

論 文

PID出力歸還制御器의 變數調整에 關한 研究

正會員 成 源 基* 正會員 崔 宗 秀** 正會員 河 龍 守***

A study on the Parameter Regulation of PID Output Feedback Controllers

Weon Gi SEONG*, Jong Soo CHOI** and Yong Soo HA*** Regular Members

要 約 三項出力歸還制御器의 파라미터調整을 컴퓨터模擬實驗에 의해 時間領域解析과 最適值를 活用할 수 있게 하였다. 定常狀態應答, 外亂無視, 過度應答逐行을 效率的으로 選擇될 수 있는 PID制御器의 設計를 洋用例에 의하여 考察하였다. 이에 의해 sensor base system構成圖를 또한 提示한다.

ABSTRACT The parameter regulation of proportional-plus-intergral-plus-derivative output feedback controllers is presented in the practical computer simulation and the time-domain analysis. Particularly, the restriction of parameter regulation for PID controller utilization is investigated as a result of simulation method. It is finally noted that one may resort to the design of controllers, as investigated, for rapid steady-state response, disturbance rejection, and transient response performance (over 3rd-order process) without computing the open-loop transfer functionmatrix. In consequence is presented the block diagram of sensor base system for PID output feedback controllers.

1. 序 論

레이아웃이나의 制御, 工作機械의 制御, 工程制御 等을 위한 서어보機構(servo mechanism)의 制御器 適用 解析에 關한 研究가 상당히 增加되고 있다.

특히 制御系는 制御量을 測定하여 目標值와 比較하여 制御偏差가 最小가 되도록 하기 위해 空氣壓力式, 電子式 制御器 等을 活用하며, 最近既存의 μ -processor 뿐만 아니라 디지탈 컴퓨터로 制御器를 構成하고 있다^{(1)~(4)}.

定常狀態應答(static accuracy), 外亂 혹은 傳達

遲延, 不感時間(disturbance rejection and transient response)에 效率의 PID制御器의 活用에 導 우크調節法(loop tuning rule)과 工程反應曲線法 等을 適用해 오고 있다⁽²⁾⁽⁵⁾.

70年代부턴 modal(eigenvalue, pole) control 理論을 基盤으로 E. J. Davison, D. G. Luenberger, H. Seraji, M. Tarokh等에 의한 多變數시스템의 各種 制御器(PI, PD, PID Controller)의 設計理論이 發表되어 오고 있다^{(6)~(11)}.

1980年 P. N. Paraskevopoulos는 多變數시스템의 PID出力歸還制御器의 設計理論에 의한 制御器의 파라미터 調整을 提示하였다⁽¹⁾.

本論文에서는 이 理論을 컴퓨터 模擬實驗에 의해 必要 條件附合當性을 診斷으며, 實際 產業現場의 sampled-data system(computer-controlled system)에 活用할 수 있는 制御시스템構成의 假

* ** *** 中央大學校工科大學電子工學科

Dept. of Electronic Engineering, Chungang
University Seoul, 151 Korea.

論文番號: 85-24 (接受 '85. 7. 3)

定을 보여 주었다. 그리고 scalar control system (SISO system)의 4次閉回路 시스템을適用하여汎用PID制御器 파라미터有用性을 提示하였다.

따라서 plant가 高次인 境遇 時間領域解析에서의 PID出力歸還制御 시스템의 安定한 극점(pole)의 位置를 決定함으로서 效率的인 시스템 動的應答을 考慮했고 PID出力歸還制御를 適用한 sensor base system을 提案하였다.

2. 多變數시스템의 PID制御 設計理論

마리 特定된 定常狀態 正確度(static accuracy), 外亂無視(disturbance rejection), 過渡應答(transient response)等을 解析할 수 있는 modal control 이可能한 PID出力歸還制御器의 파라미터 設整이 必要하다.

2-1. 出力歸還시스템

다음의 그림 1은 PID制御器의 出力歸還 시스템이다.

