

# 非線形 모델에 의한 多次元 壓密의 數值解析

Numerical Analysis of Multi-dimensional Consolidation  
Based on Non-Linear Model

鄭 鎮 燮\*

Jeong, Jin Seob

姜 秉 宣\*\*

Kang, Byung Sun

南 宮 玟\*\*\*

Nam-gung, Moon

---

## ABSTRACT

This paper deals with the numerical analysis by the finite element method introducing Biot's theory of consolidation and the modified Cam-clay model proposed by Roscoe school of Cambridge University as constitutive equation and using Christian-Boehner's technique.

Especially, time interval and division of elements are investigated in view of stability and economics.

In order to check the validity of author's program, the program was tested with one-dimensional consolidation case followed by Terzaghi's exact solution and with the results of the Magnan's analysis for existing banking carried out for study at Cubzac-les-ponts in France.

The main conclusions obtained are summarized as follows:

1. In the case of one-dimensional consolidation, the more divided the elements are near the surface of the foundation, the higher the accuracy of the numerical analysis is.
2. For the time interval, it is stable to divide 20 times per 1-log cycle.
3. At the element which has long drain distance, the Mandel-Cryer effect appears due to time lag.
4. Lateral displacement at an initial loading stage predicted by author's program, in which the load was assumed as not concentrative, but rather in grid form, is well consistent with the value of observation.
5. The pore water pressure predicted by author's program has a better accordance with the value of observation compared with Magnan's results.
6. Optimum construction control by Matsuo-Kawamura's method is possible with the predic-

---

\*正會員·圓光大學校工科學 助教授

\*\*正會員·松源實業專門大學 助教授

\*\*\*圓光大學校 工科學 助教

ted lateral displacement and settlement by the program.

## 要 旨

本 論文은 Biot의 壓密理論을 有限要素法에 의해 解析하는 데 있어 修正 Cam-clay model과 解析 技法으로서는 Christian Boehmer 方法을 使用한 것이다. 특히 本 解析에 있어서 壓密의 時間간격과 要素의 分割은 精度와 經濟性的의 觀點에서 研究하였다. 나아가 本 프로그램의 정확을 調查하기 위하여 本 프로그램에 Terzaghi의 正解에 의한 一次元壓密의 解析을 試圖하여 그 正當性을 확인하고 또한 Magnan이 研究目的으로 수행한 프랑스의 Cubzac-les-ponts에서 試驗盛土의 結果와 比較하였다. 本 研究에서 얻은 主要結論은 다음과 같다.

1. 一次元壓密의 경우에 排水層에 가까이 갈수록 要素를 細分하면 數値解析에서 더 높은 結果를 얻을 수 있다.
2. 時間간격에 대해서는 1 log cycle當 20회로 하면 安定된다.
3. 긴 排水거리를 갖는 要素에서는 Mandel-cryer 效果가 時間지연과 더불어 일어난다.
4. 本 프로그램에 의해 예측된 初期荷重 단계에서 측원되는 盛土荷重으로 算하는 것 보다도 강성을 주는 Mesh化한 것이 觀測値와 잘 一致한다.
5. 本 프로그램에 의해 예측된 間隙水壓은 Magnan 結果와 比較해 볼 때 觀測値와 더 잘 一致한다.

## 1. 序 論

粘土地盤의 변형은 시간경과에 따라서 일어나는데 Terzaghi는 그 현상을 최초로 粘土의 排水抵抗에 의한 壓密의 문제로 파악하여 해석적으로 취급하였다.

Terzaghi의 壓密理論은 투수와 변형이 연직 방향으로만 일어나는 1次元壓密을 對象으로 하였으며 壓密方程式으로서 간극수압에 대해서 일전도형의 편미분방정식으로 나타냈다. 粘土層의 두께에 비하여 재하폭이 그렇게 넓지 않는 경우는 변형과 透水는 연직방향 뿐만 아니라 水平方向으로도 생긴다. 이와같은 변형과 透水는 多次元的으로 생기는 壓密의 문제를 이론구성상 가장 완전한 형태로 유도한 것이 Biot(1941)의 壓密理論이다. Biot의 壓密方程式은 연립편미분방정식으로 제안되고 있으나 그 형태는 아주 복잡하므로 解析解는 地반조건이나 경계조건이 아주 단순한 경우에만 구할 수 있다. 그러나 일반적으로 自然地盤은 壓密特性이 다른 層으로 구성되는 경우가 많고 또한 粘土의 변형特性은 應力 level에 따라서 彈性係數가 크게 變化하여 대표치를 決定하기가 곤란하다. 이러한 이유 때문에

이들 解析解의 適用性은 극히 한정된 경우에만 有效하다.

本 研究는 地盤構成이나 境界條件의 複雜性을 취급한 解析이 가능한 數値解析法으로써 有限要素法에 의한 解를 시도하였다. 특히 注目할 點은 本 解析에 의하면 흙의 非排水變形 強度特性과 壓密變形特性을 同時に 흙의 實情에 가까운 形으로써 有限要素解析에 반영할 수 있다는 것이다. Cambridge 학과가 提案한 Cam-clay model (1963) 등은 載荷에 의한 非排水變形, 파괴거동과 그 以外の 壓密舉動을 統一한 力學 parameter를 使用하여 解析할 수 있기 때문에 有限要素法으로써 연약지반의 변형解析의 實用化를 크게 發展하였다는 것을 의미하고 있다. (1969, 1970, 1981) 有限要素法에 의한 壓密解析은 이미 實用단계에 들어왔다고 생각되므로 本 論文은 실제 計算을 할 때에 안정적인 解를 얻기 위해서는 要素나 時間分割의 크기의 선정기준에 대해서 우선 檢討하고 계속하여 一次元壓密解析을 遂行하여 그 正確性을 檢討하였다. 2 단계로는 二次元壓密問題에 대해서 適用하였는데 그 正의 性的의 比較를 1982년 Magnan 등이 프랑스에서 試驗盛土한 관측치와 그들의 彈塑性解析結果와 比較하였다. 다만 本 Program는 그들이 使用한

Sandhu-Wilson 方法보다 더 간편한 Christian-Boehmer(1970)의 技法을 利用하여 比較코져 한 것이다.

比較의 대상은 壓密沈下量, 側方變位, 間隙水 壓이던 이들 각각은 두 解法의 차이, 盛土期間 中の 排水條件의 차이, 盛土部剛性을 고려하는 경우와 고려하지 않는 경우의 차이를 비교한 것이다. 結果로는 本 Program 이 보다 더 이들 方法보다 正確하고 實測에 아주 接近한 것을 알았다.

## 2. Program 에 사용한 應力-變形率關係

이 研究에 사용한 應力-變形率關係式은 Roscoe & Burland(1968)가 提案한 修正 Cam-clay model 을 基礎로 하여 研究한 것이다.

