0}$$

$$b_3 = -\frac{X_j^0 - X_i^0}{S_{ij}^0}, \quad b_4 = -\frac{Y_j^0 - Y_i^0}{S_{ij}^0}$$

이며, 이와같은 과정을 반복하여 최종 조정값을 계산한다.

2.2 方位角條件

i 점의 좌표가 (X_i, Y_i) 이고 j 점의 좌표가 (X_j, Y_j) 일 때 ij 의 방향선에 대한 조정방위각은 다음과 같다.

$$\hat{a}_{ij} = \tan^{-1} \left(\frac{X_j - X_i}{Y_j - Y_i} \right) \quad (2-7)$$

(2-7) 式을 선형화 하면 다음과 같이

$$\begin{aligned} \hat{a}_{ij} = a_{ij}^0 &+ \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial X_i}\right) \Delta X_i + \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial Y_i}\right) \Delta Y_i \\ &+ \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial X_j}\right) \Delta X_j + \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial Y_j}\right) \Delta Y_j \end{aligned} \quad (2-8)$$

이며, 여기서

$$a_{ij}^0 = \tan^{-1} \left(\frac{X_j^0 - X_i^0}{Y_j^0 - Y_i^0} \right)$$

이고, 조정 방위각은

$$\hat{a}_{ij} = a_{ij} + V_{ij} \quad (2-9)$$

이며 a_{ij} 는 방위각의 관측값이고 V_{ij} 는 잔차항이다. (2-8) 式과 (2-9) 式으로부터 방위각 조건식이 성립한다.

$$\begin{aligned} V_{ij} - \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial X_i}\right) \Delta X_i - \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial Y_i}\right) \Delta Y_i \\ - \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial X_j}\right) \Delta X_j - \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial Y_j}\right) \Delta Y_j = a_{ij}^0 - a_{ij} \end{aligned} \quad (2-10)$$

여기서 $a_{ij}^0 - a_{ij} = F_{ij}$ 로 하고 편미분항을 b_1, b_2, b_3, b_4 로 대체하면,

$$\begin{aligned} V_{ij} + b_1 \Delta X_i + b_2 \Delta Y_i + b_3 \Delta X_j + b_4 \Delta Y_j \\ = F_{ij} \end{aligned} \quad (2-11)$$

이다. 여기서,

$$\begin{aligned} b_1 = \frac{Y_j^0 - Y_i^0}{(S_{ij}^0)^2}, \quad b_2 = -\frac{X_j^0 - X_i^0}{(S_{ij}^0)^2} \\ b_3 = -\frac{Y_j^0 - Y_i^0}{(S_{ij}^0)^2}, \quad b_4 = \frac{X_j^0 - X_i^0}{(S_{ij}^0)^2} \end{aligned}$$

위의 계산과정을 반복하여 최종 조정값을 계산한다.

2.3 角條件

θ_{jik} 의 조정각 $\hat{\theta}_{jik}$ 는 다음과 같이 표시된다.

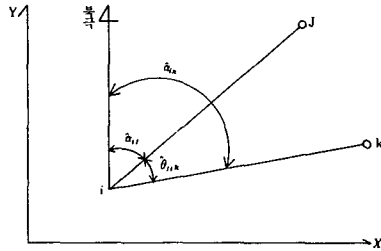


그림 2 - 1. 角條件

$$\hat{\theta}_{jik} = \hat{\alpha}_{ik} - \hat{\alpha}_{ij} \quad (2-13)$$

여기서 $\hat{\alpha}_{ik}$ 는 조정된 ik 방향선에 대한 방위각이고 $\hat{\alpha}_{ij}$ 는 조정된 ij 방향선에 대한 방위각이다. i, j, k 점에 대한 좌표가 $(X_i, Y_i), (X_j, Y_j), (X_k, Y_k)$ 라하면 다음과 같다.

$$\theta_{jik} = \tan^{-1}\left(\frac{X_k - X_i}{Y_k - Y_i}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{X_j - X_i}{Y_j - Y_i}\right) \quad (2-14)$$

角條件式의 선형화된 형태는 다음과 같다.

$$V_{jik} + b_1 \Delta X_i + b_2 \Delta Y_i + b_3 \Delta X_j + b_4 \Delta Y_j + b_5 \Delta X_k + b_6 \Delta Y_k = F_{jik} \quad (2-15)$$

조정각 ($\hat{\theta}_{jik}$)에 대해 관측각 (θ_{jik})와 잔차항 (V_{jik})을 이용하여 표시하면

$$\theta_{jik} = \theta_{jik} + V_{jik} \quad (2-16)$$

이다. 초기값 (θ_{jik}^0)과 관측값 (θ_{jik})을 이용하여 F_{jik} 를 나타내면

$$F_{jik} = \theta_{jik}^0 - \theta_{jik} \quad (2-17)$$

이고, 여기서

$$\theta_{jik} = \tan^{-1}\left(\frac{X_k^0 - X_i^0}{Y_k^0 - Y_i^0}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{X_j^0 - X_i^0}{Y_j^0 - Y_i^0}\right) \quad (2-18)$$

이며 $(X_i^0, Y_i^0), (X_j^0, Y_j^0), (X_k^0, Y_k^0)$ 는 각각 i, j, k 의 좌표에 대한 근사값이다. 따라서 계수 $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ 를 반복 계산하여 최종 조정값을 구한다. 초기값에 의해 이들 계수를 나타내면 다음과 같다.

