

공차와 틈새를 고려한 4 절연쇄기구의 최적설계

김호룡* · 오병준**

Optimal Design of Four-bar Mechanism in consideration of Tolerances and Clearances

Ho-Ryong Kim and Byung-Jun Oh

ABSTRACT

A four-bar mechanism in consideration of the tolerances on link lengths and the clearances in joints is optimally designed by the method of stochastic analysis. The random nature of clearances and tolerances establishes a stochastic optimization design equation in which the parameters in the equation are described by random variables.

In order to solve the design equation, the stochastic problem is converted into an equivalent deterministic one. The synthesis of four-bar mechanism for minimum mechanical and structural errors is carried out by the optimization techniques using Chebyshev spacing of precision points.

By the results from the synthesized mechanism, the generated and desired motions are examined.

NOMENCLATURE

f_{g_j}	; Probability density function of g_j	g_j	; Inequality constraint equation
F	; Objective function	h_k	; Equality constraint equation
F_{g_j}	; Cumulative distribution of g_j	$G_j(\vec{Y})$; Constraint equation of probability
F_p	; Penalty function	$[H]$; Hessian matrix
$F(\alpha)$; Quadratic function of α	K_θ	; Input-scale factor
		K_ϕ	; Output-scale factor
		L	; Link length
		P_j, P_k	; Dependability
		$P[]$; Probability of occurrence of the event []

* 연세대학교 공과대학 기계공학과

** 연세대학교 공과대학 대학원

- r_i, r_j ; Penalty factor
- r_{ij} ; Radial clearance
- \vec{S} ; Minimizing direction
- t ; Tolerance
- X ; Design variable
- \vec{Y} ; Vector of Random variable Y_i
- Z ; Standardized normal variable
- α ; Minimizing step length
- γ ; Transmission angle
- δ_i, τ_i ; Penalty parameter
- σ ; Standard deviation
- σ^2 ; Variance
- σ_{ψ}^2 ; Mechanical error
- ϕ ; Output angle
- ϕ_a ; Actually generated output angle
- ϕ_r ; Desired output angle
- ψ ; Structural error
- $\epsilon(P)$; Percentile of Specified Dependability P

에 많이 사용되는 4절 연쇄기구를 최적설계 하였다. 함수발생 기구에서 Chebyshev 간격결정에 의한 무오차점 (precision point) 을 선택하여 구조오차의 기계적 오차를 최소화시키는 최적설계를 하고 다시 운동학적으로 해석하여 오차와 전달각을 구한 다음 결과를 비교 검토하였다.

2. 확률적 최적화 문제

최적 합성 문제의 목적함수는 합성된 기구의 함수발생 운동시 실제 발생된 운동과 설계자가 원하는 운동과의 오차로 구성되며, 제한 조건식은 공간제약, 링크길이의 제약, 전달각, 운동범위와 입력각의 연속적인 회전 등이다. 목적함수나 제한조건식에 포함된 설계변수나 매개변수가 무작위 (random) 변수일 때 확률적 문제로 되며 이를 수학적으로 표현하면 다음과 같이 된다.

$$\text{목적함수 : minimize } F(\vec{Y}) \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{제한조건식 : } P(g_j(\vec{Y}) > 0) \geq P_j \quad j = 1, 2, \dots\dots m \quad \dots (2)$$

1. 서 론

정밀기계는 물론 모든 기계는 그 요구된 운동의 정확성 유지가 생명이므로 그 기계 설계시 가장 근본적으로 대두되는 것이 기계의 운동을 좌우하는 기계의 구조 즉 기구설계이다. 따라서, 기구(mechanism)설계시 구조오차를 최소화시키는 연구^{1,2}가 계속되어 왔으며, 이들은 링크길이가 확정적 (deterministic) 이고 조인트에서의 움직임이 없는 이상적인 상태로 가정하여 설계하였다. 그러나 기계나 기구의 조립시 가공오차 (manufacturing error) 에 의한 공차와 조인트에서의 틈새의 영향으로 인한 기계적 오차 (mechanical error) 는 소음, 진동, 마모, 피로등을 유발시켜 성능을 저하시키거나 기계의 수명을 단축시킨다. 따라서 링크장치 설계시 구조오차 뿐만 아니라 기계적 오차도 고려해야 한다.^{3,4,5)}