### 2.1. 彈性舉動

Fig. 2-1과 같이 體積變化는 平均有效應力( $p$ )의 自然對數값  $\ln p$  와 直線關係가 있다고 假定한다. 여기서 彈性體積變化를 表示하는  $de^e$  는 다음과 같다.

$$de^e = -K\alpha(\ln p) = -K\left(\frac{dp}{p}\right) \quad \dots\dots(2-1)$$

$$\text{또 } \varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{e_0 - e}{1 + e_0} \quad \dots\dots(2-2)$$

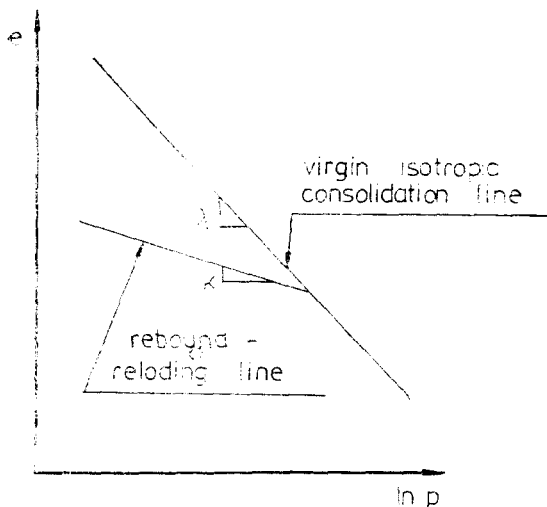


Fig. 2-1. Response of idealized soil to hydrostatic stress

이므로 이를 微分하여 式(2-1)에 代入하면

$$d\varepsilon_v = \frac{de^e}{1 + e_0} = -\frac{K}{1 + e_0} \cdot \frac{dp}{p} \quad \dots\dots(2-3)$$

式(2-3)을 變換하면  $\frac{dp}{d\varepsilon_v} = -\frac{p(1+e_0)}{K}$  이고

또한 體積變化係數  $K_b = \frac{dp}{d\varepsilon_v} = \frac{E}{3(1-2\nu)}$  이므로

$$E = \frac{3p}{K}(1-2\nu)(1+e_0) \quad \dots\dots(2-4)$$

을 얻을 수 있다.

한편 Lamé 정수  $L, G$  에 대해서는 종래의 試驗結果와 式(2-4)로부터 다음 式과 같이 土質定數를 얻는다.

$$L = \frac{p(1+e_0)}{K} - \frac{2}{3}G \quad \dots\dots(2-5)$$

$$G = G_0 \exp\left(-\frac{e - e_0}{\lambda}\right) \quad \dots\dots(2-6)$$

여기서  $\nu$  에 대한 적당한 값이 選定되면  $E$  값은 式(2-4)에 의해 平均有效應力  $p$  와  $K$  의 값이 定해짐으로 구해진다. Roscoe(1963) 등은 彈性剪斷變形率은 무시한다고 假定하였으며 이 假定에 의하면 式(2-4)에서는  $\nu = -1$  에 해당된다. 이러한 特性을 가진 흙은 存在하기가 어렵다. 다행히도 彈性變形率要素에 의한 變形은 全變形에 대하여 무시할 만큼 적으므로  $\nu$  를  $-1$  에서 0.5까지의 어떠한 값을 선택하여도 結果의 오차는 거의 없다. 線型彈性에 비하여 非線型彈性을 選擇한 이유는 結果상 큰 차이는 없으나 計算과정상에서 Cam-clay 理論과 밀착되기 때문에 사용한다.

### 2.2. 塑性舉動

$(p, q, e)$  공간에서 Roscoe 狀態面을 一般的으로 나타낼 수 있다. 이것을  $(p, q, e^e)$  공간에 Roscoe 면을 再現하면 탄성벽은  $e^e$  軸에 垂直이 된다. Fig(2-2)에는 上記 두 空間을 나타내고 있다. (1971) 정화에게변수  $h$  를  $h = e, -e^e$  로 정의하고  $e_1$  은 處女壓密曲線  $\ln p = 1$  과의 交差點 값이다. 또  $e^e = e - e^e$  이다. ( $e^e$  : 탄성상태 간극비) Fig. 2-2(b)의 Roscoe 曲面은 다음 式으로 表現할 수 있다.

$$F(p, q) = h \quad \dots\dots(2-7)$$

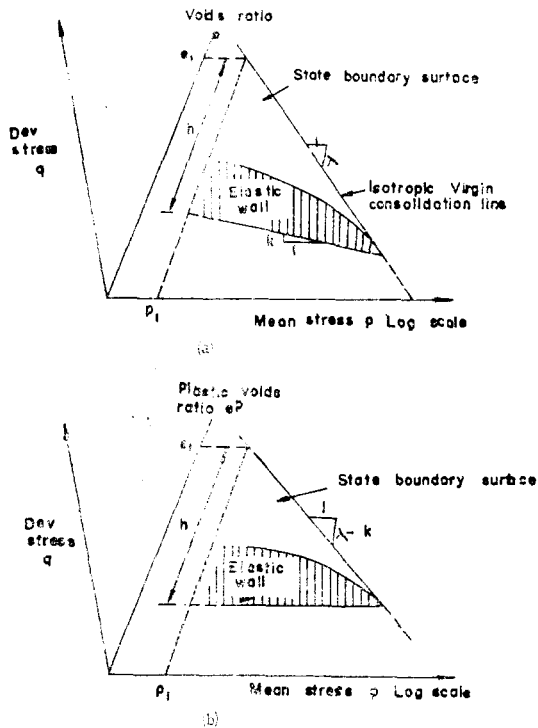


Fig. 2-2. (a) State boundary surface in  $p, q, e$  space  
(b) State boundary surface in  $p, q, e^p$  space

Fig. 2-2(a)로부터 硬化媒介變數  $h$ 는 다음과 같이 間隙比와 平均有效應力으로 나타낼 수 있다.

$$h = e_1 - e - K \ln \frac{p}{p_1} \quad \dots\dots(2-8)$$

만약 狀態境界面이  $p, q, e$  項으로 規定된다면 式(2-8)을 이용한  $h$ 의 項으로  $e$ 를 表現할 수 있으므로 式(2-7)의 형태로 바꿀 수 있다. 여기서 修正 Cam-clay 모델에 대한 狀態境界面の 方程式은 다음과 같다.

$$(\lambda - K) \ln \left[ \frac{p}{p_1} \left( 1 + \frac{\eta^2}{M^2} \right) \right] = h \quad \dots\dots(2-9)$$

또한 塑性理論에 있어서 normality rule은 다음과 같다.

$$de_{ij}^p = \alpha \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad \dots\dots(2-10)$$

여기서  $F$ 는 式(2-7)에 의해 規定된 降伏面이고  $\alpha$ 는 비례상수이다. 軸差塑性變形率不變量은 다음과 같다.

$$d\bar{\varepsilon}^p = \left[ \frac{2}{3} de_{ij}^p \cdot de_{ij}^p \right]^{1/2}$$

여기서  $de_{ij}^p = d\varepsilon_{ij}^p - \frac{1}{3} \delta_{ij} d\varepsilon^p$  ( $\delta_{ij}$ 는 Kronecker's delta)  $d\varepsilon^p$ 는 塑性剪斷變形率增分이다.

不變量에 관계되는 두 方程式은 式(2-10)으로부터 誘導될 수 있다.

$$\text{즉 } d\varepsilon_v^p = \alpha \frac{\partial F}{\partial p} \quad \dots\dots(2-11a)$$

$$d\bar{\varepsilon}^p = \alpha \frac{\partial F}{\partial q} \quad \dots\dots(2-11b)$$

式(2-10)을 matrix로 나타내면

$$d\{\varepsilon\}^p = \alpha \{a\} \quad (2-12)$$

여기서 matrix 要素는 다음과 같은 tensor 成分으로 나타낼 수 있다.

$$\{\varepsilon\} = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{23} + \varepsilon_{32}, \varepsilon_{31} + \varepsilon_{13}, \varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}]^T$$

$$\{a\} = \left[ \frac{\partial F}{\partial \sigma_{11}}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_{22}}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_{33}}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_{23}}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_{32}}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_{31}}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_{13}}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_{12}}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_{21}} \right]^T$$

彈性變形率은 다음과 같다.

