

## 航空機 構造 및 제트 엔진에 관한 研究

第 1 報 : 제트엔진用 터어빈디스크의 熱傳導 解釋

朴吉文 · 朴煥奎 · 金鍾一 · 金鎮遠  
金鎮興 · 李茂錫 · 鄭洛奎

朝鮮大 工科大學  
(1985 年 12 月 20 日 收 稿)

## A Study on Aircraft Structure and Jet Engine

Part 1: Analysis of Heat Conduction on the Turbine Disk for Jet Engine

Gil Moon Park, Hwan Kyu Park, Jong Il Kim, Jin Won Kim,  
Jin Heung Kim, Moo Seok Lee and Nak Kyu Chung

College of Engineering, Chosun University  
(Received December 20, 1985)

### Abstract

The one of critical factor in gas turbine engine performance is high turbine inlet gas temperature. Therefore, the turbine rotor has so many problems which must be considered such as the turbine blade cooling, thermal stress of turbine disk due to severe temperature gradient, turbine rotor tip clearance, under the high operating temperature.

The purpose of this study is to provide the temperature distribution and heat flux in turbine disk which is required to considered premensioned problem by the Finite Difference Method and the Finite Element Methods on the steady state condition.

In this study, the optimum aspect ratio of turbine disk was analysed for various heat conductivity of turbine disk material by Finite Difference Method, and the effect of laminating method with high conductivity materials to disk thickness direction by Finite Element Methods in order to cool the disk.

The laminating method with high conductivity material on the side of the disk is effective.

### Nomenclature

- D** : diameter  
**h** : heat transfer coefficient  
 **$h_r$**  : value defined in eq (16)  $h_r = hr$   
**K** : heat conductivity  
 **$K_r$**  : Value defined in eq (16)  $K_r = K_r$   
 **$k_r$**  : coefficient matrix (heat conduction)  
 **$k_h$**  : coefficient matrix (convective heat Transfer)  
**l** : distance between nodes  
**N** : interpolation function  
**Q** : heat generation  
 **$Q_r$**  : value defined in eq (16)  $Q_r = Q_r$   
**[Q]** : heat generation vector  
**[q]** : heat flux vector of conduction  
 **$[q_{T\infty}]$**  : heat flux vector of convection  
 **$q_r$**  : value defined in eq (16)  $q_r = q_r$   
**Re** : Reynold's No  
**r** : coordinate of radius  
 **$r_1$**  : radius to center of element  
 **$r_0$**  : outer radius  
**T** : temperature  
 **$T_0$**  : temperature of outer radius  
 **$T_\infty$**  : surrounding temperature  
**[T]** : temperature vector  
 **$X_0$**  : thickness  
**X** : coordinate of thickness

- W : angular velocity  
 $\nu$  : dynamic viscosity

### Subscripts

- i : nodal number of radius direction  
 j : nodal number of thickness direction  
 M : last nodal number of radius direction  
 N : last nodal number of thickness direction

## I. 緒 論

航空用 가스터빈 엔진의 가장 중요한 성능은 비추력이며 비추력은 작동流體의 터빈 입구 온도에 의해 좌우된다. 그러므로, 비추력을 높이기 위해서는 터빈 입구에서의 燃燒 가스의 온도가 높아야하고 이에 따라 터빈 構造를 이루고 있는 각 부분이 高溫高壓 下에서 정해진 強度와 位置를 維持할 수 있어야 한다. 그러나, 모든 材料는 高溫에서 強度를 잃게되며 高溫에서 작동하는 터빈 로우터(turbine rotor)는 彈塑性 狀態(elastoplastic state)에서 遠心力에 의하여 크리이프(creep)가 發生하며 極甚한 溫度勾配에 의한 熱應力 및 이러한 熱荷重의 反復에 의한 低周波 波勞破壞(low cycle fatigue), 材料의 熱膨脹에 의한 터빈 로우터의 tip clearance 등 많은 문제점이 있다. 이러한 문제점을 고려하기 위해서는 터빈 깃(turbine blade) 및 터빈 디스크(turbine disk)에서의 熱傳達 特性을 解釋하고 正確한 溫度分布를 구하여야 한다. 터빈 디스크에서의 熱傳達에 대한 研究는 Metzger,<sup>1),2)</sup> Hamed<sup>3)</sup> 등에 의한 연구가 있으나, 터빈 斷面形狀과 熱傳達 特性에 대한 研究報告는 찾아보기 힘들다. 터빈 로우터에서의 열전달은 터빈 깃이 燃燒 가스에 의해 加熱되어 터빈 깃 뿌리(turbine blade root)를 통하여 터빈 디스크로 흐르게 된다. 그러므로, 터빈 디스크는 터빈 깃 冷却을 위한 heat sink로서 터빈 디스크에서의 熱傳達은 軸對稱(axisymmetric heat transfer)이다.