본 연구에서는 기구 설계시 공차와 틈새의 영향으로 인한 확률적 문제에 Stochastic 해석방법을 적용하여 확정적인 확률적 문제로 변환시키고 이에 최적화 기법을 적용하여 일반적으로 기체구조

2 - 1. 확률적 문제를 확정적 문제로 변환

2.1.1 목적함수

함수 $F(\vec{Y})$ 를 y_i 의 평균값 y_{im} 에 대하여 Taylor 급수로 전개하면

$$F(\vec{Y}) = F(\vec{Y}_m) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial F}{\partial y_i} \Big|_{\vec{Y}_m} \cdot (y_i - y_{im}) + \text{고차미분항} \quad \dots\dots\dots (3a)$$

$$\approx F(\vec{Y}_m) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial F}{\partial y_i} \Big|_{\vec{Y}_m} \cdot (y_i - y_{im}) \equiv \psi(\vec{Y}) \quad \dots\dots\dots (3b)$$

이며, $\psi(\vec{Y})$ 의 평균과 분산은 다음과 같이 된다.

$$\psi_m(\vec{Y}) = \psi(\vec{Y}_m) = F(\vec{Y}_m) \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\text{Var}(\psi) = \sigma_{\psi}^2 = \left[\frac{1}{2} (\psi(\vec{Y}) - \psi(\vec{Y}_m)) \right]^2 \dots (5a)$$

$$= \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial F}{\partial y_i} \Big|_{\vec{Y}_m} \right]^2 \cdot \sigma_{y_i}^2 \quad \dots\dots\dots (5b)$$

따라서 목적함수 $F(\vec{Y})$ 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$F(Y) = \psi(\vec{Y}_m) + \sigma_{\psi}^2(\vec{Y}) \quad \dots\dots\dots (6)$$

2.1.2 제한 조건식

식(2)에서 $g_j(\vec{Y})$ 를 \vec{Y}_m 에 대하여 다시 Taylor 급수로 전개하면

$$g_j(\vec{Y}) = g_j(\vec{Y}_m) + \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial g_j}{\partial y_i} \Big|_{\vec{Y}_m} \right] (y_i - y_{im}) + \text{고차미분항} \dots (7)$$

이 된다.

여기서, $g_j = g_j(\vec{Y})$, $g_{jm} = g_j(\vec{Y}_m)$ 으로 표시하면 표준편차 σ_{g_j} 는, 고차미분항은 무시할 정도로 작으므로

$$\sigma_{g_j} = \left\{ \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial g_j}{\partial y_i} \Big|_{\vec{Y}_m} \right]^2 \cdot \sigma_{y_i}^2 \right\}^{1/2} \dots (8)$$

이 된다. $g_j(\vec{Y})$ 의 확률밀도 함수 (probability density function)를 $f_{g_j}(g_j)$ 라 하면, 식(2)는 누적분포 함수 (cumulative distribution function) $F_{g_j}(g_j)$ 를 이용하여 식(9)와 같이 다시 쓸 수 있다.

$$F_{g_j}(g_j) = \int_0^{\infty} f_{g_j}(g_j) \cdot dg_j \geq P_j \dots (9)$$

확률밀도함수 f_{g_j} 는 중심극한정리 (central limit theorem)에 의거 다음과 같이 표준정규분포로 가정한다.

$$f_{g_j}(g_j) = \frac{1}{\sigma_{g_j} \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(g_j - g_{jm})^2}{2\sigma_{g_j}^2} \right] \dots (10)$$

표준정규변수 z 를 도입하여 변수를 치환하면

$$z = \frac{g_j - g_{jm}}{\sigma_{g_j}} \dots (11)$$

한편, 표준정규 분포는

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 1 \dots (12)$$

이므로 식(9)는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\int_{-g_{jm}/\sigma_{g_j}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz > \int_{-\varepsilon_i(P_j)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \dots (13)$$

