

크랭크 축의 모드 해석에 관한 연구

(A Study on Modal Analysis of a Crankshaft)

박 윤 식*, 제 양 규*, 오 동 엽**
 Youn-sik Park, Yang-Gyu jei, Dong-Yup Oh

Abstract

An analytical and experimental modal analysis is carried out upon a crankshaft of a four cylinder internal combustion engine for studying dynamic characteristics of the shaft. Influence coefficient method is adopted in modelling the object and the calculated dynamic properties are directly compared with the experimentally obtained torsional and bending natural frequencies and mode shapes. It is found that the test results are well agree with the outputs from analytical model especially in low harmonics.

1. 서 론

내연기관이 고속화, 경량화, 대용량화 함에 따라 크랭크 축계의 진동문제는 엔진에서 발생되는 소음 및 진동, 크랭크 축의 피로 강도 및 자동차 구동 축계의 동특성에 직접 영향을 주므로 이의 정확한 이론적, 실험적 해석은 내연기관의 성능 향상 설계에 매우 중요하다. 내연기관 개발 초기에는 공진에 의하여 운전중 크랭크축의 파단현상도 많았으나 근래에는 크랭크축 파단예방 측면보다 피로 수명신장에 의한 수명연장, 소음 및 진동 감쇄에 의한 정속한 엔진 개발을 위하여 크랭크축 동특성 해석을 연구하고 있다. 그림 1)에 보인 4기통엔진의 크랭크축 개략도에서와 같이 크랭크축은 저어널, 크랭크암, 크랭크핀 등 그 크기에 비하여 구조가 매우 복잡하며 6기통, 8기통과 같이 기통수의 증가에 따라 더욱 복잡하여진다. 크

랭크축은 그 형상으로 보아 비틀진동에 가장 취약하므로 크랭크 비틀 고유진동수 및 모우드를 또한 실린더 내의 폭발 압력과 크랭크 암, 피스톤 등 회전 질량의 관성이 크랭크 축의 굽힘 응력에 영향을 미치므로 굽힘 고유진동수 및 모우드를 구하는 것이 크랭크축 동특성해석의 요체이다. 지금까지의 크랭크축 동적해석법은 이론적인 모델을 수립하고 수립된 모델로부터 고유진동수 및 모우드를 해석하였다. 모델 수립 방법으로는 크랭크축을 집중 질량 및 스프링의 조합으로 치환하는 집중 질량 변수법¹⁾²⁾³⁾ (Lumped Mass Parameter Method), 크랭크축의 일부는 강체로 간주하고 그 나머지는 탄성체로 모델링하여 각 점에서의 변위, 힘, 모우먼트 등 상태량을 그 전 점에서의 상태량과 해당 부위의 해석적 해를 기초로 단계적으로 구하는 전달 매트릭스법⁴⁾⁵⁾ (Transfer Matrix Method), 유한 요소 모델에 의한 해석법(Fi-

* 한국과학기술원 기계공학과

** 삼성정밀(주)

nite Element Method), 전달 매트릭스법과 유한 요소 모델의 절충식이라고 볼 수 있는 Reduced Impedance Method⁶⁾⁷⁾ 등이 알려져 있다. 이론 해를 위한 모델 수립에 있어서 집중 질량 변수법을 사용하는 경우 등가질량과 등가스프링을 계산하는 방법에 따라 등가계 (Equivalent System)와 영향계수법 (Influence Coefficient Method)으로 나누어 볼 수 있다. 등가계란 크랭크축을 몇개의 구간으로 나눈 후 각 구간에 상당하는 등가질량을 계산하고 각 등가질량 사이에는 주어진 지름의 기준 원통축에 대응되는 등가 길이의 강성 계수를 주어 모델링하는 방법으로 비교적 간단히 모델을 얻을 수 있는 반면 크랭크축에서 저어널 부위와 핀 부위의 중첩, 크랭크 웨브 부분에서의 단면 계수 변화, 발란싱 질량의 처리 등으로 정확한 모델을 얻는 데는 어려움이 있다.

유한요소법의 경우는 크랭크 웨브, 발란싱 질량 처리, 축수에서의 상용 강성계수 등의 문제가 있고 또한 크랭크축 자체가 회전축에 대하여 비대칭이므로 컴퓨터 계산 시간 과다 등의 어려움이 예상된다. 전달 매트릭스법은 유한요소법에서 요소수를 줄인 유한요소법의 변형으로 볼 수 있으며 유한요소법에서와 같이 축수 부위 처리, 크랭크 웨브부위 모델링 등의 어려움이 있다. 또 최근에 발표된 Reduced Impedance Method는 크랭크 웨브 또는 모델링이 어려운 부분만 따로 떼어 Reduced Impedance 개념으로 강성 행렬을 구하고 타 부위는 전달 매트릭스법으로 계산하는 방법이다.