$$b_1 = -\frac{\partial \theta_{jik}}{\partial X_i} = \frac{Y_k^0 - Y_i^0}{(S_{ik}^0)^2} - \frac{Y_j^0 - Y_i^0}{(S_{ij}^0)^2}$$

$$b_2 = -\frac{\partial \theta_{jik}}{\partial Y_i} = -\frac{X_k^0 - X_i^0}{(S_{ik}^0)^2} + \frac{X_j^0 - X_i^0}{(S_{ij}^0)^2}$$

$$b_3 = -\frac{\partial \theta_{jik}}{\partial X_j} = \frac{Y_j^0 - Y_i^0}{(S_{ij}^0)^2}$$

$$b_4 = -\frac{\partial \theta_{jik}}{\partial Y_j} = -\frac{X_j^0 - X_i^0}{(S_{ij}^0)^2}$$

$$b_5 = -\frac{\partial \theta_{jik}}{\partial X_k} = -\frac{Y_k^0 - Y_i^0}{(S_{ik}^0)^2} = -b_1 - b_3$$

$$b_6 = -\frac{\partial \theta_{jik}}{\partial Y_k} = \frac{X_k^0 - X_i^0}{(S_{ik}^0)^2} = -b_2 - b_4$$

(2-19)

여기서

$$(S_{ij}^0)^2 = (X_j^0 - X_i^0)^2 + (Y_j^0 - Y_i^0)^2$$

$$(S_{ik}^0)^2 = (X_k^0 - X_i^0)^2 + (Y_k^0 - Y_i^0)^2 \quad (2-20)$$

이다.

2.4 後方交會法

測點의 座標는 方向이나 角, 距離를 2개 이상의 既知點에 대해 觀測하므로써 얻을 수 있다

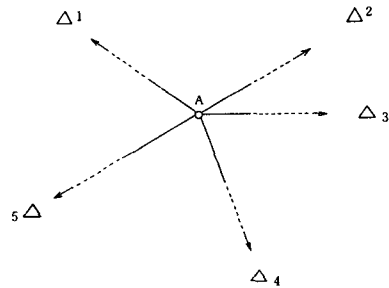


그림 2 - 2. 後方交會法

A點의 座標를 (X, Y) 로 하고 기지점의 좌표를 (X_i, Y_i) 라 하면

$$\varphi_{Ai} = \tan^{-1} \frac{Y_i - Y}{X_i - X} \quad (2-21)$$

φ_{Ai} 는 방향각(α_i)과 기준방향각 (O)와 오차량 (ϵ_{α_i})으로 표시된다.^{3) 4)}

$$\varphi_{Ai} = \alpha_i + \epsilon_{\alpha_i} + O = \tan^{-1}\left(\frac{Y_i - Y}{X_i - X}\right) \quad (2-22)$$

좌표조정을 위해 3개의 방향선에 대해 근사

값을 X' , Y' 로 하고 이때의 기준 방향각을 O' 라 하면 (2-22) 식은 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} \alpha_i + \varepsilon_{\alpha_i} + O' + \Delta O &= \tan^{-1} \frac{Y_i - Y' - \Delta Y}{X_i - X' - \Delta X} \\ &= \varphi'_{\alpha_i} + \Delta \varphi_{\alpha_i} \end{aligned} \quad (2-23)$$

Taylor 급수에 의하여 (2-23) 식을 다시 정리하면

$$\begin{aligned} \alpha_i + \varepsilon_{\alpha_i} + O' + \Delta O &= \tan^{-1} \frac{Y_i - Y'}{X_i - X'} \\ &+ a_i \Delta X + b_i \Delta Y = \varphi'_{\alpha_i} + \Delta \varphi_{\alpha_i} \end{aligned} \quad (2-24)$$

윗식에서 a_i , b_i 는

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{\rho''(Y_i - Y')}{(X_i - X')^2 + (Y_i - Y')^2} = \frac{\rho'' \sin \varphi'_{\alpha_i}}{S'_{\alpha_i}} \\ b_i &= -\frac{\rho''(X_i - X')}{(S'_{\alpha_i})^2} = -\frac{\rho'' \cos \varphi'_{\alpha_i}}{S'_{\alpha_i}} \end{aligned} \quad (2-25)$$

이며 계수 a_i , b_i 는 방향계수이다.

$$\varepsilon_{\alpha_i} = a_i \Delta X + b_i \Delta Y + D_i - \Delta O \quad (2-26)$$

$$D_i = \varphi'_{\alpha_i} - \alpha_i - O' \quad (2-27)$$

경중률을 도입하여 조건방정식을 정리하면 다음과 같다.^{5) 6)}

$$\begin{aligned} [Waa] \Delta X + [Wab] \Delta Y - [Wa] \Delta O \\ + [WaD] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [Wab] \Delta X + [Wbb] \Delta Y - [Wb] \Delta O \\ + [WbD] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -[Wa] \Delta X - [Wb] \Delta Y + [W] \Delta O - [WD] = 0 \\ [W\varepsilon\varepsilon] = [WDD] + [WaD] \Delta X + [WbD] \Delta Y \\ - [WD] \Delta O \end{aligned} \quad (2-28)$$

(2-28) 식에서 ΔX , ΔY 를 계산하여 조정좌표 X , Y 를 구한다.

$$X = X' + \Delta X, \quad Y = Y' + \Delta Y \quad (2-29)$$

2.5 前方交會法

前方交會法은 기지점에서 미지점(A)를 관측하여 위치를 결정하는 방법으로써 A점의 위치를 결정하기 위해 그림 2-3에서와 같이 각이나 距離를 관측한다.