식 (13)의 하한으로부터

$$-g_{jm}/\sigma_{g_j} \leq -\varepsilon_i(P_j) \dots (14)$$

이므로

$$-g_{jm} + \varepsilon_i(P_j) \cdot \sigma_{g_j} \leq 0 \dots (15)$$

이 된다. 따라서 제한조건식 $G_j(\vec{Y})$ 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$G_j(\vec{Y}) = g_j(\vec{Y}_m) - \varepsilon_i(P_j) \cdot \left\{ \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial g_j}{\partial y_i} \Big|_{\vec{Y}_m} \right]^2 \cdot \sigma_{y_i}^2 \right\}^{1/2} > 0 \dots (16)$$

3. 4 절연쇄기구의 확률적 최적설계

3-1. 기구의 최적합성

Fig.1은 4절 연쇄기구의 함수 $y = f(x)$ 발생 기구이다. 설계독립변수 x 는 입력회전각 θ , 그리고 설계종속변수 y 는 출력회전각 ϕ 와의 선형적인 비례관계로부터 출력각 ϕ 가 입력각 θ 에 따라 연속적이고 유연한 운동을 하도록 한다.

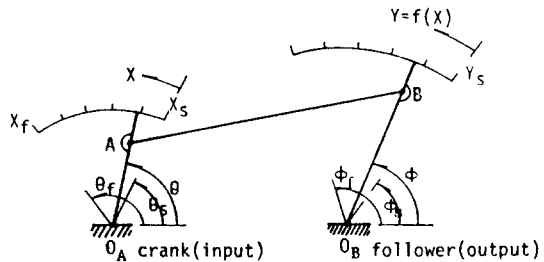


Fig. 1. Function generator of 4-bar linkage

Chebyshev 간격결정에 의한 무오차점은

$$x_i = x_s + \frac{\Delta x}{2} \left[1 - \cos \left(i \beta - \frac{\beta}{2} \right) \right] \dots (17)$$

$$i = 1, 2, \dots, q, \quad \beta = \frac{180}{n}$$

이며, x 와 y 에 대응하는 θ_i 와 ϕ_i 는

$$\theta_i = \theta_s + K_\theta (x_i - x_s) \quad \dots\dots (18)$$

$$\phi_i = \phi_s + K_\phi [y(x_i) - y(x_s)]$$

이다. 여기서,

$$K_\theta = \frac{\Delta\theta}{\Delta x} = \frac{\theta_f - \theta_s}{x_f - x_s}$$

$$K_\phi = \frac{\Delta\phi}{\Delta y} = \frac{\phi_f - \phi_s}{f(x_f) - f(x_s)}$$

3 - 2. 4절연쇄기구의 확률적 모델

Fig. 2 (a)(b)(c)는 조인트에서의 틈새와 링크길이의 공차를 고려한 4절 연쇄기구의 확률적 모델이다.