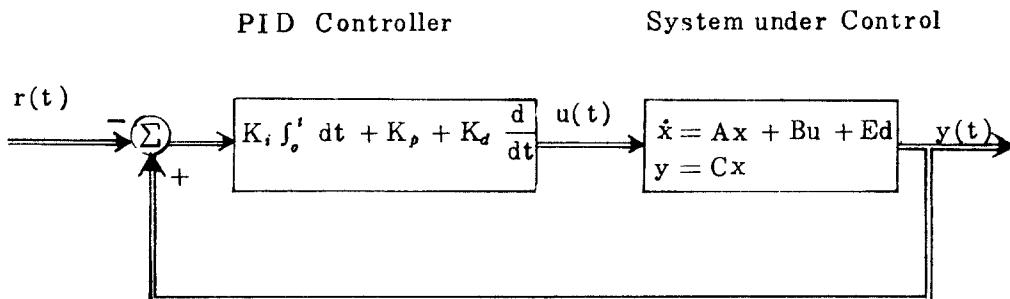


그림 1 PID制御 시스템
System under control with PID controller.

狀態空間에서 描寫된 線形時不變 多變數 시스템은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Ed \\ y &= Cx \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{1} \end{array} \right\}$$

단, $x: n \times 1$ state-vector, $u: m \times 1$ input vector,
 $d: v \times 1$ disturbance vector,
 $y: l \times 1$ output vector,
 A, B, C, E : constant matrices.

그림 1에서 出力歸還法則(output feedback law)은 다음의 形態로 假定된다.

$$u = K_i \int_0^t (y - r) dt + K_p(y - r) + K_d(\dot{y} - \dot{r}) \quad (2)$$

단, K_i, K_p, K_d : constant $m \times l$ integral, proportional, derivative output feedback matrices.

r : reference input

따라서, $z = \int_0^t y dt$ 라 하면 다음의 式과 같은 擴大 狀態變數 形態를 構成할 수 있다.

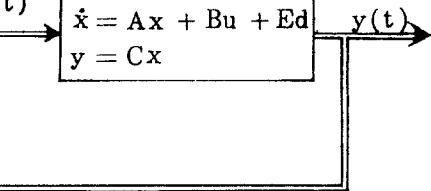
$$\begin{aligned} x^* &= A^*x^* + B^*d \\ y &= C^*x^* \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{3} \end{array} \right\}$$

$$\text{단, } \omega = -K_i \int_0^t r dt - K_p r - K_d \dot{r},$$

$$A^* = \begin{bmatrix} O & C \\ (I_n - BK_d C)^{-1} BK_i & (I_n - BK_d C)^{-1} (A + BK_p C) \end{bmatrix},$$

$$X^* = \begin{bmatrix} Z \\ X \end{bmatrix}, \quad B^* = \begin{bmatrix} O \\ (I_n - BK_d C)^{-1} B \end{bmatrix},$$

System under Control



$$E^* = \begin{bmatrix} O \\ (I_n - BK_d C)^{-1} E \end{bmatrix}, \quad C^* = \begin{bmatrix} O : C \end{bmatrix}$$

단, $A^*: (n+l) \times (n+l)$, $X^*: (n+l)$,
 $B^*: (n+l) \times m$, $E^*: (n+l) \times v$,
 $C^*: l \times (n+l)$

2-2. 定常狀態와 外亂無視 條件

出力歸還法則 式(2)의 積分項이 定常狀態外

亂無視 條件을 滿足시킴을 다음과 같이 說明할 수 있다.

式(1)과 歸還法則 式(2)의 Laplace 變換에 의한 出力은 다음과 같다.

$$Y(S) = [I_l - G(S)K(S)]^{-1} [-G(S)K(S)R(S) + \hat{G}(S)D(S)] \quad (4)$$

$$\text{단, } K(S) = K_t/S + K_p + K_d S,$$

$$G(S) = C(SI_n - A)^{-1}B,$$

$$\hat{G}(S) = C(SI_n - A)^{-1}E$$

$R(S) = r_o/S$ 와 $\lim_{t \rightarrow 0} d(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} SD(S) = d_o$ 로 假定하면, 最終值定理(final-value theorem)에 의해 出力 $y(t)$ 의 定常狀態 y_{ss} 를 구할 수 있다.

$$\text{즉, } y_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} S Y(S) = r_o$$

2-3. 安定한 閉回路시스템의 制御器變數 決定(transient response)

바람직한 閉回路시스템이 $[sI_{n+l} - A^*] + \sum_{i=1}^{n+l} \frac{H}{(S - \lambda_i)}$ 되도록 K_t, K_p, K_d 를 決定할 수 있는 誘導式은 다음과 같다.

$$[sI_{n+l} - H] = \sum_{i=1}^{n+l} (S - \lambda_i)$$

단, $H : (n+l) \times (n+l)$ square matrix
($\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+l}$: eigenvalues)

$A^* = H \circ$ 成立해야 한다.