本 研究에서는 軸對稱 定常狀態(steady state condition)의 열전도 방정식을 有限差分法(finite difference method)과 有限要素法(finite element method)을 利用하여 터빈 디스크의 半徑/두께 比의 變化에 대한 온도 분포를 구하여 數値解의 精確성을 比較하고 有限差分法을 利用하여 터빈 디스크의 最適 半徑/두께 比(optimum aspect ratio)를 구하였으며 터빈 디스크 材料의 熱傳導係數가 最適 半徑/두께 비에 미치는 영향을 檢討함으로서 터빈 깃 및 터빈 디스크 設計에 필요한 資料를 提供하고자 한다. 또한, 有限要素法을 利用하여 最適 半徑/두께 比를 갖는 터빈 디스크에서 온도 구배를 減少하고 冷却效果를 增加시키기 위하여 터

빈 디스크의 두께 방향으로 熱傳導率이 높은 材料를 積層한 경우의 效果에 대하여 研究하였다.

II. 數值 解釋

1. 支配 方程式과 境界條件

터어빈 디스크에서의 熱傳達 모델은 Fig.1과 같이 터어빈 브레이드 및 디스크 円周로부터 燃燒 가스에 의해 加熱되고 디스크 側面에서 冷却空氣에 의해 냉각된다. 열전도율은 一定하다고 假定하고 定常狀態이므로 디스크 외경에서의 溫度는 일정하고 원주 방향의 온도는 均一하다고 가정하면 支配 方程式은 축 대칭이므로 다음과 같이 表示된다.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{Q}{K} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

境界 조건은 축 대칭과 半徑方向을 中心으로 對稱이므로 다음과 같다.

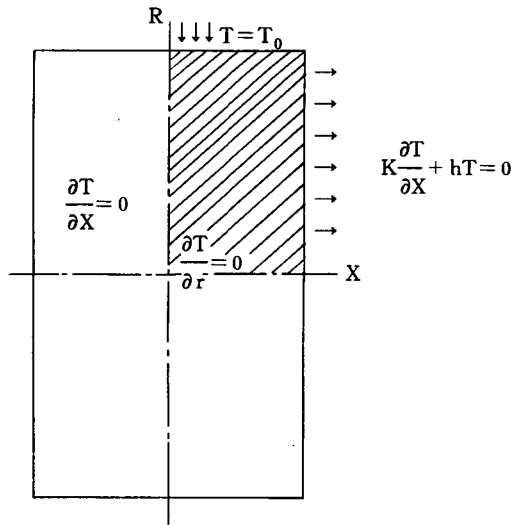


Fig. 1 Schematic of model.

$$T = T_0 \quad \text{at} \quad r = r_0 \dots\dots\dots (1a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad \text{at} \quad r = 0 \dots\dots\dots (1b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial X} = 0 \quad \text{at} \quad X = X_0 \dots\dots\dots (1c)$$

$$-K \frac{\partial T}{\partial X} + hT = hT_\infty \quad \text{at} \quad X = 0 \dots\dots\dots (1d)$$