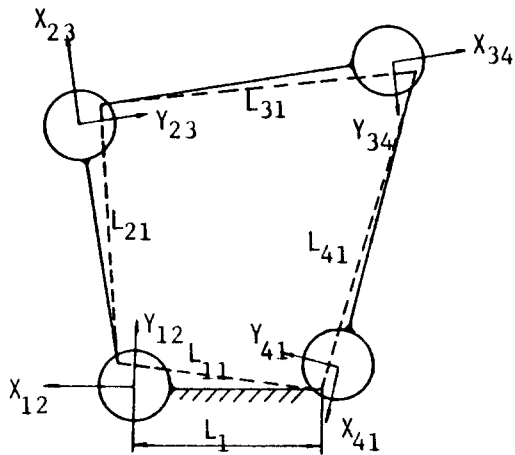


Fig. 2. (a) Probabilistic model of 4-bar linkage with tolerance and clearance

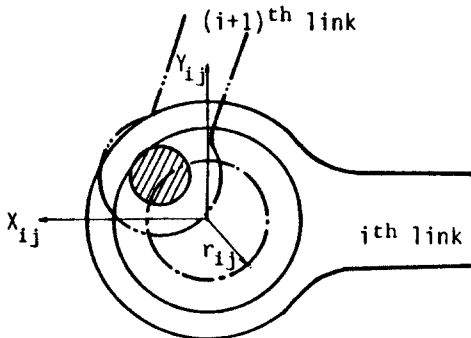


Fig. 2. (b) Exaggerated view of the joint between the *i*th link and (*i*+1)th link

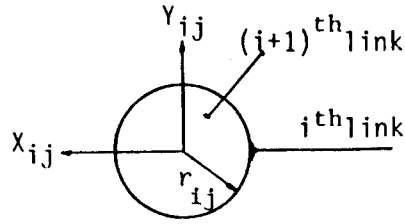


Fig. 2. (c) Line diagram of a joint between the *i*th and (*i*+1)th links

이론링크길이를 L_i , L_j 에 대한 공차를 t_i , i 번째 링크와 ($i+1$) 번째 링크의 조인트에서의 반지름 틈새를 Fig.2(b)와 같이 r_{ij} 로 놓으면 Fig. 2(a)에서, 각 링크 길이는

$$L_{ij}^2 = (L_i \pm t_i + x_{ij})^2 + y_{ij}^2$$

$$\approx (L_i \pm t_i + x_{ij})^2$$

$$i = 1 \dots\dots 4$$

$$j = i + 1, \text{ 단 } i = 4 \text{ 일때 } j = 1$$

로 되며, 링크길이와 틈새를 무작위 변수로 놓으면 변위 방정식은 무작위 변수의 함수로 다음과 같이 된다.

$$\phi_i(\vec{Y}, \theta_i) = 2 \tan^{-1} \frac{A_i(\vec{Y}) \pm D_i(\vec{Y})}{B_i(\vec{Y}) \pm C_i(\vec{Y})} \quad (19)$$

여기서,

$$A_i(\vec{Y}) = \sin \theta_i, \quad B_i(\vec{Y}) = \cos \theta_i - L_{11}/L_{21}$$

$$C_i(\vec{Y}) = \frac{L_{11}^2 + L_{21}^2 - L_{31}^2 - L_{41}^2}{2 L_{21} L_{41}} - \frac{L_{11}}{L_{41}} \cos \theta_i$$

$$D_i(\vec{Y}) = (A_i^2(\vec{Y}) + B_i^2(\vec{Y}) - C_i^2(\vec{Y}))^{1/2}$$

이다.

3 - 3. 목적함수의 유도

목적함수는 식(6)으로 표시되며, 이 식의 구조오차 $\psi(\vec{Y}_m)$ 와 기계오차 $\sigma_\psi^2(\vec{Y})$ 는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \psi(\vec{Y}_m) &= \sum_{i=1}^q (\phi_{ai}(\vec{Y}_m, \theta_i) - \phi_{ri})^2 \\ &= \text{Structural error} \\ \sigma_\psi^2(\vec{Y}) &= \sum_{i=1}^q \left\{ \sum_{j=1}^q \left(\frac{\partial \phi_{ai}}{\partial y_j} \bigg|_{\vec{Y}_m} \right)^2 \cdot \sigma_{y_j}^2 \right\} \\ &= \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q \left(\frac{\partial \phi_{ai}}{\partial y_j} \bigg|_{\vec{Y}_m} \right)^2 \cdot \frac{x_{i+3}^2}{9} \\ &= \text{mechanical error} \dots\dots (20) \end{aligned}$$