$$d\{\varepsilon\}^e = [D] d\{\sigma\} \quad \dots\dots(2-13)$$

matrix  $[D]$ 의 要素는 式(3-43)에 의해  $K, \nu$ 의 項으로 나타낸다. 또한

$$\{\sigma\} = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{13}]^T$$

式(2-12)에 式(2-13)을 더하면

$$d\{\varepsilon\} = d\{\varepsilon\}^e + d\{\varepsilon\}^p = [D]^{-1} d\{\sigma\} + \alpha \{a\} \quad \dots\dots(2-14)$$

降伏面에 관한 變化에 대해 式(2-7)은 다음과 같이 미분화시켜 나타낼 수 있다.

$$dF = dh = 0 \quad \dots\dots(2-15)$$

媒介變數를 規定하면

$$A = \frac{dh}{\alpha} \quad \dots\dots(2-16)$$

式(2-16)에서  $dh = \alpha \times A$ 로 놓고 式(2-15)와 式(2-14)를 結合하여 다음 式을 얻을 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} d\{\varepsilon\} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [D]^{-1} \{a\} \\ \{a\}^T A \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d\{\sigma\} \\ \alpha \end{Bmatrix} \quad \dots\dots(2-17)$$

式(2-17)은 모든 塑性問題의 基礎가 된다.  $\alpha$ 를 제거하면 應力增분에 대한 명확한 式을 얻을 수 있다. 즉 약간의 修正을 하면 다음 式(2-18)과 같다.

$$d\{\sigma\} = \left( [D] - \frac{1}{\beta} \{d\} \{d\}^T \right)^T d\{\varepsilon\} \quad \dots\dots(2-18)$$

$$\begin{aligned} \{d\} &= [D] \{a\} \\ \beta &= A + \{a\}^T \{d\} \end{aligned}$$

式(2-18)의  $A$  와  $\{a\}$  는 式(2-7)에 의해 나타낸 曲面의 形狀에 의존하며 一般의인 塑性法則과는 다른 恠에 대한 特別한 경우에 쓰인다.

修正 Cam-clay model 에 대해서 式(2-9)의 왼쪽 式은 다음과 같이  $\{a\}$  의 成分으로 나타낼 수 있다.

$$a_i = \left( \frac{\lambda - k}{p} \right) \left[ -\frac{(M^2 - \eta^2 - q)p + q\sigma_i}{3p(M^2 + \eta^2)} \right] \quad i = x, y, z \quad \dots\dots(2-19)$$

$$a_i = \left( \frac{\lambda - k}{p} \right) \frac{6}{p(M^2 + \eta^2)} \tau_i \quad i = yz, zx, xy$$

式(2-16)과 Fig. 2-2(b)의  $dh = -de^p$  로부터 다음 式을 얻는다.

$$A = \frac{dh}{\alpha} = -\frac{de^p}{\alpha} = -\frac{d\varepsilon_v^p}{\alpha} (1 + e_0)$$

式(2-11, (a))에 의해서  $d\varepsilon_v^p/\alpha$  를 소거하면

$$A = -\frac{\partial F}{\partial p} (1 + e_0) \quad \dots\dots(2-20)$$

修正 Cam-clay model 에 대해서  $\frac{\partial F}{\partial p}$  를 計算하면

$$A = -(1 + e_0) \left( \frac{\lambda - k}{p} \right) \left( \frac{M^2 - \eta^2}{M^2 + \eta^2} \right) \quad \dots\dots(2-21)$$

式(2-19)와 式(2-21)을 式(2-18)에 代入하면 應力을 變形率의 形態로 나타낼 수 있다.

### 3. 壓密解析을 위한 有限要素式

彈塑性 model 을 사용한 有限要素式은 Plain Strain 조건에서 다음과 같이 유도된다. 變位增분  $\Delta u_x, \Delta u_y$  을 成分으로 하는 Vector 는  $\{\Delta u\}$  로 表示하며, 平衡方程式을 만족하는 全應力增분  $\{\Delta\sigma\}^T = \{\Delta\sigma_{xx}, \Delta\sigma_{yy}, \Delta\tau_{xy}\}$  에 대해 가상일의 원리를 이용하면

$$\begin{aligned} \int_v \{\Delta\varepsilon\}^T \{\Delta\sigma\} dv &= \int_v \{\Delta\varepsilon\}^T \{\Delta\sigma'\} dv \\ &+ \int_v \{\Delta\varepsilon\}^T \{\Delta p_w\} dv = \int_v \{\Delta\bar{u}\}^T \{\Delta F_b\} dv \\ &+ \int_s \{\Delta u\}^T \{\Delta T_s\} ds \quad \dots\dots(3-1) \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned} \{\Delta\varepsilon\} &: \{\Delta\varepsilon_x, \Delta\varepsilon_y, \Delta\sigma_{xy}\} \\ \{\Delta\sigma'\} &: \{\Delta\sigma_x', \Delta\sigma_y', \Delta\tau_{xy}\} \\ \{\Delta p_w\}^T &: \{\Delta p_w, \Delta p_w, 0\} \\ \{\Delta F_b\} &: \text{物體力增分 Vector} \\ \{\Delta T_s\} &: \text{表面力增分 Vector} \end{aligned}$$

要素內的 任意點에서 變位增분  $\{\Delta u\}$  는 절점변위增분  $\{\Delta u^*\}$  으로부터 形狀函數  $[N]$  을 이용하여 다음과 같이 표현한다.

$$\{\Delta u\} = [N] \{\Delta u^*\} \quad \dots\dots(3-2)$$

윗식에 對應하는 要素內的 임의점의 변위增분  $\{\Delta\varepsilon\}$  과 체적변형률增분  $\Delta V$  는 節點變位增분과 關係시킬 수 있다.

$$\{\Delta\varepsilon\} = [B] \{\Delta u^*\} \quad \dots\dots(3-3)$$

$$\Delta v = [B_v]^T \{\Delta v^*\} \quad \dots\dots(3-4)$$

一般의인 孔隙間극수압增분 Vector  $\{\Delta p_w\}$  는 要素內的 中心의 孔隙間극수압 增분치  $\Delta p_w^*$  를 이용하여

$$\{p_w\}^T = \{1 \ 1 \ 0\} \{\Delta p_w^*\} \quad \dots\dots(3-5)$$

有效應力增분  $\{\Delta\sigma'\}$  와 變應率增분  $\{\Delta\varepsilon\}$  을 다음과 같이 關係지을 수 있다.

$$\{\Delta\sigma'\} = \{D_e p\} \{\Delta\varepsilon\} \quad \dots\dots(3-6)$$

여기서  $\{D_e p\}$  : 3行 3列의 대칭行列이며 彈塑性係數

式(3-2)~(3-6)은 式(3-1)에 代入하고 假想變位를 임의로 선택한 것을 고려하면

$$\{K\} \{\Delta u^*\} + \{K_v\} \Delta p_w^* = \{\Delta Q\} \quad \dots\dots(3-7)$$

$$\text{여기서 } \{K\} = \int_v \{B\}^T \{D_e p\} \{B\} dv \quad \dots\dots(3-8)$$

$$\{K_v\} = \int_v \{B_v\} dv \quad \dots\dots(3-9)$$

$$\begin{aligned} \{\Delta Q\} &= \int_v \{N\}^T \{\Delta F_b\} dv + \int_s \{N\}^T \\ &\{\Delta T_s\} ds \quad \dots\dots(3-10) \end{aligned}$$

다음은 연속 방정식에 대해 생각해 보면

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\gamma w} \left( k_x \frac{\partial^2 p_w}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 p_w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad \dots\dots(3-11)$$

정의에 의하면 요소內的 체적변화는 다음과 같다.