임의점 i 에서의 방위각은

$$\varphi_{i, A} = \tan^{-1} \frac{Y_i - Y_A}{X_i - X_A} = \alpha_{i, A} + O_i \quad (2-30)$$

이며 $i=1, \dots, n-1$ 이고 O_i 는 기준방향각이다.

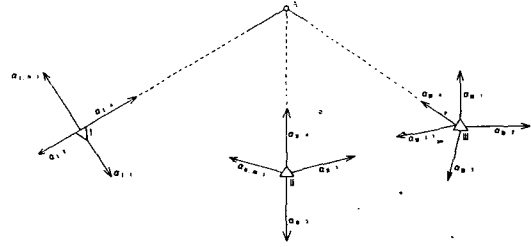


그림 2-3. 前方交會法

측점 A에서 방위각은 다음과 같이 나타낸다.⁴⁾

$$\varphi_{i, A} = \varphi_{i, n} = \tan^{-1} \frac{Y_A - Y_i}{X_A - X_i} = \alpha_{i, A} + O_i \quad (2-31)$$

같은 방법으로 측점 II에서의 식은

$$\varphi_{ii, A} = \tan^{-1} \frac{Y_A - Y_{ii}}{X_A - X_{ii}} = \alpha_{ii, A} + O_{ii} \quad (2-32)$$

이며 측점 A에서 방위각은

$$\varphi_{ii, A} = \tan^{-1} \frac{Y_A - Y_{ii}}{X_A - X_{ii}} = \alpha_{ii, A} + O_{ii} \quad (2-33)$$

이다.

기준방향각 O_i 는 O'_i 에 의해 계산되며 O'_i 는

$$O'_i = \varphi_{i, i} - \alpha_{i, i} \quad (2-34)$$

이다.

$$\begin{aligned} O_i &= \frac{(\varphi_{i, 1} - \alpha_{i, 1}) + (\varphi_{i, 2} - \alpha_{i, 2}) \\ &+ \dots + (\varphi_{i, n-1} - \alpha_{i, n-1})}{n-1} \end{aligned} \quad (2-35)$$

똑같은 방법으로 O_{ii} 가 얻어진다.

$$\begin{aligned} O_{ii} &= \frac{(\varphi_{ii, 1} - \alpha_{ii, 1}) + (\varphi_{ii, 2} - \alpha_{ii, 2}) \\ &+ \dots + (\varphi_{ii, m-1} - \alpha_{ii, m-1})}{m-1} \end{aligned} \quad (2-36)$$

觀測方程式은 다음과 같다.⁷⁾

$$\begin{aligned} \alpha_{i, A} + \varepsilon_{\alpha_{i, A}} + O_i &= \tan^{-1} \frac{Y_A + \Delta Y_A - Y_i}{X_A + \Delta X_A - X_i} \\ &= \varphi'_{i, A} + \Delta \varphi_{i, A} \end{aligned} \quad (2-37)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{ii, A} + \varepsilon_{\alpha_{ii, A}} + O_{ii} &= \tan^{-1} \frac{Y_A + \Delta Y_A - Y_{ii}}{X_A + \Delta X_A - Y_{ii}} \\ &= \varphi'_{ii, A} + \Delta \varphi_{ii, A} \end{aligned} \quad (2-38)$$

(2-37) 식과 (2-38) 식을 선형화 하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{A, I} &= a_{A, I} \triangle X_A + b_{A, I} \triangle Y_A + D_{A, I} \\ \varepsilon_{A, II} &= a_{A, II} \triangle X_A + b_{A, II} \triangle Y_A + D_{A, II} \end{aligned} \quad (2-39)$$

여기서

$$\begin{aligned} D_{A, I} &= \varphi_{A, I} - (\alpha_{I, A} + O_I + 180^\circ) \\ D_{A, II} &= \varphi_{A, II} - (\alpha_{II, A} + O_{II} + 180^\circ) \end{aligned}$$

이며 $a_{A, I}$, $b_{A, I}$ 는 $\varphi_{I, A}$ 의 방향계수이다. 경중률을 고려하여 조건방정식을 구성하면,

$$\begin{aligned} [Waa] \triangle X_A + [Wab] \triangle Y_A + [WAD] &= 0 \\ [Wab] \triangle X_A + [Wbb] \triangle Y_A + [WbD] &= 0 \end{aligned} \quad (2-40)$$

이며 보정량

$$\varepsilon_{A, I} = D_{A, I} + \triangle \varphi_{A, I} \quad (2-41)$$

이다.