무작위변수 y_i 에 대한 ϕ 의 편미분 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_{ai}}{\partial y_j} &= \frac{2}{(B_i + C_i)^2 + (A_i \pm D_i)^2} \\ &\times \left\{ \left\{ \frac{\pm B_i(B_i + C_i)}{D_i} - (A_i + D_i) \right\} \cdot \frac{\partial B_i}{\partial y_j} - \left\{ \frac{\pm C_i(B_i + C_i)}{D_i} + (A_i + D_i) \right\} \cdot \frac{\partial C_i}{\partial y_j} \dots\dots\dots (21) \right. \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_i}{\partial y_1} &= \frac{\partial B_i}{\partial y_5} = -\frac{1}{L_{21}} \\ \frac{\partial B_i}{\partial y_2} &= \frac{\partial B_i}{\partial B_6} = -\frac{L_{11}}{L_{21}^2} \\ \frac{\partial B_i}{\partial y_3} &= \frac{\partial B_i}{\partial y_4} = \frac{\partial B_i}{\partial y_7} = \frac{\partial B_i}{\partial y_8} = 0 \\ \frac{\partial C_i}{\partial y_1} &= \frac{\partial C_i}{\partial y_5} = \frac{L_{11}}{L_{21}L_{41}} - \frac{1}{L_{41}} \cos \theta_i \\ \frac{\partial C_i}{\partial y_2} &= \frac{\partial C_i}{\partial y_6} = \frac{L_{21} - (CL_{41} + L_{11} \cos \theta_i)}{L_{21}L_{41}} \\ \frac{\partial C_i}{\partial y_3} &= \frac{\partial C_i}{\partial y_7} = \frac{L_{31}}{L_{21}L_{41}} \\ \frac{\partial C_i}{\partial y_4} &= \frac{\partial C_i}{\partial y_8} = \frac{L_{41} - CL_{21}}{L_{21}L_{41}} \end{aligned}$$

3 - 4. 제한조건식의 유도

먼저 운동전달조건을 고려하여 각운동을 30°에

서 150°로 정하고 이 범위에 있을 확률을 99.73%로 하면 제한조건식의 확률함수는

$$\begin{aligned} P(\tau_i - 30^\circ) &> 0.9973, \\ P(150^\circ - \tau_i) &> 0.9973, \quad i=1, 2, \dots, q \quad (22) \end{aligned}$$

여기서 전달각 τ_i 는

$$\tau_i = \cos^{-1} \left\{ \frac{L_{41}^2 + L_{31}^2 - L_{21}^2 - L_{11}^2 + 2L_{11}L_{21} \cos \theta_i}{2L_{31}L_{41}} \right\}$$

한편, 운동가능조건을 고려한 제한조건식들은 설계변수에 대한 기하학적 제한조건으로부터 다음과 같이 정한다.

$$\left. \begin{aligned} L_i^{(l)} \leq L_i \leq L_i^{(u)}, \quad i=2,3,4 \\ t_i^{(l)} \leq t_i \leq t_i^{(u)}, \quad i=1,2,3,4 \\ \tau_{ij}^{(l)} \leq \tau_{ij} \leq \tau_{ij}^{(u)}, \quad ij=12,23,34,41 \\ \theta_0^{(l)} \leq \theta_0 \leq \theta_0^{(u)} \\ \phi_0^{(l)} \leq \phi_0 \leq \phi_0^{(u)} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

4. 결과 및 검토

함수발생 $y = \sin x$, $y = \cos_{10} x$, $y = x^2$ 기구에서 $\Delta\theta = 150^\circ$, $\Delta\phi = 90^\circ$, $q=11$ 그리고 $0.1 \leq L_i \leq 10$, $0 \leq t_i \leq 0.005$, $0 \leq \tau_{ij} \leq 0.002$ 로 하여 Fletch-Davidon-Powell의 최적화기법을 적용하였다.⁶⁾ 이의 결과가 Table 1로써 \sin 함수 발생 기구시 전체오차가 가장 적은 오차를 보였다. Fig. 3~Fig.5는 Table 1에서 얻은 결과에서 입력링크의 각 위치에 대한 출력링크의 평균 발생각과 구조오차, 기계적 오차의 3σ , 그리고 평균 전달각을 도시하고 있다. 각 함수발생 기구에서 구조오차는 큰 변동을 보였으나 기계적 오차는 비슷한 표준편차 ($0.03^\circ < 3\sigma < 0.045^\circ$)를 나타냈으며 무오차점 7과 8 사이에서 크게 감소하였다. Table 2는 $\Delta\theta = \Delta\phi = 90^\circ$ 로 하였을때 Chebyshev 간격결정에 의한 오차는 균일간격 무오차점 보다 전체오차를 잘 감소시킴을 보여주며 Fig.6과 Fig.7은 구조오차 곡선을 나타낸 것으로 무오차점들 사이의 최대오차를 거의 일정하게 함으로써 전체구간에서의 오차는 감소되었다.