$$\begin{aligned} A^* &= \begin{bmatrix} O & \\ (I_n - BK_dC)^{-1}BK_t & (I_n - BK_dC)^{-1} \\ & (A + BK_pC) \end{bmatrix} C \\ &= \begin{bmatrix} A_1^* \\ A_2^* \end{bmatrix} = H = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

따라서 $A_2^* = H_2$ 關係式에서 다음과 같은 Algorithm Function을 구할 수 있다^{[2][3]}:

$$BKM = V \quad (6)$$

$$\text{단, } K = [K_t \ K_p \ K_d] : m \times 3l$$

$$M = \begin{bmatrix} \hat{I} \\ \hat{C} \\ CH_2 \end{bmatrix} : 3l \times (n+l)$$

$$V = H_2 - \hat{A} : n \times (n+l)$$

$$\hat{A} = [O \ A] : n \times (n+l)$$

$$\hat{C} = [O \ C] : l \times (n+l)$$

$$\hat{I} = [I_l \ O] : l \times (n+l)$$

3. 컴퓨터 시뮬레이션

3-1. 計算處理 理論

식(1)은 빼타行列形으로 n 個 1次 差分狀態方程式을 쓰면 z Transform을 利用하여 다음과 같이 解를 구할 수 있다. 이는 離散值 制御系로 解析함으로서, 現代制御시스템에서 디지털 컴퓨터로 computer-controlled system을構成하기 때문이다.

식(1)은 다음과 같은 一般式에서 解를 구할 수 있다.

$$X(K+1) = AX(K) + Bu(K)$$

따라서 n 次 差分狀態方程式의 解는 다음과 같다.

$$X(N) = \phi(N)X(0) + \sum_{k=0}^{N-1} \phi(N-k-1)Bu(k)$$

$$\text{단, } N = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

설명 빼타行列形 式(1)은 $t = KT$ (T : sampling period)에서 다음과 같은 n 個 1次 差分方程式을 쓸 수 있다^{[3][4]}

$$X((K+1)T) = AX(KT) + Bu(KT) + Ed(KT) + y(KT) - X(KT) \quad (7)$$

外亂項은 線形加法項(linear additive term)으로 外亂階段入力函數(step input function), 혹은 外亂梯度入力函數(ramp input function)을 考慮한다. input vector u 는 actuating signal인 離散值 $u(KT)$ 로 다음과 같이 計算處理하였다.

$$\begin{aligned} u(KT) &= K_t \sum_{l=1}^K [y(lT) - r(lT)] \cdot T \\ &\quad + K_t \sum_{l=1}^K [y(lT) - r(l-1)T] \cdot T/2 \\ &\quad + K_p[y(KT) - r(KT)] + \end{aligned}$$

$$+ K_d \cdot \frac{[y(K-1)T - y(KT)]}{T} \quad (8)$$

應答誤差減少를 위해 數值積分項을 사다리積分(trapezoidal integration)으로 補償하였다. 그리고 Routh-Hurwitz 判別法과 Lin's Method에 의해 安定한 plant 와 閉回路시스템을 考慮해 보았다.^{13, 14} 이는 安定한 시스템일 境遇에만 應答解析의 意味가 있기 때문이다.

時間領域에서의 過渡動作과 定常狀態應答 考察은 初期值를 零으로 놓고, 階段入力 $r(t) = rU_s(t)$ 과 外亂階段入力 $d(KT)$ 로 特性化시켰다.

3-2. 汎用例

模擬實驗을 위해 SISO system 중 3次 plant 를 制御할 수 있는 閉回路시스템을 一般화시키기 위한 PID制御器 각각의 파라미터 調整은 다음과 같은 解析에 의한다. 3次 plant 制御시스템의 例는 다음과 같다.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

바람직한 閉回路 特性多項式의 一般式은 다음과 같다.

$$F(S) = S^4 + h_3 S^3 + h_2 S^2 + h_1 S + h_0 \quad (10)$$

따라서 H 는 다음과 같다.

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -h_0 & -h_1 & -h_2 & -h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 \\ \vdots \\ H_2 \end{bmatrix}$$

algorithm function 式(6)에서 PID制御器 파라미터 行列 K 를 구할 수 있다.

식(6)에서 M 과 V 는 다음과 같다.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -h_0 & -h_1 + a_0 & -h_2 + a_1 & -h_3 + a_2 \end{bmatrix}$$

따라서 制御器 파라미터 行列은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} K^T &= [K_t, K_p, K_d] \\ &= [-h_0, -h_1 + a_0, -h_2 + a_1] \end{aligned} \quad (11)$$

閉回路시스템의 特性多項式 식(10)은

$$F(S) = S^4 + a_2 S^3 + h_2 S^2 + h_1 S + h_0 \quad (12)$$

가 된다.