$$\Delta V = [k_v]^T \{\Delta u^*\} \quad \dots\dots(3-12)$$

式(3-11)에서 計算된 체적변화량을 式(3-12)에 代入하면 式(3-7)과 式(3-12)은  $\{\Delta u^*\}$  와  $p_w^*$  를

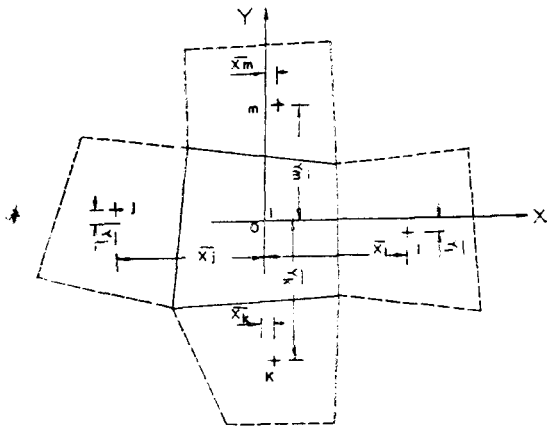


Fig. 3-1. Local coordinate used in calculating rate of flow

미지수로한 연립방정식을 만든다. 그리하여  $\Delta V$  를 계산하고 壓密進行過程에 따라서 단계적으로 연립방정식을 풀면 壓密解를 얻을 수 있다. 式(3-11)을 차분법에 의해 풀기 위해서 式(3-13)에 의해서 정의되는 과잉간극수압  $\bar{p}_w$  는 Christian과 Boehmer(1970)에 의해서 다음 式(3-14)와 같이 주어졌다.

$$p_w^* = (1-\theta) p_{wt} + \theta p_{wt+\Delta t} \quad \dots\dots(3-13)$$

$$p_w^* = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 y^2 \quad \dots\dots(3-14)$$

여기서  $p_{wt}$  :  $t=t$  일 때 과잉간극수압

$p_{wt+\Delta t}$  :  $t=t+\Delta t$  일 때 과잉간극수압

$\theta(0 \leq \theta \leq 1)$  : 차분근사상수

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$  값은 Fig. 3-1에서와 같이 사변형요소  $i$ 와 이 요소를 둘러싸고 있는  $j, k, L, m$ 의 요소에 의해서 결정되어야 하는 미정계수이다.

요소 중앙점의 과잉간극수압 Vector  $\{p_w^*\}$ 는 다음과 같다.

$$\{p_w^*\} = \begin{Bmatrix} p_{wi}^* \\ p_{wj}^* \\ p_{wk}^* \\ p_{wL}^* \\ p_{wm}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \bar{x}_j & \bar{y}_j & \bar{x}_j^2 & \bar{y}_j^2 \\ 1 & \bar{x}_k & \bar{y}_k & \bar{x}_k^2 & \bar{y}_k^2 \\ 1 & \bar{x}_L & \bar{y}_L & \bar{x}_L^2 & \bar{y}_L^2 \\ 1 & \bar{x}_m & \bar{y}_m & \bar{x}_m^2 & \bar{y}_m^2 \end{bmatrix} = B\alpha \quad \dots\dots(3-15)$$

$$\text{그러면 } = B^{-1} \{p_w^*\} \quad \dots\dots(3-16)$$

式(3-14)를 式(3-11)에 代入하고 式(3-16)을 고려하면 다음 式을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \Delta V &= -\frac{\Delta t_v}{\gamma_w} (2k_x \alpha_4 + 2k_y \alpha_5) \\ &= -\frac{20t_v}{\gamma_w} (k_x b_4^T + k_y b_5^T) p_w^* \\ &= -\{k_v\}^T \{p_w^*\} \quad \dots\dots(3-17) \end{aligned}$$

$$\text{여기서 } [k_v]^T = \left( \frac{2\Delta t_v}{\gamma_w} \right) (k_x b_4 + k_y b_5)$$

$\Delta t$  : 시간증분량

$V$  : 요소체적

$b_4, b_5$ 는  $B^{-1}$ 의 4행과 5행 Vector

$\Delta p_w = p_{wt+\Delta t} - p_{wt}$ 의 관계를 이용하고 式(3-13)에서  $\theta=1$ 로 하여 式(3-17)을 式(3-12)에 代入하여 變形하면 다음 式을 얻는다.

$$\{k\} \{\Delta u^*\}_i + \{k_v\} p_w^* = [\Delta Q]_i + [k_i] p_w^* - 1 \quad \dots\dots(3-18)$$

$$\{k_v\}^T \{\Delta u^*\}_j = -\{k_v\}^T p_w^* - 1$$

여기서 요구되는 형식은 사변형요소이고 수치해석 과정에서 4개의 삼각형요소로 이루어진 4변형요소는 Wilson(1965)이 제안한 方法에 의해서 Quadrilateral element를 다음과 같이 Static Condensation 한다.

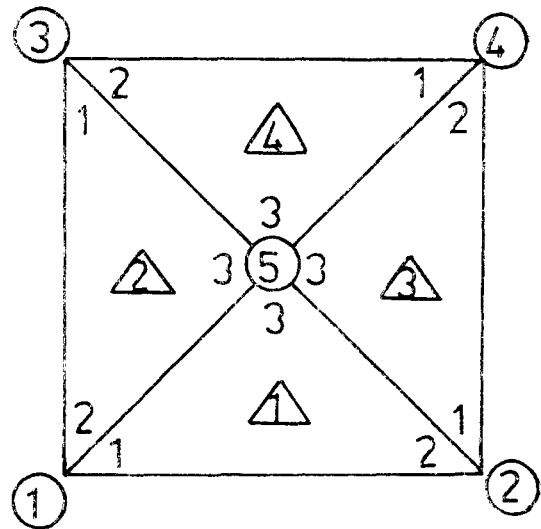


Fig. 3-2. Static Condensation

$$\{k\} \{q\} = \{Q\} \quad \dots\dots(3-19)$$

$$\begin{Bmatrix} [k_{pp}] & [k_{ip}] \\ [k_{ip}]^T & [k_{ii}] \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} q_p \\ q_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [Q_p] \\ [Q_i] \end{Bmatrix} \quad \dots\dots(3-20)$$

式(3-20)에서  $\{q_i\}$ 을 구하면

$$\{q_i\} = \{k_{ii}\}^{-1} \{[Q_i] - [k_{ip}]^T [q_p]\}$$

.....(3-21)

式(3-21)을 式(3-20)에 代入하면

$$\begin{aligned} \{[k_{pp}] - [k_{ip}]^T [k_{ii}]^{-1} [k_{ip}]\}^T \{q_p\} &= \{Q_p\} \\ - [k_{ip}] \{k_{ii}\}^{-1} \{Q_i\} &.....(3-22) \end{aligned}$$

$$\{\bar{k}\} \{q_p\} = \{\bar{Q}\} \quad .....(3-23)$$

이와 같은 방법을 이용하여 사변형요소의 중앙절점은 소거되고 應力이나 과잉간극수압은 1개의 사변형요소 안에서는 항상 일정한 값이 된다.

#### 4. 數値解析의 適用例

##### 4.1. 1次元壓密解의 適用

本 Program의 타당성을 檢證하기 위하여 Terzaghi의 1次元壓密解에 대해서 本 Program에 彈性式을 適用, 有限要素로 解析하였다. 이 解析에서 가장 問題가 되는 것은 要素分割과 時間分割의 決定이다.

##### 4.1.1. 要素分割

Fig. 4-1과 같이 粘土層이 12m 두께인 兩面排水模型地盤에 4t/m<sup>2</sup>의 荷重이 作用할 경우 要素分割을 3경우 즉 等간격 6分割한 경우와 排水層에 가까울수록 間격을 좁혀서 8分割 및 10分割한 경우를 檢討하였다.