여기서 熱傳達 係數 h는 Kreith의 式<sup>4)</sup>을 利用하면,

$$Nu = hr / K = 0.0195 (\omega r^2 / \nu)^{0.8}$$

Re < 5 × 10<sup>5</sup> 인 경우

$$\overline{Nu} = \frac{\overline{hD}}{K} = 0.35 \left( \frac{\omega r_0^2}{\nu} \right)^{0.5}$$

으로부터 求할 수 있다. 터어빈 깃에서의 熱傳達은 터어빈 깃 表面으로부터 燃燒 가스에 의해 加熱되고 熱은 터어빈 깃 뿌리(blade root)를 통하여 터어빈 디스크로 흐르게 된다. 터어빈 깃 끝(turbine blade tip)에서는 斷熱狀態로 볼 수 있으며 터어빈 깃 뿌리에서는 온도가 터어빈 디스크의 溫度와 같다. 또한, 열전달 모델을 Fin 문제와 같이 1차원 흐름으로 單純化하면 支配 方程式은

$$\frac{d^2T}{dr^2} - S^2 (T - T_g) = 0 \dots\dots\dots (2)$$

여기서  $S = \sqrt{h_g P K A}$ ,  $h_g$ 는 터어빈 깃에서의 熱傳達 係數이고, P는 터어빈 깃 斷面の 둘레 이다. 境界條件은,

$$T = T_0 \quad \text{at} \quad r = 0 \dots\dots\dots (2a)$$

$$\frac{dT}{dr} = 0 \quad \text{at} \quad r = L \dots\dots\dots (2b)$$

터어빈 깃의 溫度는 支配 方程式 및 境界條件으로부터,

$$T = T_g + (T_0 - T_g) \frac{e^{s(L-r)} + e^{-s(L-r)}}{e^{sL} + e^{-sL}} \dots\dots\dots (2c)$$

2. 有限差分法

① 支配 方程式

식 (1)에서  $Q = 0$  이며, 式 (1)을 中位差分(central difference)를 취하면,

$$\frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{i \Delta r} \frac{T_{i+1,j} - T_{i-1,j}}{2 \Delta r} + \frac{T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}}{(\Delta x)^2} = 0$$

$\Delta r = \Delta x = l$ 라 하면,

$$\left(1 - \frac{1}{2i}\right)T_{i-1,j} + \left(1 + \frac{1}{2i}\right)T_{i+1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1} - 4T_{i,j} = 0 \dots\dots\dots (3)$$

② 境界條件

r 축의 최종 Node No 를 M, x 축의 최종 Node No 를 N이라 하면, 式(1a)에서 差分式은,

$$\begin{aligned} T_{i,j} &= T_0 \\ r = r_0 \text{에서 } i &= M \\ T_{M,j} &= T_0 \end{aligned}$$

r = 0 에서 지배 방정식은 singular 되기 때문에 境界 조건 (1b)를 適用하기 위해서는 支配 方程式을 直角座標로 修正해야 한다.

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) &= \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \text{ 이므로} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} &= 2 \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

式 (5)의 差分式은,

$$2T_{i-1,j} + 2T_{i+1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1} - 6T_{i,j} = 0 \dots\dots\dots (6)$$

式 (1b)의 差分式은,

$$\frac{T_{i+1,j} - T_{i-1,j}}{2 \Delta r} = 0$$

$$\therefore T_{i+1,j} = T_{i-1,j} \dots\dots\dots (7)$$

式 (7)을 式 (6)에 代入하면,

$$4T_{i+1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1} - 6T_{i,j} = 0$$

$r = 0$  에서  $i = 0$

$$4T_{1,j} + T_{0,j-1} + T_{0,j+1} - 6T_{0,j} = 0 \dots\dots\dots (8)$$

式 (1c)의 差分式은,

$$\frac{T_{i,j+1} - T_{i,j-1}}{2 \Delta X} = 0$$

$$\therefore T_{i,j+1} = T_{i,j-1} \dots\dots\dots (9)$$

式 (9)를 式 (3)에 代入하면,

$$\left(1 - \frac{1}{2i}\right) T_{i-1,j} + \left(1 + \frac{1}{2i}\right) T_{i+1,j} + 2T_{i,j-1} - 4T_{i,j} = 0$$