Table. 1. Results from the optimal synthesis of 3 different function generators for 11 precision points

Quantity		$y = \sin x$	$y = \log x$	$y = x^2$
Link length	x_1	4.3369	4.4344	4.2704
	x_2	4.4146	4.9665	4.0518
	x_3	4.9016	5.5867	4.9804
Tolerance ($\times 10^{-3}$)	x_4	2.0376	2.1291	2.0258
	x_5	2.3000	2.3973	2.3305
	x_6	1.6845	1.8196	1.6960
	x_7	2.3969	2.3101	2.3738
Clearance ($\times 10^{-3}$)	x_8	0.8175	0.8542	0.8126
	x_9	0.9227	0.9618	0.9350
	x_{10}	0.6758	0.7300	0.6804
	x_{11}	0.9962	0.9268	0.9524
Starting position (rad.)	Input	1.5779	1.7025	1.5614
	Output	1.1207	1.0584	1.4861
Total structural errors $\psi(\bar{Y})$: (rad.)		0.6212	1.1022	0.9065
Total mechanical errors $\sigma_p(\bar{Y})$: (rad.)		0.4865×10^6	0.5144×10^6	0.4806×10^6

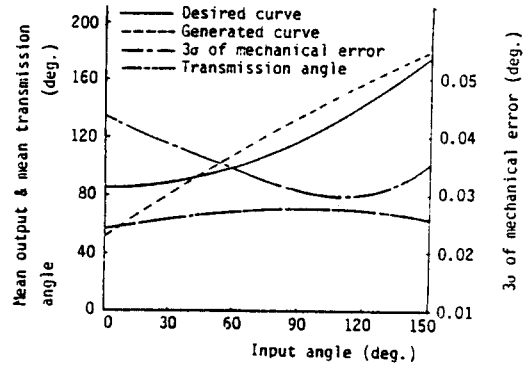


Fig. 5. Characteristics of the optimal design for a $y=x^2$ function generator

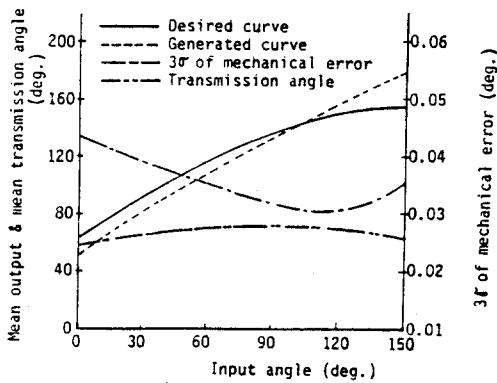


Fig. 3. Characteristics of the optimal design for a $y = \sin x$ function generator

Table. 2. Comparison of the results obtained from this study with those of Ref. (5): $y = \sin x$

Quantity		Chebyshev spacing	Equally spacing
Link length	x_1	5.3665	3.9449
	x_2	4.8979	4.3398
	x_3	5.0339	4.9697
Tolerance ($\times 10^{-3}$)	x_4	1.5866	0.4235
	x_5	2.1125	2.7189
	x_6	0.5835	0.3635
	x_7	1.7352	0.4439
Clearance ($\times 10^{-3}$)	x_8	0.6365	0.4273
	x_9	0.8475	2.6210
	x_{10}	0.2341	0.3576
	x_{11}	0.6961	0.4428
Starting position (rad.)	Input	0.0269	0.2550
	Output	1.0392	0.9098
Total structural errors $\psi(\bar{Y})$: (rad.)		0.0852	0.2463
Total mechanical errors $\sigma_p(\bar{Y})$: (rad.)		0.3318×10^{-6}	0.3796×10^{-6}