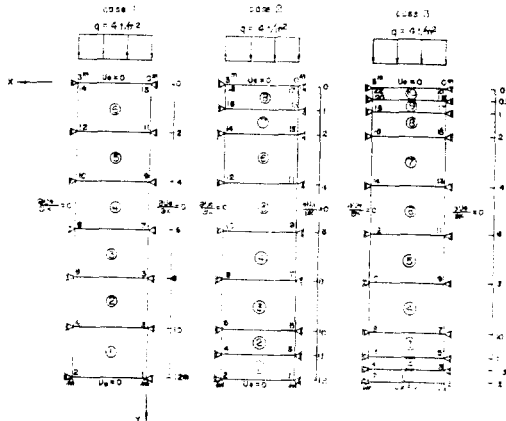


Fig. 4-1. FEM grid

이 각각의 경우에 대하여 Terzaghi의 理論解와 有限要素에 대한 結果를 比較한 것이 Fig. 4-2이다. 그림에서 처럼 要素를 排水層에 가까울수록 漸次的으로 細分化하는 것이 理論値와 一致하고 있는 것을 알 수 있다.

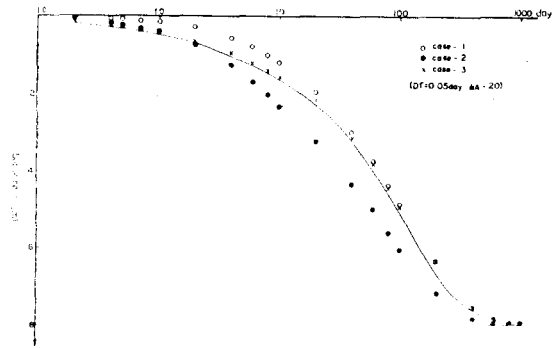


Fig. 4-2. Settlement-time relation

##### 4.1.2. 時間間隔

壓密은 載荷初期에 많이 일어나고 時間이 지남에 따라 그 速度가 늦어진다는 것은 주지의 事實이다. 이 때문에 本 解析에서는 時間을 0.01 ~ 0.1, 0.1 ~ 1.0, 1.0 ~ 10.0, 10.0 ~ 100.0, 100.0 ~ 1000.0 등과 같이 log cycle로 增加하도록 하고 각 단계마다 計算回數를 10, 20, 100회로 하여 計算하도록 하였다. 要素選定은 Case 3으로 하여 計算하였으며 그 結果는 Fig. 4-3과 같다.

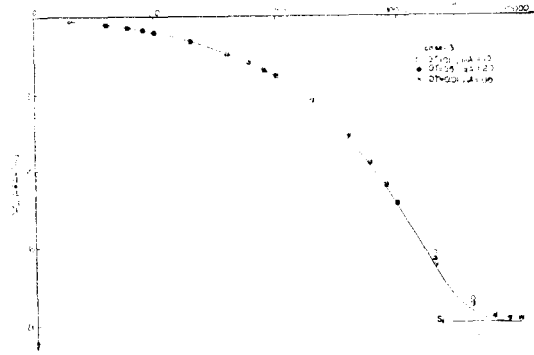


Fig. 4-3. Settlement-time relation

그림에서 알 수 있는 바와같이 1 log cycle 내에서 計算回數가 많으면 많을수록 精度가 높아 지지만 대략 20分割 정도이면 安定된다고 판단 된다. 따라서 이하 모든 計算에는 이 結果에 따른다.

##### 4.1.3. 修正 Cam-clay model을 사용한 壓密計算

本文에서는 彈塑性理論인 修正 Cam clay model을 使用 그 壓密解를 Terzaghi 壓密解와 比較하여 fig. 4-4에 나타낸다. 그림에서 보는 바와같이 修正 Cam clay model이 初期에는 Terzaghi 理論値보다 적으나 最終에는 커지고 있다.

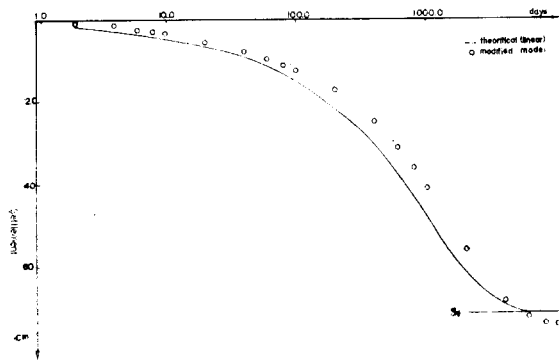


Fig. 4-4. Settlement-time relation.

그리고 1次元壓密이  $K_0$  壓密인 點을 감안하여 修正 Cam clay model 을 이용한 壓密解의 應力經路를 Fig. 4-5에 나타낸다.

그림에서 보는 바와같이 應力經路가  $K_0$  線을 따르고 있어 修正 Cam clay model 의 精度가 높다는 것을 확인할 수 있다.

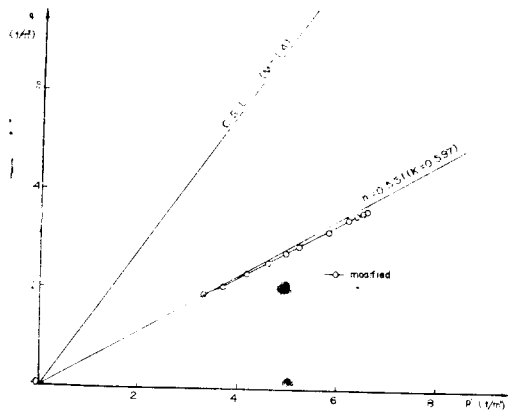


Fig. 4-5. Stress path in p:q

#### 4-1-4. 間隙水壓

Fig. 4-6과 같은 模型地盤을 選定하여 間隙水壓의 變化를 나타낸 것이 Fig. 4-7이다. 여기에서는 1面排水에 의한 Maudel-Cryer 效果를 알아보기 위하여 12m의 粘土層을 그림에서 처럼 分割하고 奇數番號要素에 대한 時間·間隙水壓分布를 나타낸 것이다. 아래로 갈수록 Maudel-Cryer 效果가 나타나고 不透水層에 接한 (1) 要素에서는 間隙水壓의 上載荷重보다 크게 나타고 있다.

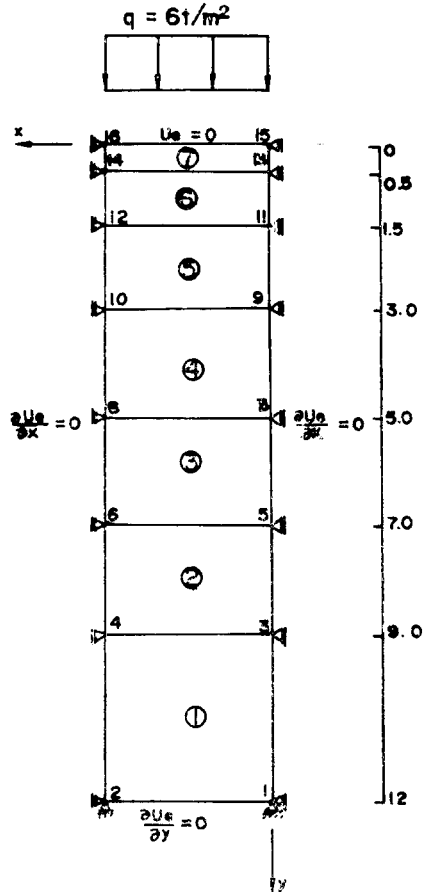


Fig. 4-6. FEM grid.