본 논문에서는 4기통 가솔린 엔진의 크랭크축을 영향계수법을 사용한 집중 질량 모델을 수립하여 동특성을 구하였다. 여기서 사용된 영향계수법이란 크랭크축이 비틀림운동을 할때 저어널 및 핀 부위는 순수 비틀림운동만 크랭크 웨브 부분은 순수 굽힘운동만 있다고 가정하여 크랭크축의 변형에너지를 이용 처짐을 구하여 이로부터 강성행렬을 계산하고 등가계와 같은 방법으로 구한 등가질량을 사용 동특성을 계산하였다. 또한 이론 모델로부터 구한 해의 타당성을 보이기 위하여 충격망치 (Impact Hammer)

를 사용 실험적으로 모우드 해석을 하여 그 결과를 비교하였다.

2. 이론적 해석모델

그림 1) 과 같은 크랭크축의 비틀 및 굽힘 진동특성을 규명하기 위하여 그림 2)와 같은 집중질량 모델을 수립하였다. 비틀 진동 해석을 위한 각 집중 질량의 등가관성 모우멘트, 등가 강성계수, 굽힘운동 해석을 위한 집중질량 및 강성계수의 산정은 아래와 같다.

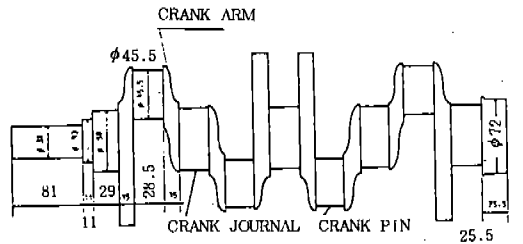


Fig. 1. Schematic drawing of a crankshaft of a four cylinder engine

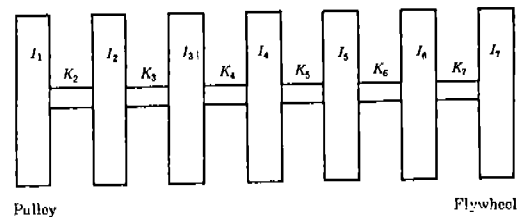


Fig. 2. Crankshaft model for torsion and bending analysis

2-1. 비틀림진동해석

그림 1)에 보인 바와 같이 크랭크축을 7구간으로 나누고 각 구간에서의 질량 관성 모우멘트를 구하여 7자유도의 집중질량 모델을 수립하였다. 이때 크랭크암의 등가관성 모우멘트는 복잡한 형상을 고려하여 단순한 형태로 여러 부분으로 나누고 각각의 관성 모우멘트를 구한 다음 합하는 방법을 택하였다. 또한 각 구간의 총합 강성계수는 영향계수법을 사용하여

구하였다. 단, 강성계수를 구하는데 있어서 가정은 크랭크축의 진동에 의한 발탄상 질량에서의 변형은 무시하며 크랭크 핀과 저어널 부위에서는 순수 비틀림만, 크랭크 암에서는 순수 굽힘만 발생한다고 가정하였다. 자유-자유조건하에서 계산된 강성계수 및 질량 관성모우멘

트는 표 1)에 주어져 있다. 엔진블록위에 위치한 경우와 자유-자유조건인 경우를 비교하면 엔진블록 위에 위치하므로써 크랭크 축의 비틀 변형이 엔진블록 축받침 부위에서 구속되어 지므로 동가 강성계수가 증가하고 따라서 자연진동수가 커지게 된다.

Table 1. Equivalent mass moment of inertia and stiffness for torsion analysis (pulley and flywheel are included)

Moment of Inertia ($\times 10^{-4}$) (kgm^2)	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7
	9.88	38.42	66.24	66.24	66.24	36.52	1194.9
Stiffness ($\times 10^{-8}$) (N-m/rad)		K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7
		0.102	0.337	0.337	0.337	0.337	3.852

2-2. 굽힘진동해석

크랭크축은 그 형상이 회전축에 대하여 비대칭이므로 크랭크 암이 임의의 위치에 있을 때의 굽힘 진동을 해석하기 위하여 크랭크 암이 실린더와 이루는 각이 0° 일때와 90° 일때의 동가 강성행렬을 각각 따로 해석하고 두 결과를 벡터합하므로 임의 각에서의 해석 결과를 얻을 수 있다. 굽힘 진동해석을 위한 동가질량은 비틀 해석에서 구한 값의 값을 사용하였다. 왜냐하면 비틀 진동 해석시 사용된 극관성 모우멘트는 0° 와 90° 방향의 관성 모우멘트의 합이고 0° 와 90° 방향의 관성 모우멘트를 같다고 가정할 수 있기 때문이다. 동가강성 행렬은 0° 와 90° 방향에 대하여 flexibility개념을 도입하여 각각 구하였다.