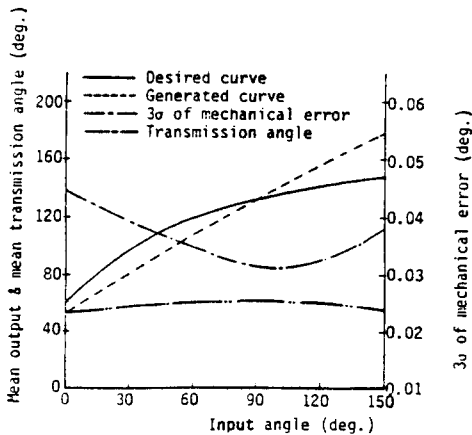


Fig. 4. Characteristics of the optimal design for a $y = \log x$ function generator

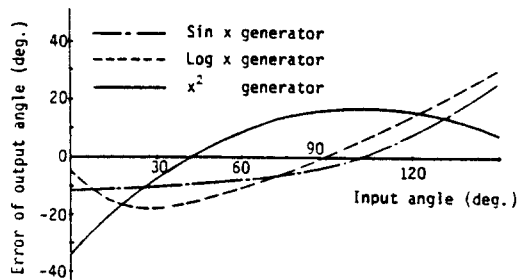


Fig. 6. Comparison between the structural error curves for the 3 optimally designed function generators h

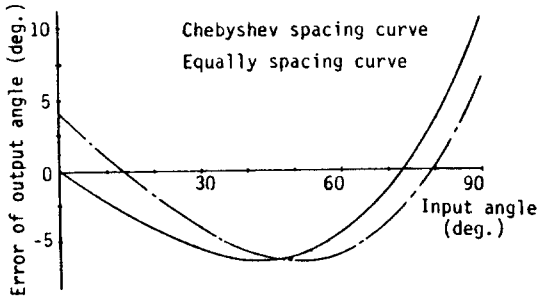


Fig. 7. Comparison of structural errors with those of Ref(5)

5. 결 론

- (1) 실제 기구 현상에서 발생하는 제조공차의 틈새는 무작위 현상으로 나타나므로 Stochastic analysis 방법에 의해 확정적 함수로 변환시켜 최적설계에 적용시킬 수 있었다.
- (2) 기계 오차는 함수발생기구의 종류에 관계없이 입력운동 범위에서 비슷한 분산을 나타내었다.
- (3) Chebyshev 간격결정에 의한 전체오차는 무오차점들 사이의 최대오차를 일정하게 함으로써 균일간격 무오차점에 의한 오차보다 약 3배 감소시켰다.

참 고 문 헌

1. Alizade, R.I., Mohan Rao, A.V., and

- Sandor, G.N., "Optimum synthesis of two-degree-of-freedom planar and spatial function generating mechanisms using the penalty function approach", J. of Eng. for Ind., Trans., ASME, Vol. 97, pp.629-634, May, 1975.
2. Osman, M.O.M., and Dukkupati, R.V., "Synthesis of function generating spatial mechanisms with optimal structural error" J. of Eng. for Ind., Trans., ASME, Vol. 99, pp.124-130, Feb. 1977.
 3. Chakraborty, J., "Synthesis of mechanical error in linkages" Mechanism and machine theory, Vol. 10, pp.155-165, 1975.
 4. Dubousky, S., "A parameter identification study of kinematic error in planar mechanisms" J. of Eng. for Ind., Trans., ASME, pp.635-642, Aug. 1975.
 5. Rao, S.S., "Mechanism design by chance constrained programming techniques", Mechanism and Machine theory, pp.413-414, 1979.
 6. Siddall, J.N., "Optimal engineering design", Marcel Dekker, Inc., 1982.