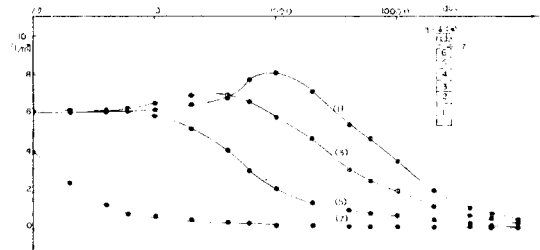


Fig. 4-7. Excess P.W.P-time relation

#### 4-2. 二次元壓密에의 적용

本 Program 을 一次元 以外の 壓密解에 대해 適用할 경우, 그 解析의 精度를 알아보기 위해서 Magnan 등(1982)이 研究目的으로 佛蘭西의 Qubzac-les-ponts 에 試驗盛土하여 實測한 資料를 修正 Cam-clay model 을 使用하여 Sandhu-Wilson 方法에 의하여 암밀해석을 하고 實測值



와 비교한 사실이 있다. 本 研究에서도 修正 Cam-clay model 을 使用하고 있으나, 解析方法은 Christian-Boehmer 方法을 택하였다.

Sandhu-Wilson 方法(S.W. method)은 현재 널리 쓰이고 있는 FEM 方法이지만 時間이 많이 걸리고 解析節次가 매우 복잡하다. 따라서 本 研究에서는 Christian-Boehmer (C. B. method)의 方法을 使用하여 비교함으로써 精度를 검증하였다.

#### 4-2-1. Magnan 試驗盛土의 解析

##### 1) 盛土와 現場條件 및 解析方法

(1) 粘土層은 解析對象을 幅 70m, 깊이 9m 로 하고 54개의 四角形 要素로 分割하였으며 Fig.

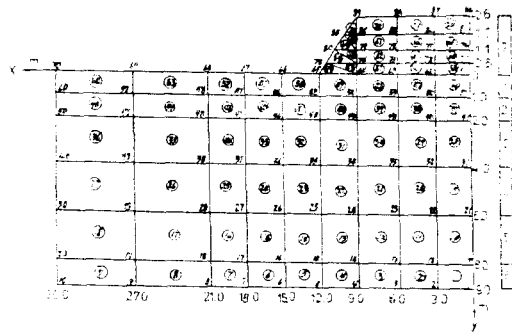


Fig. 4-8. F.E.M grid

Table 4-1. Material Properties & Parameters Used in Calculation Unit; Length: m, Mass: ton, Time: day (From Magnan 1982)

layer	$\lambda$	$\kappa$	$M$	$G_o$	$\nu$	$\sigma_{v'c}$	$K_{oc}$	$\sigma_{v'o}$
1	0.12	0.017	1.2	94.8	0.4	8.0	0.5	2.37
2	0.53	0.022	1.2	170.4	0.4	6.9	0.5	3.05
3	0.75	0.085	1.2	40.8	0.4	4.6	0.5	3.80
4	0.53	0.048	1.2	68.3	0.4	5.1	0.5	4.76
5	0.52	0.039	1.2	107.1	0.4	6.2	0.5	5.82
6	0.52	0.048	1.2	105.0	0.4	7.6	0.5	6.64
7	0.50	0.005	1.2	535.2	0.4	85.6	0.5	5.14

layer	$K_o$	$e_o$	$\gamma_s$	$\lambda_\kappa$	$K_{zo}$	$K_{yo}$
1	0.5	1.00	1.73	0.120	$2.6 \times 10^{-4}$	$0.864 \times 10^{-4}$
2	0.5	2.60	1.63	0.530	$2.6 \times 10^{-4}$	$0.864 \times 10^{-4}$
3	0.5	3.22	1.43	0.750	$2.6 \times 10^{-4}$	$0.864 \times 10^{-4}$
4	0.5	2.24	1.53	0.530	$2.6 \times 10^{-4}$	$0.864 \times 10^{-4}$
5	0.5	2.31	1.53	0.530	$2.6 \times 10^{-4}$	$0.864 \times 10^{-4}$
6	0.5	2.20	1.58	0.520	$2.6 \times 10^{-4}$	$0.864 \times 10^{-4}$
7	0.5	2.00	2.14	0.005	1.0	1.0

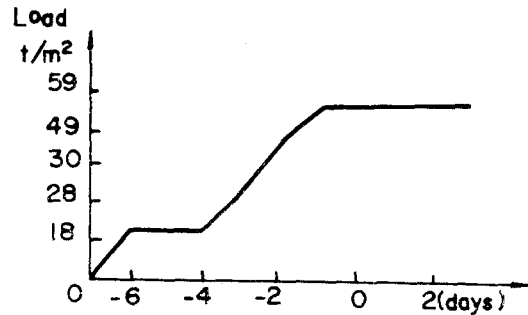


Fig. 4-9. Rate of Construction of embankment.

4-8과 같다.

(2) 盛土幅은 14m 로 5t/m<sup>2</sup>의 荷重을 1t/m<sup>2</sup>/day 로 盛土하였으며 盛土의 單位重量은 約 1.8 t/m<sup>3</sup>를 目標로 한 것이다.(Fig. 4-9 參照)

(3) 基礎地盤의 境界條件은 바닥이 固定, 上部와 下部의 兩面排水로 한 것이다.

(4) 粘土層은 正規  $K_o$ -壓密層이며 對應한 層의 材料定數는 Table 4-1과 같다.

notations used in the above table

$\lambda$ :  $e$ - $\ln p$  曲線의 正規壓密部分의 기울기

$k$ :  $e$ - $\ln p$  曲線의 膨潤-再壓縮部分의 기울기

$M$ :  $p$ - $q$  平面에서 限界狀態線의 기울기

$G_o$ : 初期剪斷彈性係數

$\sigma'_{vc}$ : 先行時의 有效鉛直應力

$K_{oc}$ : 先行時의 靜止土壓係數

$\nu$ : Poisson 比

$\sigma'_{v}$ : 現在의 有效鉛直應力

$K_o$ : 靜止土壓係數

$e_c$ : 初期間隙比

$\gamma_s$ : 흙의 單位重量

$\lambda_K$ :  $e-\ln K$  曲線의 기울기

$k_{x0}$ : 初期水平方向의 透水係數

$k_{z0}$ : 初期鉛直方向의 透水係數

(5) 여기에 사용된 定數는 Magnan 등(1982)이 사용한 것과 同一하므로 解析의 結果를 相互比較함으로써 本 Program의 精度를 確認할 수 있다.

## 2) 結果 및 考察

### (1) 沈下

盛土中央部の 沈下를 Sandhu-Wilson 方法으로 Magnan group이 解析한 것과 著者가 Christian-Boehmer 方法으로 解析한 結果를 Fig. 4-10(a)에 表示한다. 後者가 實測值보다 크게 나타나고 있는데 이 경우는 盛土部剛性を 무시한 경우이다. 따라서 盛土部の 剛性を 고려(mesh)한 경우의 解析을 Fig. 4-10(b)에 나타낸다. 剛性を 고려하게 되면 現場觀測値와 비슷한 모양을 보이니 最終沈下量은 조금 작게 나타난다. 또 盛土期間中の 載荷條件에 대해서 即時載荷時