그림 3)은 단위 크랭크 throw에서의 y 방향 힘과 z 방향 모우멘트가 주어졌을때 반력의 상호 관계를 보여주고 있다. 여기서 flexibility의 개념을 도입하여 B 단이 고정된 상태에서 A 단에 단위 힘을 가했을 때의 A점의 y 방향 변위 k_A , z 방향회전 각 ϕ_A 를 구하고 또한 A 단에 단위 모우멘트를 가했을 때의 A단의 처짐 및 회전각을 구하여 f_{yy} , $f_{y\phi}$, $f_{\phi y}$ 그리고 $f_{\phi\phi}$ 를 얻을 수 있다.

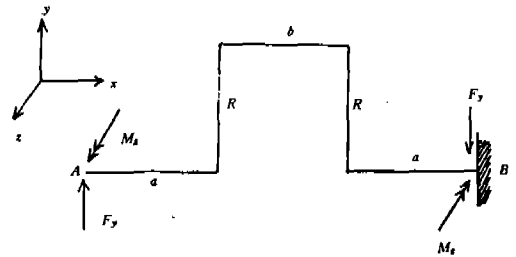


Fig. 3. Reactive forces and moments upon y -direction force (F_y) and z -direction moment (M_z)

변위와 하중사이의 관계로부터

$$\begin{Bmatrix} y_A \\ \phi_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{yy} & f_{\phi y} \\ f_{y\phi} & f_{\phi\phi} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} F_A \\ M_A \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (1)$$

을 얻을 수 있으며 여기서 A 단에서의 변형 벡터 $\begin{Bmatrix} y_A \\ \phi_A \end{Bmatrix}$ 를 $\{X_A\}$ 작용력 벡터 $\begin{Bmatrix} F_A \\ M_A \end{Bmatrix}$ 를 $\{R_A\}$ 라 하면 (2)식을 얻는다.

$$\{X_A\} = [F_{AA}]\{R_A\} \dots\dots\dots (2)$$

Flexibility 행렬 $[F_{AA}]$ 와 강성행렬 $[K_{AA}]$ 는 역의 관계에 있으므로 (2)식에서

$$\{R_A\} = [F_{AA}]^{-1} \{X_A\} = [K_{AA}] \{X_A\} \dots (3)$$

단 여기서 $[K_{AA}] = \begin{pmatrix} k_{yy} & k_{\phi y} \\ k_{y\phi} & k_{\phi\phi} \end{pmatrix}$ 이다.

그림 3) 에서 B 단의 반력 행렬을 $\{R_B\}$ 라면 힘과 모우멘트의 평형에서

$$\begin{aligned} \{R_B\} &= \begin{Bmatrix} F_B \\ M_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \ell & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_A \\ M_A \end{Bmatrix} \\ &= [T_{BA}] \begin{Bmatrix} F_A \\ M_A \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (4) \end{aligned}$$

이 되며 식(1), (2), (3) 그리고 (4)에서

$$\{R_B\} = [T_{BA}][K_{AA}]\{X_A\} \dots \dots \dots (5)$$

이 된다. 여기서 $[T_{BA}][K_{AA}] = [K_{BA}]$ 라면

$$\{R_B\} = [K_{BA}]\{X_A\} \dots \dots \dots (6)$$

이 된다. 여기서 $[K_{BA}]$ 는 B 단을 고정하고 A 단에 하중을 주는 경우의 강성행렬이다. 다음으로 그림(3)에서 A 단을 고정하고 B 단에 하중을 주는 경우는 $[K_{BB}] = \begin{pmatrix} k_{yy} & -k_{\phi y} \\ -k_{yy} & k_{\phi\phi} \end{pmatrix}$ 이 되며

(4)식을 구할 때와 같은 방법을 취하면

$$[K_{AB}] = [T_{AB}][K_{BB}] \dots \dots \dots (7)$$

이 된다. 여기서 $[K_{AB}]$ 는 A 단을 고정하고 B 단에 하중을 주는 경우의 강성행렬을 나타내며 앞서와 같이 $[T_{AB}]$ 는 힘과 모우멘트 평형식으로부터 $[T_{AB}] = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\ell & -1 \end{pmatrix}$ 의 관계가 있다.