즉, 安定한 시스템의 PID出力歸還 制御器의 設計는 $h_3 = a_2$ ($a_2 > 0$) 인 安定度 條件과 任意의 係數 h_0, h_1, h_2 에 의해 制御器 파라미터 $K_p, K_t = K_p / \tau_t, K_d = K_d \cdot \tau_d$ (τ_t : 積分時間常数, τ_d : 微分時間常数)를 決定할 수 있다.

3-3. Flow Chart

4. 結果考察

模擬實驗 3次 plant 的 任意의 파라미터는 表 1과 같으며 PID出力歸還 制御시스템 閉回路 特性多項式은 다음과 같다.

$$F(S) = S^4 + 10S^3 + h_2 S^2 + h_1 S + h_0 \quad (13)$$

식(11)에 의해 PID制御器 各 파라미터는 表 2와 같다.

표 1 plant의 파라미터
The parameters of plant.

a_0	a_1	a_2
6	5	10

표 2 PID制御器 파라미터
The parameters of PID controller.

K_p	K_t	K_d
$-h_0 + a_0$	$-h_0$	$-h_2 + a_1$

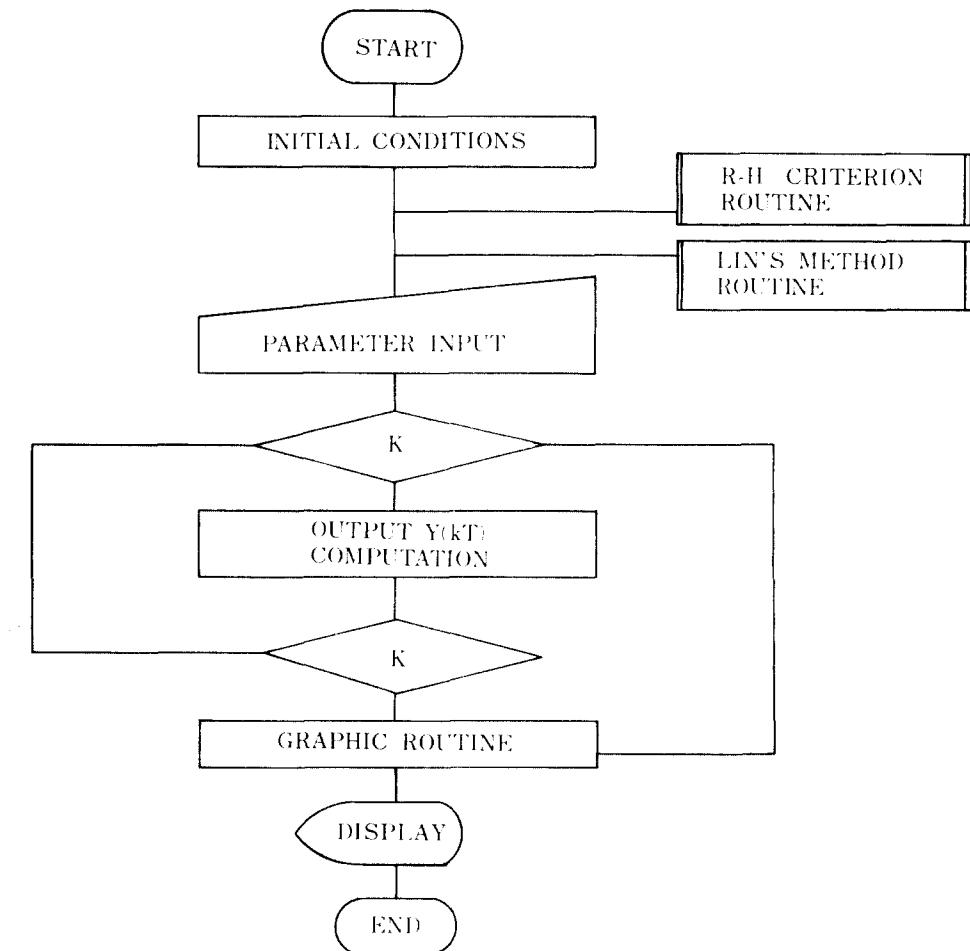


그림 2. 計算器處理方略
Flow chart.