2.6 分散에 대한 검정

표본 평균을 \bar{X} 라 하고 관측값을 X_i 라 하면 임의 표본에 대한 표본분산 (S^2)은 다음과 같다.¹⁾

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (2-42)$$

S^2 의 분포는 자유도가 $(n-1)$ 인 χ^2 분포로 표시하면

$$Y = \frac{n-1}{\sigma^2} S^2 \quad (2-43)$$

이며 모집단으로부터 크기가 n 인 임의의 표본을 택할 때 자유도가 $n-1$ 이고 χ^2 분포를 나타내는 (2-43)식에 의해 관계가 표시되고 이 식은 그 집단의 분산 σ^2 에 대한 신뢰구간을 계산하는데 이용된다. 즉

$$P\left\{ \chi_{a, n-1}^2 < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi_{b, n-1}^2 \right\} = b - a \quad (2-44)$$

여기서 $\chi_{a, n-1}^2$ 와 $\chi_{b, n-1}^2$ 은 각각 자유도 $n-1$ 을 가지는 χ^2 -분포의 한계구간을 나타낸다.

(2-44)식으로부터

$$P\left\{ \frac{\chi_{a, n-1}^2 \sigma^2}{n-1} < S^2 < \frac{\chi_{b, n-1}^2 \sigma^2}{n-1} \right\} = b - a \quad (2-45)$$

이 된다.

S^2 의 신뢰구간은 $\frac{\chi_{a, n-1}^2 \sigma^2}{n-1}$ 과 $\frac{\chi_{b, n-1}^2 \sigma^2}{n-1}$ 이 된다.

여기서 $a = \alpha/2$ 이고 $b = 1 - \alpha/2$ 이다.

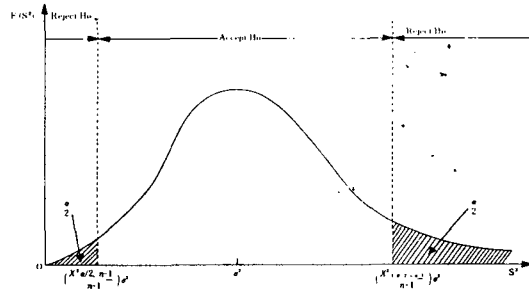


그림 2-4. 확률분포의 분산검정

2.7 誤差橢圓

分散이나 標準備차는 角이나 距離와 같이 1차원의 경우에 대한 精密度의 척도이다. 그러나 점의 水平位置와 같이 2차원상에서의 精密度 영역은 誤差橢圓으로 나타낸다.

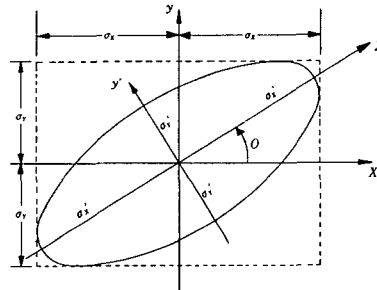


그림 2-5. 誤差橢圓

어떤 점을 θ 방향으로 변환할 때의 식은

$$\begin{aligned} X' &= X \cos \theta + Y \sin \theta \\ Y' &= -X \sin \theta + Y \cos \theta \end{aligned} \quad (2-46)$$

이다. 어떤 관측값 a , b 에 대해 分散 σ_a^2 , σ_b^2 , 共分散 σ_{ab} 라 하면 a , b 의 함수 F 의 分散 σ_F^2 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_F^2 &= \sigma_a^2 (\partial F / \partial a)^2 + \sigma_b^2 (\partial F / \partial b)^2 \\ &\quad \dots + 2 \sigma_{ab} (\partial F / \partial a) (\partial F / \partial b) \end{aligned} \quad (2-47)$$

(2-46)식과 (2-47)식을 적용하여 σ_x^2 과 σ_y^2 을 구하면 다음과 같다.⁸⁾

$$\begin{pmatrix} \sigma_x^2 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_a^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_b^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta - \sin\theta \\ \sin\theta \cos\theta \end{pmatrix} \quad (2-48)$$

σ_x^2 이 θ 에 따라 변화하여 최대값을 갖는 θ 를 구하면 $\partial\sigma_x^2/\partial\theta=0$ 이므로

$$\tan 2\theta = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2} \quad (2-49)$$

이다. 또한 誤差橢圓의 장축과 단축은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_{max}^2 &= \frac{1}{2}[(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) + \{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + 4(\sigma_{xy})^2\}^{1/2}] \\ \sigma_{min}^2 &= \frac{1}{2}[(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) - \{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + 4(\sigma_{xy})^2\}^{1/2}] \end{aligned} \quad (2-50)$$

장반경이 σ_{max} 이고 단반경이 σ_{min} 인 타원을 標準誤差橢圓이라고 하며 표준오차타원은 σ_x 와 σ_y 의 영역내에 있을 확률이 39.4%에 불과하므로 실질적인 의미는 없다. 따라서 95% 신뢰도를 갖는 신뢰타원을 사용하게 되는데 이 경우 표준오차타원의 장·단반경에 2.447배를 하여 신뢰타원을 구성한다.