위에서와 같이 $[K_{AA}]$, $[K_{BB}]$, $[K_{AB}]$ 그리고 $[K_{BA}]$ 를 구하고 이를 (8)식과 같이 조합하면 구간 AB에서의 등가 강성계수를 얻을 수 있다.

$$[K^{AB}] = \begin{pmatrix} K_{AA} & K_{AB} \\ K_{BA} & K_{BB} \end{pmatrix} \dots \dots \dots (8)$$

3. 이론 해석 결과

전절에서 구한 등가질량 및 관성 모우멘트 행렬과 등가강성 행렬을 사용하여 구한 크랭크축의 비틀 및 굽힘 고유 진동수는 표 2)에 정리하였다.

Table 2. Obtained crankshaft natural frequencies from theoretical model

Harmonic(Hz)		1st	2nd	3rd
Condition				
TORSION	Free-Free	875.6	1384.2	2620
	On Engine Block	1096.2	2023.8	2645
	On Engine Block with Pulley and Flywheel	445.2	1151.9	1601.9
BENDING	Free-Free 0° direction	293.5	653.1	1029.8
	Free-Free 90° direction	434.6	941.6	1492.1

4. 실험 모우드 해석

앞에서 이론 모델 수립에 의하여 구한 크랭크축 동특성 결과의 정확성을 검증하기 위하여 크랭크축에 대한 실험적 모우드 해석을 수행하였다. 충격망치 또는 가진기와 가속도계를 사용하여 크랭크축의 각 측정점 간의 주파수 응답을 구하고 이를 분석하므로 크랭크축의 동특성을 실험적으로 구하였다. 전 실험망치 계략도는 그림 4)에 나타나 있다.

크랭크축 가진방법은 자유-자유조건인 경우는 스펀지 위에 크랭크축을 위치하고 충격망치로 가진하였으며 엔진블럭 위에서의 실험은 가진기(magnetic shaker)를 사용하였다. 이

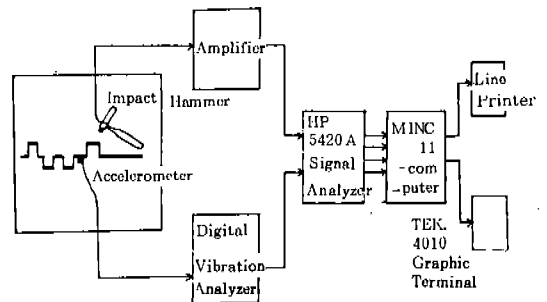


Fig. 4. Overall apparatus for experimental modal analysis

때 그림 5) 과 같이 굽힘 진동은 한개의 가속도계로 진동 신호를 측정하였으나 비틀림의 경우는 두개의 가속도계를 사용 충격에 의한 비틀림진동 신호를 얻었다. 이와 같이 구한 가진 신호와 응답신호를 사용하여 주파수 응답함수를 구하여 자연진동수 및 모우드를 구하였다. 구하여진 주파수 응답함수의 한 예가 그림 6) 에 있으며 각 점에서의 주파수 응답함수를 구하여 각

피크 값의 크기를 도시하므로 굽힘 또는 비틀림 모우드를 판별할 수 있다. 그림(6)에서 B_1, B_2, B_3, B_4 는 각각 1 차, 2 차, 3 차 그리고 4 차 굽힘 진동고유 진동수를 나타내고 있으며 T_1, T_2, T_3 는 각각 1 차, 2 차, 3 차 비틀림 고유진동수를 나타낸다. 크랭크축은 후타이철을 포함하여 엔진블럭 위에 위치할때는 그 특성상 비틀림고유 진동수가 가장 낮은 고유진동수가 되나 여기서는 자유-자유조건이므로 굽힘 진동이 가장 낮게 나타난다. 그림(6) 의 경우는 크랭크축이 자유-자유조건이나 실제의 경우인 엔진블럭 위에 있는 경우는 베어링 부위가 구속조건으로 작용되므로 굽힘, 비틀림 고유진동수는 증가하게 된다. 본 논문에서는 이를 보이기 위하여 엔진블럭 위에서 굽힘 고유진동수를 실험적으로 구하였다.