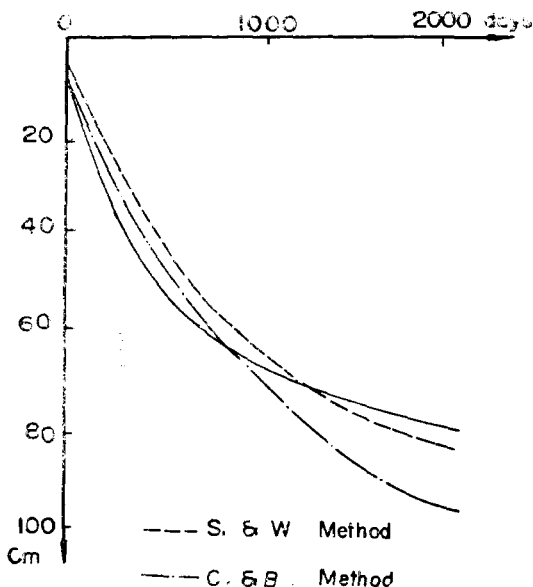


Fig. 4-10. (a) Settlement of surface in center

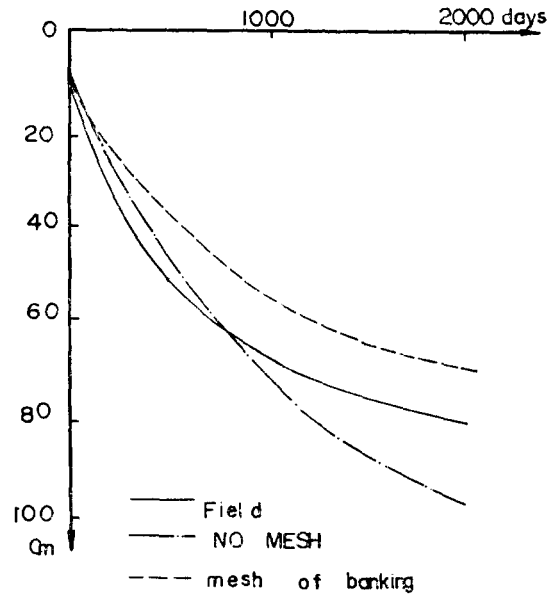


Fig. 4-10. (b) Settlement of surface in center.

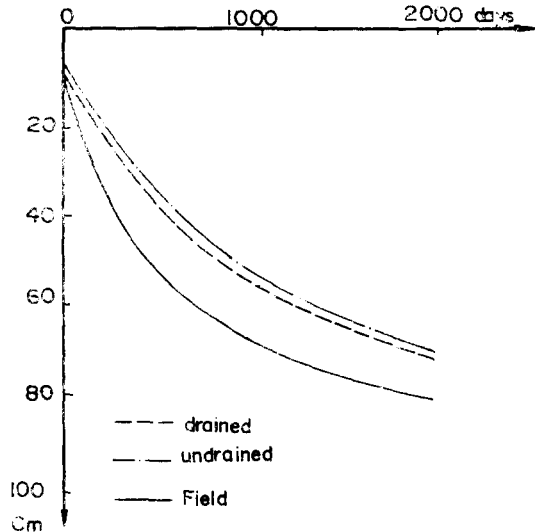


Fig. 4-10. (c) Settlement of surface in center

와 漸增載荷인 경우로 나누어 이를 盛土部の 剛性を 고려한 경우만을(mesh化) 比較하였는데 即時載荷가 약간 작게 나타나고 있으나 이것은 盛土期間에 짧은 것(6日)이므로 큰 차이가 없다.

### (2) 側方變位

側方變位에 관한 解析의 結果를 Fig. 4-11에 表示하였다. Fig. 4-11(a)는 Sandhu-Wilson 方法과 Christian-Boehmer 方法을 比較한 것인데

어는 것이나 實測値와 差異를 보이고 있으며 後者인 경우에 그 差異가 크게 나타난다. 따라서 이의 補完방법으로써 盛土剛性を 고려(mesh化)해서 解析한 結果가 Fig. 4-11(b)이다. 剛性を 고려하여 解析한 結果는 實測値에 接近하고 있다는 事實을 볼 수 있으며 그 理由로는 盛土荷重과 粘土地盤의 境界面에서 剛性を 고려하게

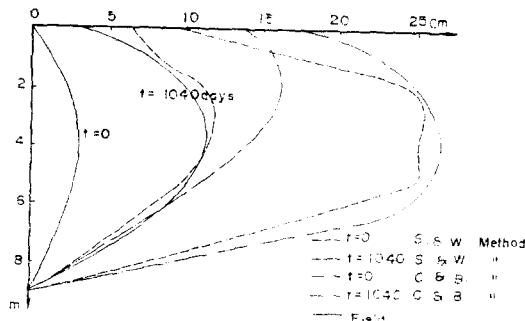


Fig. 4-11. (a) Lateral displacement

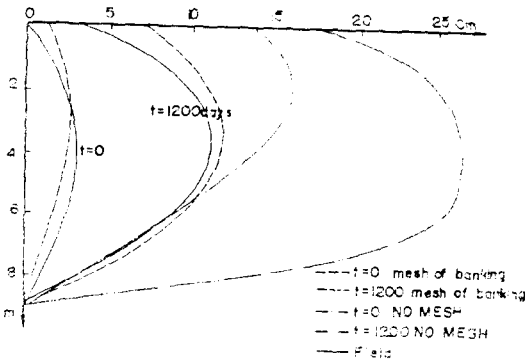


Fig. 4-11. (b) Lateral displacement

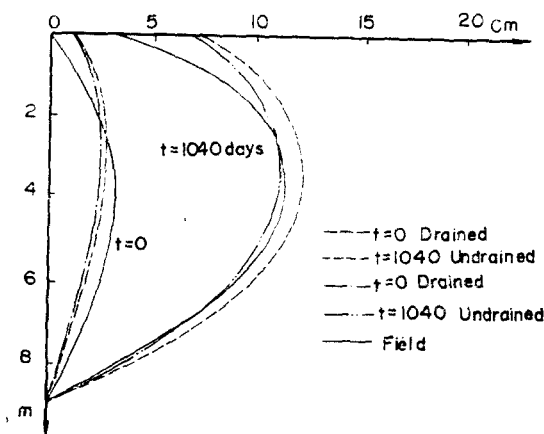


Fig. 4-11. (c) Lateral displacement

되면 相互抑制作用을 하기 때문일 것으로 判斷된다. 또한 盛土條件을 即時載荷와 漸增載荷인 경우로 나누어 Fig. 4-11(c)에 나타냈는데 載荷條件에는 크게 영향을 받지 않는다. 이는 짧은 載荷期間 동안에는 排水條件의 영향을 크게 받지 않는 것으로 解析된다.

### (3) 間隙水壓

間隙水壓의 變動을 Fig. 4-12(a)에서 檢討하여 보면 Sandhu-Wilson 이나 Christian-Boehmer 方法의 어느쪽도 實測値와는 약간 差異가 있으며 壓密初期(載荷直後)에는 모두가 實測値보다 크고 특히 後者가 더욱 크지만 終期에서는 後者가 훨씬 작게 나타난다. 實測値는 前者와 後者의 中間精度로 나타난다. 또는 Fig. 4-12(b)에서처럼 盛土部의 剛性を 고려한 경우와 무시한 경우에 큰 差異가 없다는 것은 注目할 만한 일이다. 단지 側方變位에 크게 영향을 주고 沈下에 약간의 變化가 있을 뿐이다. 또 即時載荷와 漸增載荷間의 差異는 漸增載荷가 약간 작게 나타나고 있어 本 Program의 妥當性を 立證하고 있다. (Fig. 4-12(c))