2.8 圖形的 強度

수평위치 결정에서의 양호한 결과는 계산된 변의 길이가 分散(σ_{bi}^2)으로 나타난 허용범위에 들어야 한다. 이 分散은 관측된 角과 距離로 표현된 방정식에 의한 오차전파로 결정된다.⁸⁾

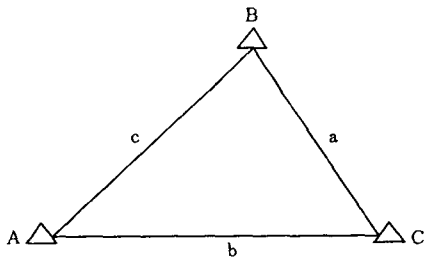


그림 2-6. 단삼각형

변 a에 대한 分散은

$$\sigma_a^2 = \frac{2}{3} a^2 (\cot^2 A + \cot A \cot B + \cot^2 B) \sigma^2 \quad (2-51)$$

이며 여기서 σ^2 은 觀測角의 分散이다. 그러나 실제의 측량에서는 기선관측에서도 오차가 발생하므로 기선에 대한 오차항을 고려해서 $(\partial a/\partial b)^2$

한국측지학회지

$\sigma_b^2 = (a/b)^2 \sigma_b^2$ 가 추가된다.

$$\sigma_a^2 = \frac{a^2}{b^2} \sigma_b^2 + \frac{2}{3} a^2 (\cot^2 A + \cot A \cot B + \cot^2 B) \sigma^2 \quad (2-52)$$

계산된 변의 길이의 오차범위는 변에 log를 취한 값의 分散항으로 나타낼 수 있으며 角의 分散이 方向分散에 2 배임을 고려해서 표시하면,

$$\sigma_{log a}^2 = \sigma_{log b}^2 + \frac{2}{3} \sum (\sigma_{Ai}^2 + \sigma_{Ai} \sigma_{Bi} + \sigma_{Bi}^2) \sigma_a^2 \quad (2-53)$$

(2-53) 式을 조건식수와 관측식수를 고려하여 다시 정리하면,

$$R = \frac{D \cdot C}{D} \sum (\sigma_{Ai}^2 + \sigma_{Ai} \sigma_{Bi} + \sigma_{Bi}^2) \quad (2-54)$$

이다. 여기서,

R : 도형의 강도 D : 網内の 총방향수

C : 總角과 辺條件數

圖形的 強度(R)는 網을 형성할 때 예비작업으로 선행되어야 하며 R의 값이 작으면 網의 정확도는 높다.

2.9 經重率 適用

본 연구에서 前方交會法과 後方交會法으로 좌표조정을 하는 과정에서 경중율을 적용은 다음과 같은 네가지 개념을 이용하였다. 첫째, 角과 距離에 따른 오차를 고려한 경중율을 도입하였다. (2-25) 式에서 a_i 와 b_i 를 이용하여 각 방향선에 대한 分散(σ_{bi}^2)을 표시하면 다음과 같다.⁹⁾

$$\sigma_{a_i b_i}^2 = \sigma_{a_i}^2 + \rho^2 (a_i Q_{xi} + b_i Q_{yi}) \sigma_c^2 \quad (2-55)$$

여기서 $\rho = 206265''$ 이며 $\sigma_{a_i}^2$ 은 각 관측시 발생하는 표준편차에 대한 분산이고 Q_{xi} , Q_{yi} 는 기지점의 경중률 계수이며 σ_c^2 은 기지점의 分散이다.

$$\sigma_{a_i b_i}^2 = \sigma_{a_i}^2 + \frac{\rho^2 \sigma_c^2}{(S'_{Ai})^2} (\sin \varphi'_{Ai} Q_{xi} - \cos \varphi'_{Ai} Q_{yi})^2 \quad (2-56)$$

이며 (2-56) 式에서 좌표축을 φ'_{Ai} 만큼 회전시켜 오차전파식을 적용하면 다음과 같아진다.

$$\sigma_{a_i b_i}^2 = \sigma_{a_i}^2 + \frac{\rho^2 \sigma_c^2}{(S'_{Ai})^2} Q_{yi}^2$$

$$= \sigma_{a_i}^2 + \frac{\rho^2 \sigma_{v_i}^2}{(S'_{a_i})^2}$$

따라서 경중율은 分散에 반비례 하므로

$$W = 1/\sigma_{a_i}^2 \quad (2-57)$$

이다.

둘째, 기지점과 미지점간의 거리가 방향선에 따라 다르므로 각각의 방향선에 대해 거리에 반비례 (1/D_i) 하여 경중율을 주었다.⁴⁾

$$W = 1/D_i \quad (2-58)$$

세째, 둘째에서 고려한 거리에 반비례하여 경중율을 고려한 경우와 거리의 제곱에 반비례 (1/D_i²) 하여 경중율을 고려한 경우와 비교하기 위해 경중율을 거리의 제곱에 반비례하여 도입하였다.⁵⁾

$$W = 1/D_i^2 \quad (2-59)$$

네째, 圖形의 強度 (R) 값을 각각의 방향선에 대해 구한 다음 R 값은 작을수록 정확도가 높으므로 경중율을 R 값의 역수로 하여 적용하였다.⁶⁾

$$W = 1/R_i \quad (2-26)$$

3. 觀測 및 結果分析

3.1 觀 測

前方交會法과 後方交會法을 비교 분석하기 위해 5 개의 기지점에서 1 개의 미지점을 관측하였다. 前方交會法에서는 각각의 기지점에서 WILD-T₂로 방위각을 관측하였으며 後方交會法에서는 미지점에 WILD-T₂를 설치하고 1 번 기준점을 기준으로 하여 방향각을 관측하였다. 또한 기지점과 미지점간의 거리를 Auto-Ranger II로 거리를 측정하여 검정자료로 사용하였다.

後方交會法の 관측값은 다음과 같다.