크랭크축이 엔진블럭 위에 장착되었을 때는 엔진블럭의 진동특성이 분리된 크랭크축만의 모우드를 구하기 위하여 엔진블럭을 단단한 대 위에 고정시키거나 스폰지위에 놓고 크랭크축 각 점에서의 주파수 응답함수를 구하여 비교하므로 모우드가 구별되도록 하였다. 즉 엔진블럭 위의 크랭크축에서 구한 주파수 응답은 엔진블럭의 진동특성이 함께 나타나므로 엔진블럭의 경계조건을 바꾸어 비교하므로 크랭크축만의 모우드를 구하도록 하였다. 이렇게 실험적으로 구한 비틀림 및 굽힘 고유진동수는 이론 모델로 구한 값과 비교하였으며 그 결과는 표 3) 에 정리하였다. 실험을 통하여 고유진동수를 구할때는 주파수 응답함수의 피크값 뿐아니

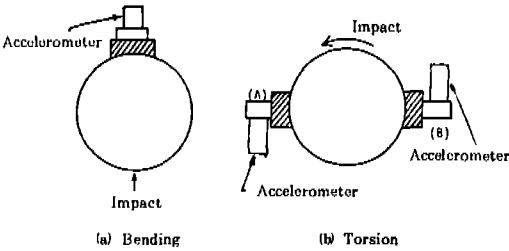


Fig. 5. The accelerometers position for bending and torsional vibration measurements

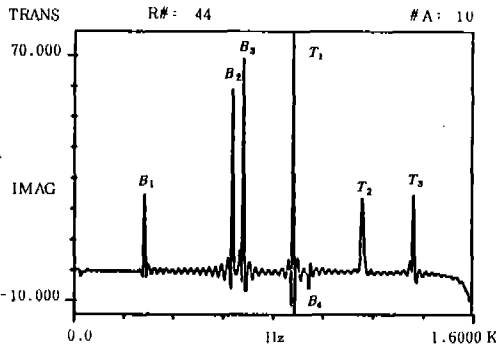


Fig. 6. A sample of obtained frequency response function

Table 3. Comparison between theoretical and experimental natural frequencies

Harmonics(Hz)		1st		2nd		3rd	
		Exp.	Theo.	Exp.	Theo.	Exp.	Theo.
TORSION	Free - Free	884.4	875.6	1154.7	1384.2	1362.5	2620
BENDING	Free - Free (0° direction)	290.4	293.5	647.6	653.1	689.8	1029.8
BENDING	On Engine block	849		1023		1146	

라 측정점을 따라 도시하므로 모두드도 구하여 비교하였다.

5. 결 론

표 3)에 비교한 바와 같이 영향 계수법으로 구한 크랭크 축의 고유 진동수는 기본 고유 진동수인 경우 비틀, 굽힘 모두 실험결과와 거의 일치하고 있으며 2차 하아모닉의 경우도 실험결과와 크게 벗어나지 않고 있다. 실제 엔진크랭크축 운전 범위는 6,000rpm (100Hz)이내인 점을 고려한다면 기본 고유 진동수와 2차 하아모닉까지만을 설계시 고려하면 충분하므로 감쇄를 무시한 영향계수법의 활용으로 보다 경제적이고 신빙성 있는 크랭크 축 동특성 해석을 할 수 있음을 보여 준다.

Reference

- 1) B.I.C.E.R.A., "A handbook on torsional vibration," Cambridge University Press, 1958.
- 2) Katsuhiko Wakabayashi, and Toshro Seki, "Simulation of torsional vibration in crank-shaftings of diesel engine" Journal of the M.E.S.J., Vol. 11, No. 11, 1976.
- 3) Young-Chool Han, "A study on the

viscous torsional vibration damper in a high speed diesel engine" Ph.D. Thesis, Hanyang University, 1981.

- 4) Katsuhiko Wakabayashi, Toshiro Seki, Shichi Iwato and Hideo Ito, "Analysis of vibration of reciprocating engine shaftings by the transfer matrix method" Journal of the M.E.S.J., Vol. 14, No. 3, 1979.
- 5) E.C. Pestel, et al., "Matrix method in elastomechanics" McGraw-Hill, 1963.
- 6) Akio Nagamatsu and Masaru Nagaike, "Vibration analysis of movable part of internal combustion engine," (Part 1, crankshaft), Bulletin of the JSME Vol. 24, No. 198, 1981.
- 7) Akio Nagamatsu and Masaru Nagaike, "Vibration analysis of movable part of internal combustion engine," (Part 2, Combined system of crankshaft and flywheel), Bulletin of the JSME Vol. 26, No. 215, 1983.

후 기 .

본 연구를 수행하는데 있어 프로젝트로 지원 해주신 현대자동차(주)에 감사드립니다.