$X = X_0$  에서  $j = N$

$$\left(1 - \frac{1}{2i}\right) T_{i-1,N} + \left(1 + \frac{1}{2i}\right) T_{i+1,N} + 2T_{i,N-1} - 4T_{i,N} = 0 \dots\dots\dots (10)$$

式 (1d)의 差分式은,

$$-K \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j-1}}{2 \Delta X} + hT_{i,j} = hT_\infty$$

$$\therefore T_{i,j-1} = T_{i,j+1} - \frac{2hl}{K} T_{i,j} + \frac{2hl}{K} T_\infty \dots\dots\dots (11)$$

式 (11)을 式 (3)에 代入하면,

$$\left(1 - \frac{1}{2i}\right) T_{i-1,j} + \left(1 + \frac{1}{2i}\right) T_{i+1,j} + 2T_{i,j+1} - \left(4 + \frac{2hl}{K}\right) T_{i,j} = -\frac{2hl}{K} T_\infty$$

$x = 0$ 에서  $j = 0$

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{2i}\right) T_{i-1,0} + \left(1 + \frac{1}{2i}\right) T_{i+1,0} + 2T_{i,1} - \left(4 + \frac{2h'l}{K}\right) T_{i,0} \\ & = -\frac{2h'l}{K} T_{\infty} \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

式 (11)을 式 (8)에 代入하면,

$$4T_{1,0} + 2T_{0,1} - \left(6 + \frac{2h'l}{K}\right) T_{0,0} = -\frac{2h'l}{K} T_{\infty} \dots\dots\dots (13)$$

Corner B, C(0, N)

式 (9)를 式 (8)에 代入하면,

$$4T_{1,N} + 2T_{0,N-1} - 6T_{0,N} = 0 \dots\dots\dots (14)$$

3. 有限要素法

① 支配 方程式

式 (1)로 부터

$$K \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right\} + Q = 0 \dots\dots\dots (15)$$

円筒座標를 直角座標로 바꾸기 위하여 양변에  $r$ 을 곱하면,

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + Kr \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + rQ = 0$$

여기서,  $k_r = kr$ ,  $Q_r = Qr$ ,  $q_r = qr$ ,  $h_r = hr$ 로 정의하면

式 (1) 및 境界條件은 直角座標로 나타낼 수 있다.



$$\therefore K_r \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + K_r \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Q_r = 0 \dots\dots\dots (16)$$

② 경계 조건

$$T = T(r, x) \text{ on } S_1$$

$$K_r \frac{\partial T}{\partial r} n_r + K_r \frac{\partial T}{\partial x} n_x + q_r = 0 \text{ on } S_2 \dots\dots\dots (17)$$

$$K_r \frac{\partial T}{\partial r} n_r + K_r \frac{\partial T}{\partial x} n_x + h_r(T - T_\infty) = 0 \text{ on } S_3$$

支配 方程式과 境界條件을 變分法(variation method)를 취하면

$$I = \iiint F(r, x, T, T_r, T_x) dV$$

Euler Lagrange eq.으로부터

$$\frac{\partial F}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial F}{\partial T_r} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial T_x} \right)$$

式 (16) 으로부터

$$\frac{\partial F}{\partial T} = -Q_r \text{ 이므로}$$

$$F = -Q_r T + f(T_r, T_x)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial F}{\partial T_r} \right) = K_r \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \text{ 이므로}$$

$$F = \frac{1}{2} k_r T_r^2 + f(T, T_x)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial T_x} \right) = K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \text{ 이므로}$$

$$F = \frac{1}{2} K_r T_x^2 + f(T, T_r)$$

式 (17) 으로부터

$$\frac{\partial F}{\partial T} = q \text{ 이므로 } F = qT + f(T_r, T_x)$$

$$\frac{\partial F}{\partial T} = h_r T \text{ 이므로}$$

$$F = \frac{1}{2} h_r T^2 + f(T_r, T_x)$$

$$\frac{\partial F}{\partial T} = -h_r T_\infty \text{ 이므로}$$

$$F = -h_r T T_\infty + f(T_r, T_x)$$

$$\begin{aligned} \therefore I(T) = & \iint \left\{ \frac{K_r}{2} \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 + \frac{K_x}{2} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 - Q_r T \right\} dV \\ & + \int_s \left( q_r T + \frac{1}{2} h_r T^2 - h_r T T_\infty \right) dS \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