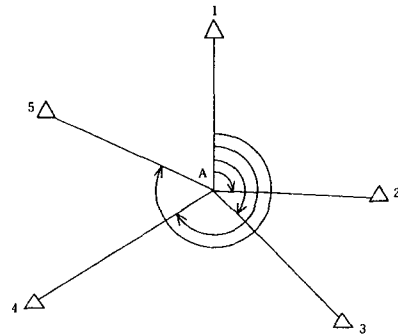


그림 3 - 1. 後方交會法の 各觀測

表 3 - 1 後方交會법에 의한 관측성과

삼각점	X (m)	Y (m)	관측방향	관 측 각
1	12165,25112	-1525,73135	A→1	0°00'00"
2	9081,15548	721,79287	A→2	99°28'31.8"
3	6810,12933	39,73547	A→3	148°36'47.6"
4	8424,25695	-3657,41139	A→4	242°37'19.0"
5	10617,47298	-3435,23596	A→5	300°25'26.7"

前方交會法の 관측값은 다음과 같다.(그림 3 - 2, 表 3 - 2 참조)

表 3 - 2 前方交會법에 의한 관측성과

삼각점	X (m)	Y (m)	관측방향	관 측 각
1	12165,25112	-1525,73135	1→A	180°36'19"
2	9081,15548	721,79287	2→A	280°05'00"
3	6810,12933	39,73547	3→A	329°13'13.3"
4	8424,25695	-3657,41139	4→A	36°13'35.4"
5	10617,47298	-3435,23596	5→A	121°02'45.8"

表 3 - 3 角觀測의 표준편차

방향선	후 방 교 회 법			전 방 교 회 법		
	관 측 각	평 균 값	$\epsilon\epsilon$	관 측 각	평 균 값	$\epsilon\epsilon$
1 ↔ A	0° 00' 00"	0° 00' 0.14"	0.0196"	180° 36' 19"	180° 36' 20.95"	3.80"
2 ↔ A	99° 28' 31.8"	99° 28' 35.7"	15.21"	280° 05' 00"	280° 05' 01.9"	3.611"
3 ↔ A	148° 36' 47.6"	148° 36' 46.0"	2.56"	329° 13' 13.3"	329° 13' 11.14"	4.67"
4 ↔ A	242° 37' 19.0"	242° 37' 22.6"	12.96"	36° 13' 35.4"	36° 13' 37.41"	4.04"
5 ↔ A	300° 25' 26.7"	300° 25' 23.0"	13.69"	121° 02' 45.8"	21° 02' 43.95"	3.42"
	S=3.33"			S=2.21"		

表 3 - 4 후방교회법에서 좌표조정시 기지점수에 따른 오차분포

Case	기지점수	표준 오 차 타 원		신 회 타 원		회 전 각
		$\sigma_{max}(10^{-2}m)$	$\sigma_{min}(10^{-2}m)$	$\sigma'_{max}(10^{-2}m)$	$\sigma'_{min}(10^{-2}m)$	
1	2	2.33776	1.18184	5.72050	2.89196	187° 23' 47.7"
2	3	2.27702	1.17110	5.57187	2.86568	214° 45' 53.2"
3	4	2.05818	1.16223	5.03637	2.79504	212° 01' 39.5"
4	5	1.72912	1.15180	4.23116	2.81845	199° 34' 22"

表 3 - 5 후방교회법에서 경중률에 따른 오차타원

경우	경 중 율	표준오차타원		신 회 타 원		회 전 각
		$\sigma_{max}(10^{-2}m)$	$\sigma_{min}(10^{-2}m)$	$\sigma'_{max}(10^{-2}m)$	$\sigma'_{min}(10^{-2}m)$	
1	$1/\sigma_{a, D_i}^2$ 에 따른 경중율	1.57345	1.15123	3.85023	2.81405	206° 57' 26.3"
2	$1/D_i$ "	1.65753	1.15192	4.05598	2.81875	199° 27' 17"
3	$1/D_i^2$ "	1.70332	1.15011	4.16802	2.81432	198° 29' 48.1"
4	도형의 강도(1/R) "	1.55417	1.14991	3.80305	2.81383	199° 0' 21.3"
5	단위경중율(W=1) "	1.72912	1.15180	4.23116	2.81845	199° 34' 22"

表 3 - 6 전방교회법에서 좌표조정시 기지점수에 따른 오차분포

Case	기지점수	표준오차타원		신 회 타 원		회 전 각
		$\sigma_{max}(10^{-2}m)$	$\sigma_{min}(10^{-2}m)$	$\sigma'_{max}(10^{-2}m)$	$\sigma'_{min}(10^{-2}m)$	
1	2	2.27342	1.10333	5.56306	2.69985	187° 24' 27.8"
2	3	1.71499	0.93472	4.19658	2.28726	200° 13' 08.5"
3	4	1.72309	0.90276	4.21640	2.20905	195° 41' 44.8"
4	5	1.38301	0.98084	3.38423	2.40012	202° 26' 17.2"

表 3 - 7 전방교회법에서 경중률에 따른 오차타원

경우	경 중 율	표준오차타원		신 회 타 원		회 전 각
		$\sigma_{max}(10^{-2}m)$	$\sigma_{min}(10^{-2}m)$	$\sigma'_{max}(10^{-2}m)$	$\sigma'_{min}(10^{-2}m)$	
1	$1/\sigma_{a, D_i}^2$ 에 따른 경중율	1.09345	0.50216	2.67567	1.22879	206° 58' 14.6"
2	$1/D_i$ "	1.13189	0.49925	2.76973	1.22166	197° 53' 42.6"
3	$1/D_i^2$ "	1.28088	0.72356	3.13431	1.77055	197° 15' 06.2"
4	도형의 강도(1/R) "	1.10801	0.54703	2.71130	1.33858	201° 33' 37.4"
5	단위경중율 "	1.38301	0.98084	3.38423	2.40012	202° 26' 17.2"