時間領域 應答特性 考察을 위한 PID制御器各
파라미터의 變化를 다음의 2段階로 考察한다.

段階 1. 複素數 S 平面 在半面 實數軸上 特定位置의 極點을 Lin's method에 의하여 表 2
의 parameter 故值을 設整한다. 끝나서 閉回路特
性多項式은 다음과 같은 形태 予하게 되며,
APPLE-II computer 模擬實驗의 PID 制御器
파라미터는 表 3이 設整된다.

$$F_1(S) = S^4 + 10S^3 + 35S^2 + 50S + 24 \quad (14)$$

표 3 閉回路 特性多項式 $F_1(S)$ 가 結定된 PID制御器
파라미터.

The parameters of PID controller with the determined closed-loop characteristic polynomial $F_1(S)$.

K_p	K_i	K_d
44	24	30

段階 2. 시제의 安定範界限에서 PID 制御器
의 各各 파라미터 變化를 考察한다.

따라서, 模擬實驗의 시스템 特性多項式은 下
음식 式으로 表現되어

$$F_2(S) = S^4 + 10S^3 + 35kS^2 + 50kS + 24k \quad (k: 實數)$$

15

Routh配列에 依한 安定範圍는 $k \geq 0.16$ 임이 確認
된다.

k 의變化에 따른 PID制御器 파라미터는 表 4 와 같다. 그리고 각각의 時間領域에서의 階段應答은 그림 3~그림 5와 같은 模擬實驗結果와 特性值을 주하였다.

表 4 k 의變化에 따른 PID制御器 파라미터
The parameters of PID controller by variation of k .

	K_p	K_i	K_d	S-平面상의 극점 위치
$k = 0.5$	19	12	12.5	$S_1 = -0.09879821728$ $S_2 = -0.691688271$ $S_3 = -1.28124528$ $S_4 = -7.92908428$
$k = 1$	11	24	30	$S_1 = -1, S_2 = -2, S_3 = -3,$ $S_4 = -4$
$k = 5$	244	120	170	$S_1 = -0.706444399$ $S_2 = -1.68863964$ $S_{3,4} = -3.80245798 \pm j9.28083889$
$k = 10$	494	240	345	$S_{1,2} = -0.7331302 \pm j0.418210663$ $S_{3,4} = -4.26668698 \pm j17.8484584$

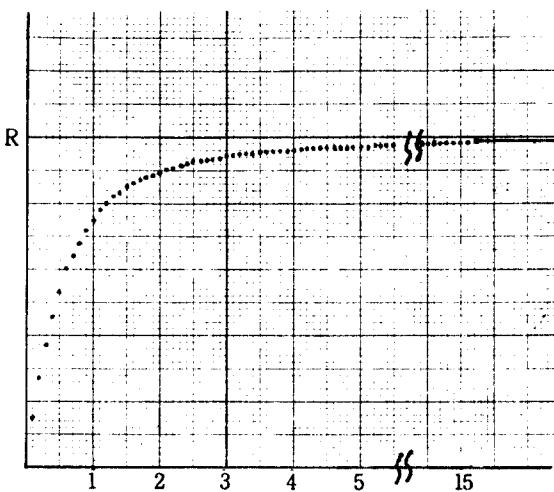


그림 3 $k = 0.5$ 일때, 定常狀態誤差 1%, 訂正時間 15sec.
When $k = 0.5$; steady-state error: 1%,
settling time: 15sec.

$k = 10$ 일때는 定常狀態誤差 0.5%, 訂正時間 7.6sec, percent maximum overshoot 13.86%이다.

段階 3. 式(14)을 安定한範圍에서 K_i 파라미터를 考察한다. 따라서 模擬實驗의 시스템 特性多項式은 다음의 式으로 表示되며,

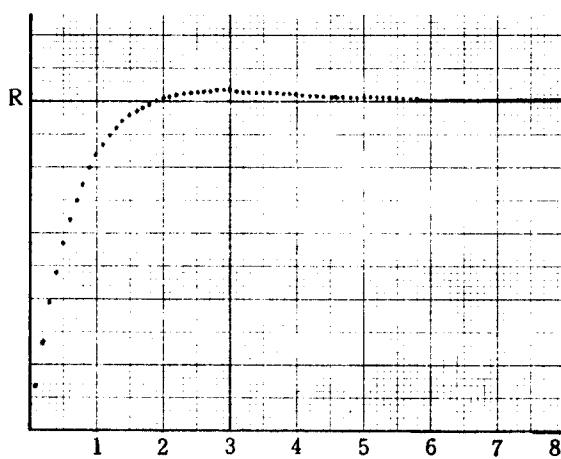


그림 4 $k = 1$ 일때, 定常狀態誤差 0.5%, 訂正時間 5.8sec.,
최대오버슈트 3.2%.
When $k = 1$: steady-state error: 0.5%,
settling time: 5.8sec.,
percent maximum overshoot: 3.2%