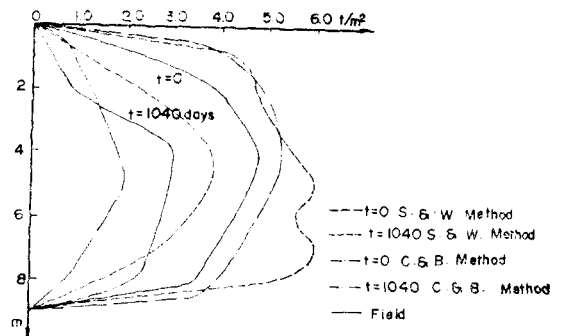


Fig. 4-12. (a) Excess pore water pressure

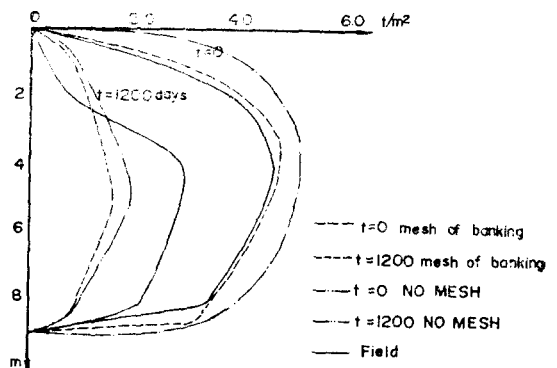


Fig. 4-12. (b) Excess pore water pressure

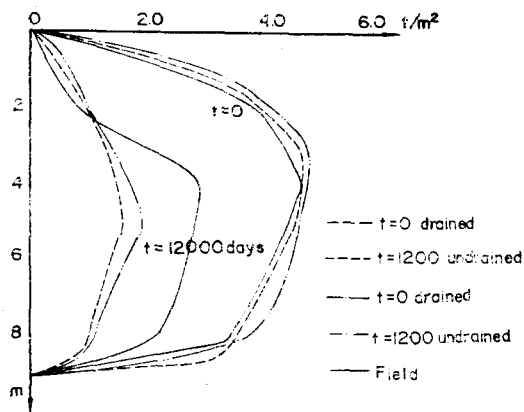


Fig. 4-12. (c) Excess pore water pressure

## 5. 結 論

本文은 平面變形率條件에서 Christian-Boehmer 系의 有限要素技法을 Biot의 壓密理論에 適用하여 基礎地盤의 應力—變形率關係를 解析하고 또 이를 基礎로 各種地盤의 安定對策을 세우기 위한 凡用 Program 開發의 一部이다. 本 Program의 타당성을 檢證하기 위해 Terzaghi의 1次元壓密論을 本 Program에 의해 수행, 比較하고 2次元壓密에 대해서 Magnan의 實測 및 解析結果와 比較하여 다음과 같은 結論을 얻었다.

### 1. 1次元壓密論에의 適用

- 1) 要素分割을 排水層에 갈수록 細分化하면 理論值에 接近하므로 計算精度를 높일 수 있다.
- 2) 時間間隔은 名 log cycle 마다 약 20分割精度 安定된다.
- 3) 修正 Cam-clay 理論에 의한 彈塑性壓密解로부터 求한 應力經路가  $K_0$  線과 잘 一致하고 있으므로 1次元解析은 거의 완벽하다.
- 4) 排水거리가 멀수록 時間지연으로 인하여 Mandel cryer 效果가 나타난다.

### 2. 2次元壓密論에의 適用

- 1) 壓密沈下量(中央部)은 Sandhu-Wilson 方法과 本 Program 그리고 實測值와 比較한 結果 本 Program의 方法에서 盛土의 剛性을 고려한

경우(mesh化)가 Sandhu-Wilson 方法보다 더 正確하고 實測值에 근사하며 경향도 같다.

2) 壓密沈下量(中央部)에 있어서 本 Program에 의하여 盛土의 剛性을 고려한 경우 盛土를 漸增載荷(排水條件)하는 경우와 即時載荷(非排水條件)하는 경우 實測值와 경향이 같고 漸增載荷의 경우가 實測值에 가깝다. 그러나 盛土期間이 6日에 불과하므로 兩載荷의 경우에 큰 차이가 없다.

3) 側方變位(法面 끝)는 盛土의 剛性을 고려한 本 Program의 경우 實測值와 거의 一致하고 Sandhu-Wilson의 方法은 큰 차이가 없다. 側方變位에 있어서 漸增載荷와 即時載荷의 경우 큰 차이가 없다. 이는 2)에서와 같이 實測資料가 6日間의 盛土期間이기 때문이다.

4) 間隙水壓(中央部)은 그 分布가 두 方法과 實測值와 차이가 있으나 分布의 形態와 값은 本 Program의 경우가 實測值에 가깝다. 特別 剛性을 고려한 경우  $t=0$ 에 있어서의 間隙水壓의 分布는 實測值와 거의 一致하고 있다. 壓密時間이 경과함에 따라 減少되어  $t=1200$ 日의 경우 實測值보다 작아지고 있으나 分布경향은 매우 合理的으로 弓形分布를 하고 있다. 實測值는 折線形으로 되어 있는 바 이 點에 대해서 Magnan 등은 不正確함을 認定하고 있는 바 本 Program의 形態가 옳은 것으로 판단된다.

## 參 考 文 獻

1. Atkinson, J.H. & P.L. Bransby, "The mechanics of soils", *An introduction to critical state soil mechanics*. McGrawHill, 1978.
2. Biot, M.A., "General theory of three-dimensional consolidation", *Journal of Applied Physics*, Vol.12, 1941, pp.155~164.
3. Burland, J.B., "The yielding dilation of clay. Correspondence", *Geotechnique*, Vol.15, 1965, pp.211~214.
4. Christian, J.T. & J.W. Boehmer, "Plane strain consolidation by finite elements", *Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division*. ASCE, No.96, SM4, July, 1970, pp.1435~1457.
5. Magnan, J.P., A. Belkeziz, P. Humbert & A. Mouratidis, "Finite element analysis of soil

- consolidation with special reference to the case of strain hardening elastoplastic stress-strain models," *Numerical Methods in Geomechanics*, Ebmonton, 1982, pp. 327~336.
6. Matsui, T. & N. Abe, "Multi-dimensional elastoplastic consolidation analysis by finite element methods", *Soils and Founds*. Vol. 21, No. 1, 1981, pp. 79~95.
  7. Roscoe, K.H. & J.B. Burland, "On the generalized stressstrain behaviour of 'wet' clay", *Engineering Plasticity*. Cambridge Univ. Press, 1968, pp. 535~609.
  8. Roscoe, K.H., A.N. Schofield & A. Thrairajah, "Yielding of clays in states wetter than critical", *Geotechnique*. Vol. 13, 1963, pp. 211~240.
  9. Sandhu, R.S. & E.L. Wilson, "Finite element analysis of seepage in elastic media", *J. Eng. Mech. Division ASCE*. Vol. 95, No. EM3, 1969, pp. 641~652.
  10. Schofield, A.N. & C.P. Wroth, "Critical state soil mechanics", *McGraw-Hill Book Co. Ltd. London*. England, 1968.
  11. Zienkiewicz, O.C. & D.J. Naylor, "The adaptation of critical state soil mechanics theory for use in finite elements", *Stress-Strain Behaviour of Soils*. 1971.
  12. 鄭鎮燮, "飽和粘土의 應力-變形率에 관한 研究", 博士學位論文, 全南大學院, 1983.
  13. 朴炳基, 鄭鎮燮, 李汝樹, 姜秉宜, "限界狀態概念에 의한 飽和粘土의 剪斷特性에 관한 研究", 大韓土木學會論文集 3卷 2號, 1983.
  14. 李汝樹, "有限要素法에 의한 多次元壓密의 變形解析", 博士學位論文, 高麗大學院, 1985.
  15. 朴炳基, 鄭鎮燮, "多次元壓密의 數值解析과 그 適用에 관한 考察", 大韓土質工學會 發表講演集, 1984, pp. 74~112.

(1985. 6. 8. 접수)