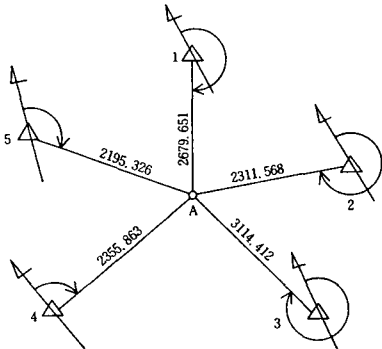


그림 3 - 2. 전방교회법의 각관측

3.2 觀測값의 信賴檢定

본 연구에서 사용한 각관측 기구는 WILD T₂ 로써 최소 읽음값이 1"이다. 일반적으로 최소 읽음값이 1"인 관측기계의 分散(σ^2)은 많은 실험을 통해 6.25"로 사용하고 있다. 따라서 χ^2 - 分布에 의한 신뢰검정은 다음과 같다.

95% 신뢰구간을 고려할 경우 $\chi_{0.025,4}^2$ 과 $\chi_{0.975,4}^2$ 는 0.484와 11.1이다. (表 3 - 3 참조)

$$0.484'' < S < 11.1''$$

후방교회법에서 $S=3.33''$ 이고 전방교회법에서 $S=2.21''$ 로써 95% 신뢰구간내에 있음을 알 수 있다.

3.3 後方交會法에 의한 結果값 分析

후방교회법에 의한 조정을 하기 위해 미지점에서 5개의 기지점에 대해 방향각을 관측하여 좌표조정을 하였다. 먼저 미지점 좌표를 결정하는데 있어 기지점수를 증가시키며 오차타원의 크기와 방향을 분석하였으며 表 3 - 4 와 그림 3 - 3 과 같다.

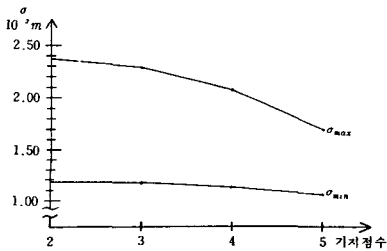


그림 3 - 3. 전방교회법에서 기지점수에 따른 오차타원의 σ_{max} 와 σ_{min}

오차타원은 확률이 39.4%이므로 95% 확률을 나타내는 신뢰타원을 이용하여 오차변화를 고려해 보면 기지점수가 2개일 때 $\sigma_{max}=5.72 \times 10^{-2}m$, $\sigma_{min}=2.89 \times 10^{-2}m$ 이며 기지점수가 증가함에 따라 크기가 감소하여 기지점수가 5개일 때 $\sigma_{max}=4.23 \times 10^{-2}m$, $\sigma_{min}=2.82 \times 10^{-2}m$ 로 감소했다. σ_{min} 은 변화가 없지만 σ_{max} 은 26%정도 감소하였다. 미지점좌표 계산 중 5개의 기지점을 이용하여 계산하는 과정에서 앞의 2.9절 經重率適用에서 서술한 바와 같이 여러가지 경중률을 도입하여 계산한 결과는 表 3 - 5 와 같다.

오차조정을 할 때 단위 경중률에 의한 조정보다 $1/\sigma_{bi}$ 에 따른 경중률을 고려한 경우가 9%의 오차감소를 보였고 $1/D_i$ 에 따른 경중률을 고려했을 경우가 4%, $1/D_i^2$ 에 따른 경중률을 고려한 경우가 2%, 도형의 강도에 따른 경중률을 고려한 경우가 10%의 오차감소를 나타냈다. 가장 큰 오차감소를 보인 도형의 강도에 따른 경중률을 고려한 경우를 단위 경중률인 경우와 비교해서 그림으로 표시하면 그림 3 - 4 와 같다.

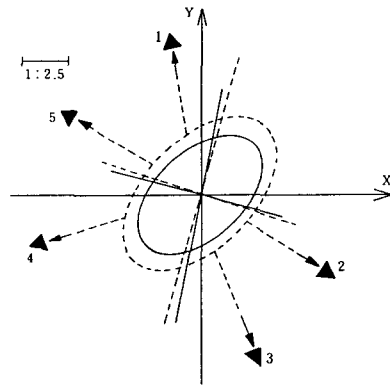


그림 3 - 4. 경중률이 1/R인 경우의 신뢰타원

위의 결과분석에 나타난 오차타원의 감소량은 본 연구에서 사용한 측량성과에 대한 것으로 관측장비에 따라 또는 측량성과의 형태에 따라 조금씩 변화할 수 있으며 미지점과 기지점간의 상호관계에 따라 변화할 수 있어서 앞으로 여러 가지 경우에 대한 연구분석이 이뤄져야 할 것으로 믿는다.