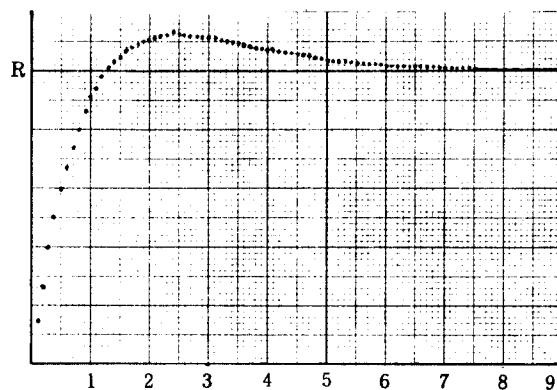


그림 5 $k = 5$ 일때, 定常狀態誤差 0.5%, 訂正時間 7.5sec.,
최대오버슈트 12.57%.
When $k = 5$: steady-state error: 0.5%, settling time:
7.5 sec., percent maximum overshoot: 12.57%.

$$F_3(S) = S^4 + 10S^3 + 35S^2 + 50S + 24k \quad (16)$$

安定範圍는 $0 < k < 6.25$ 이다. 模擬實驗結果 (그림 6, 그림 7) K_i 파라미터 調整에 의해 定常狀態誤差를 줄일 수 있다.

段階 4. 式(14)을 安定한範圍에서 K_d 파라미터를 考察한다. 따라서 模擬實驗의 시스템 特性多項式은 다음의 式으로 表示되며,

$$F_4(S) = S^4 + 10S^3 + 35kS^2 + 50S + 24 \quad (17)$$

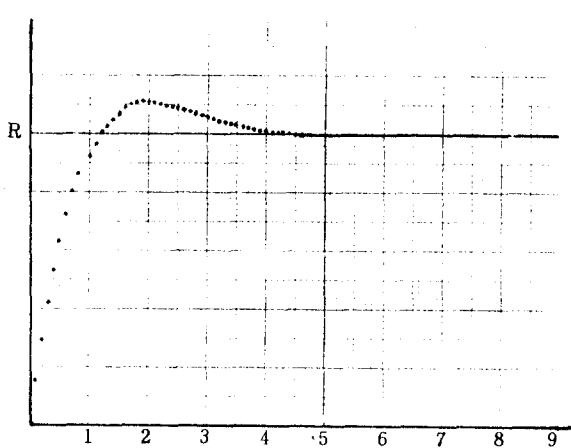


그림 6 $k = 2$ 일 때 定常狀態誤差 0.25%, 訂正時間 8.4sec.,
최대오우버스우트 11.6%, 두번짼 오우버스우트 0.4%.
When $k = 2$; steady-state error: 0.25%, settling time:
8.4sec, percent maximum overshoot: 11.6%,
percent second overshoot: 0.4%.

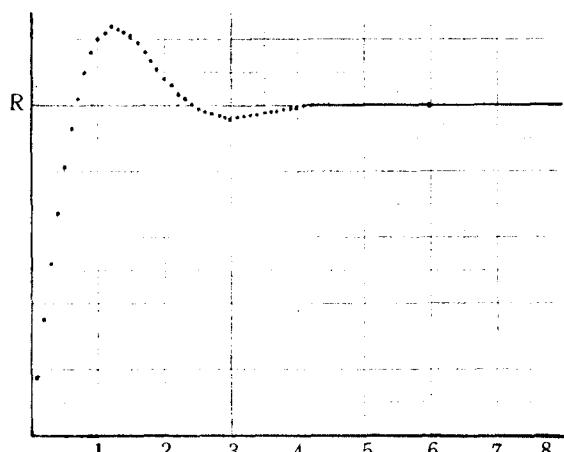


그림 7 $k = 5$ 일 때 定常狀態誤差 0.1%, 訂正時間 4.1sec.,
최대오우버스우트 29.6%.
When $k = 5$; steady-state error: 0.1%, settling time:
4.1sec, percent maximum overshoot: 29.6%.