3.4 前方交會法에 의한 결과값 분석

前方交會法에 의한 조정에서도 후방교회법과 같이 미지점의 위치를 결정하는데 있어 기지점수를 증가시키면서 오차타원의 크기와 방향의 변화에 대해 분석하였다. 기지점수에 따른 오차타원의 변화량은 表 3-6 과 그림 3-5 와 같다.

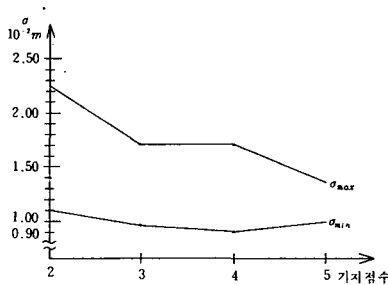


그림 3-5. 후방교회법에서 기지점수에 따른 표준오차타원의 σ_{max} 와 σ_{min}

신뢰타원의 크기를 분석해 보면 기지점의 수가 2개인 경우는 $\sigma_{max}' = 5.56 \times 10^{-2}m$, $\sigma_{min}' = 2.70 \times 10^{-2}m$ 이었으며 기지점수가 증가함에 따라 감소하여 기지점의 수가 5개인 경우는 $\sigma_{max}' = 3.38 \times 10^{-2}m$, $\sigma_{min}' = 2.40 \times 10^{-2}m$ 로 나타났다. 전방교회법에서도 σ_{min}' 의 변화는 미소하지만 σ_{max}' 은 약 39%까지 감소했다.

5개의 기지점을 이용하여 좌표조정을 할 때 경중률을 도입하여 각각의 경중률에 따른 오차타원의 변화를 분석하였다.(表 3-7 참조)

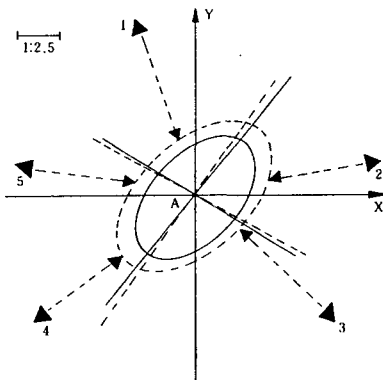


그림 3-6. 경중률이 $1/\sigma_{a, D_i}^2$ 인 경우의 신뢰타원

단위 경중률에 대해 신뢰타원의 σ_{max}' 이 감소하였으며 경중률이 $1/\sigma_{a, D_i}^2$ 인 경우가 20%, $1/D_i$ 로 한 경우가 18%, $1/D_i^2$ 로 한 경우가 7%, 도형의 강도(1/R)로 한 경우가 19%로 신뢰타원의 크기가 감소하였다.

따라서 전방교회법에서는 경중률을 $1/D_i^2$ 로 한 경우를 제외하고 18~20% 정도의 오차감소를 가져 왔다. 경중률을 $1/\sigma_{a, D_i}^2$ 으로 한 경우와 단위경중률인 경우를 비교해서 신뢰타원을 나타내면 그림 3-6 과 같다.

전방교회법에서도 오차타원의 변화량이 미지점과 기지점의 상관관계에 따라 조금씩 변화할 수 있으므로 많은 형태에 대해 추량을 하여 통계적 처리를 하므로써 보다 일반적인 결과분석을 얻을 수 있다고 사료된다.

4. 結 論

前方交會法과 後方交會法에 의해 계산된 결과를 분석한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

첫째, 후방교회법에서 기지점수를 5개까지 증가시킨 결과 기지점수가 2개인 경우에 비해 신뢰타원의 σ_{max}' 를 26%까지 감소시킬 수 있었으며 각각의 방향선에 따른 경중률($1/\sigma_{a, D_i}^2$)을 고려한 경우가 단위 경중률로 조정된 경우보다 9~10% 정도 오차감소를 나타냈다.

둘째, 전방교회법에서 기지점수를 2개에서 5개까지 증가시켰을 때 신뢰타원의 σ_{max}' 는 39%까지 감소했으며 각각의 방향선에 대해 경중률을 고려한 경우 오차감소는 경중률을 $1/D_i^2$ 로 한 경우를 제외하고 18~20% 정도의 오차감소를 가져 왔다.

셋째, 後方交會法과 前方交會法에 의해 오차를 분석한 결과 지반의 수평이동 및 시설물의 변형추량에 解析的 交會法이 유용하게 사용될 수 있을 것으로 사료된다.

謝 辭

本 研究는 1985년도 文敎部 學術 研究造成費에 의해 수행된 연구로써 本 研究를 가능케 한 文敎部에 심심한 感謝를 드리는 바이다.

參考文獻

1. Mikhail, E.M., Analysis and adjustment of Survey Measurement, Van Nostrand Reinhold Company, 1981
2. James, R.B., Adjusting Radial Surveying, Journal of the Surveying & Mapping, 1972
3. Haasbroek, N.O., Deformation measurements by Resection, Tijdschrift Voor Kadaster en Landmeetkunde, 1963
4. Richardus, P., Project Surveying, Worth-Holland, 1977.
5. Hirvonen, R.A., Adjustment by least square in Geodesy and photogrammetry, Frederick Unger Publishing Co., New York, 1979 . . .
6. Allman, J.S., Notes on Resection Computation, Australian Surv., 278, March, 1963
7. Richardus, P., The precision of an intersection Tijdschrift Voor Kadaster en Landmeetkunde, 4 Any, 1963
8. 柳福模, 測量學原論, 開文社, 1984