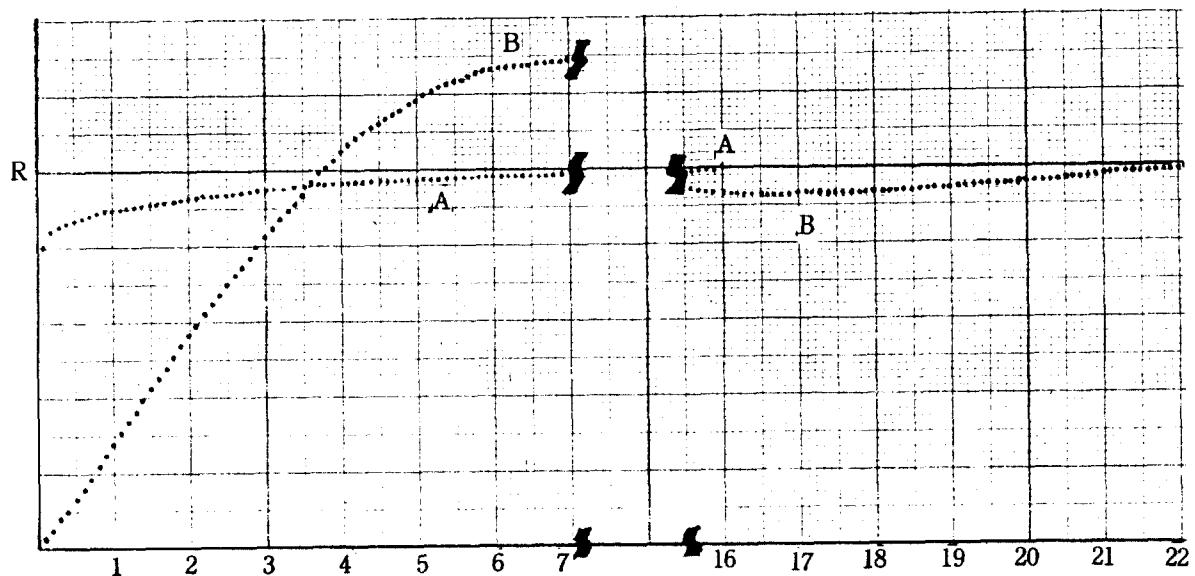


그림 8 $k = 0.28$ 일 때 3. 남 A, $k = 5$ 일 때 2. 남 B
Response curve A when $k = 0.28$, B when $k = 5$.

安定範圍는 $k \geq 0.28$ 이다. 模擬實驗結果 誤差速度에 比例하여 誤差를 減少시킨다. 그림 8의 챈플링週期間(sampling period)의 誤差가 적음을 알 수 있다.

假想의 負荷變動에 의한 階段外亂函數 $u(KT)$ 의 出力應答은 그림 9와 같다. 결국 그림 4와 僅少한 差가 있었다.

샘플링週期가 작을수록 좋은 結果를 얻을 수 있으나 實時間 制御를 考慮하여 0.1sec의 샘플링週期를 選擇하였다. 그리고 Routh-Hurwitz 判別法에 의한 安定한 限界 k 의 演算結果와 模擬實驗의 反復調查에 의하면 0.09만큼의 誤差를 發生시켰다. 따라서 k 의 演算이 充分條件의 結果를 얻게 되다. 결국 PID制御 セン서베이스 시스템

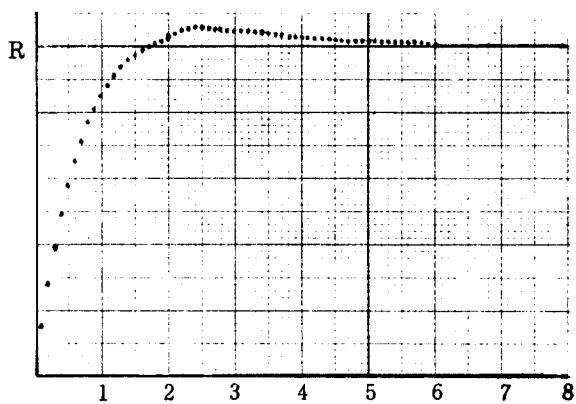


그림 9 階段外亂函數에 의한 시스템應答
System response with step-disturbance-function.

(sensor base system)을構成할 수 있는 컴퓨터制御構成圖를提示한다.

5. 結論

PID制御器의 파라미터調整에 있어 각 파라미터變化에 따른 安定度範圍를選擇하여 定常狀態精確度, 應答速度, 外亂應答에 效率的인 最適인 파라미터를 設정할 수 있음을 確認하였다. 즉, 相對安定度를考慮하면 그림 7의 結果 percent maximum overshoot 29.6%보다 그림 4의 結果 3.2%를選擇할 수 있고, 應答速度를考慮할 경우 그림 3의 調正時間 15sec보다 그림 6의 percent overshoot 0.4%이내인 調正時間 4.3sec

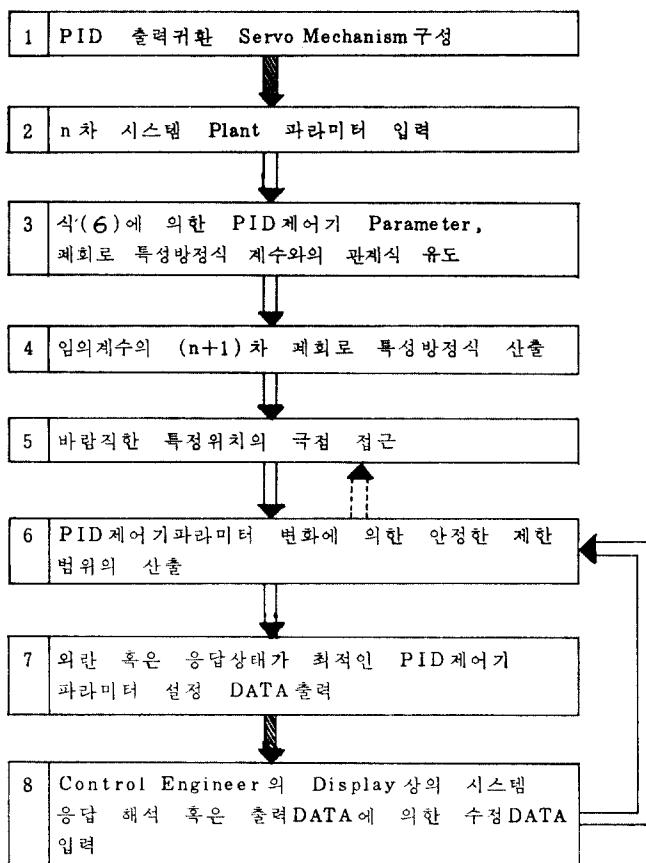


그림10 PID 出力歸還制御器의 セン서ベース 시스템의 構成圖
The block diagram of sensor base system for PID output feedback controllers.

인 파라미터를 조정할 수 있다.

그리고, PID制御 parameter 調整에 있어 컴퓨터 模擬實驗에 의해 實際 產業現場에서의 試行誤差에 의하지 않고 그림 8과 같은 sensor base system의 構成圖를 提示한다. 따라서 產業現場의 位置, 速度, 壓力, 温度, 流量 等을 制御量으로 하는 制御project를 위한 CAD의 研究에 基本의 인 파라미터 調整을 提示한다. 그림 10의 段階 6에서 最大值 限界는 파라미터의 매우 높은 시스템의 感度가 매우 커짐을考慮하여 그 限界는 control engineer가 스스로 定할 수 있을 것이다. 더욱 複雜한 多入力, 多出力 制御시스템的研究가 필요할 것이다.

参考文献

- (1) P. B. Deshpande and R. H. Ash, "Elements of computer process control with advanced control applications," Instrument Society of America, 1981.
- (2) F. G. Shinskey, "Process-control systems," McGraw-Hill, Inc., 1979.
- (3) K. J. Astrom and B. Wittenmark, "Computer-controlled systems," Prentice-Hall, Inc., 1984.



成源基(Weon Gi SEONG) 正會員
1956年2月9日生
1975年3月～1980年2月：中央大學校電子工學科卒業
(工學士)
1982年3月～現在：中央大學院電子工學科 博士課程
1984年3月～現在：中央大學校電子工學科講師



崔宗秀(Jong Soo CHIO) 正會員
1949年5月3日生
1968年3月～1975年2月：仁荷大學校電子工學科卒業
(工學士)
1978年7月～1981年3月：日本Keio大學院卒業(工學博士)
1981年3月～1981年9月：日本Aloka(株)研究所 研究員
1981年10月～現在：中央大學校電子工學科 助教授



河龍守(Yong Soo HA) 正會員
1932年12月22日生
1952年～1956年：梨花大學校電氣工學科卒業(工學士)
1982年～1984年：梨花大學校大學院 工學碩士
1972年～現在：中央大學校工科大學長