요소내에서 未知函數인 온도 T는 다음과 같이 表示할 수 있다.

$$T^e(r, x) = \sum_{i=1}^3 N_i(r, x) T_i \dots\dots\dots (19)$$

式 (18)의 Functional I(T)의 最小化 條件은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial I(T^e)}{\partial T_i} &= 0 \\ \therefore \iint \left\{ K_r \frac{\partial T^e}{\partial r} \frac{\partial}{\partial T_i} \left( \frac{\partial T^e}{\partial r} \right) + K_x \frac{\partial T^e}{\partial x} \frac{\partial}{\partial T_i} \left( \frac{\partial T^e}{\partial x} \right) - Q_r \frac{\partial T^e}{\partial T_i} \right\} dV \\ &+ \int_s \left( q_r \frac{\partial T^e}{\partial T_i} + h_r T^e \frac{\partial T^e}{\partial T_i} - h_r T_\infty \frac{\partial T^e}{\partial T_i} \right) dS^e = 0 \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

式 (19)를 式 (20)에 代入하면,

$$\begin{aligned} \iint K_r \frac{\partial N_i}{\partial r} T_i \frac{\partial N_i}{\partial r} + K_x \frac{\partial N_j}{\partial x} T_i \frac{\partial N_j}{\partial x} - Q_r N_i dS + \int_s^e q_r N_i + h_r N_i T_i N_j - \\ h_r T_\infty N_i dS^e = 0 \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

여기서  $N_i$ 는 形狀函數로서 다음과 같다.

$$r = N_1 r_1 + N_2 r_2 + N_3 r_3$$

$$X = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3$$

$$N_1 + N_2 + N_3 = 1$$

이므로,

$$\therefore \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ r \\ x \end{bmatrix}$$

이다. 여기서,

$$a_1 = r_2 x_3 - r_3 x_2 \quad a_2 = r_3 x_1 - r_1 x_3 \quad a_3 = r_1 x_2 - r_2 x_1$$

$$b_1 = x_2 - x_3 \quad b_2 = x_3 - x_1 \quad b_3 = x_1 - x_2$$

$$c_1 = r_3 - r_2 \quad c_2 = r_1 - r_3 \quad c_3 = r_2 - r_1$$

$$2\Delta = \begin{bmatrix} 1 & r_1 & x_1 \\ 1 & r_2 & x_2 \\ 1 & r_3 & x_3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial r} = \frac{b_i}{2\Delta} \quad \frac{\partial N_j}{\partial r} = \frac{b_j}{2\Delta}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{c_i}{2\Delta} \quad \frac{\partial N_j}{\partial x} = \frac{c_j}{2\Delta}$$

式 (21)의 각항을 다음과 같이 定義하면,

$$\begin{aligned} \{K_T\}^e &= \iint \left\{ k_r \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r} + k_r \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right\} 2\pi \bar{r} \, dr \, dx \\ &= \iint \left\{ k_r \frac{b_i}{2\Delta} \frac{b_j}{2\Delta} + k_r \frac{c_i}{2\Delta} \frac{c_j}{2\Delta} \right\} 2\pi \bar{r} \, dr \, dX \\ &= \frac{1}{4\Delta^2} \left\{ b_i b_j \iint \bar{r} K \, 2\pi \bar{r} \, dr \, dX + c_i c_j \iint \bar{r} K \, 2\pi \bar{r} \, dr \, dX \right\} \\ &= \frac{2\pi \bar{r}^2 K}{4\Delta} (b_i b_j + c_i c_j) \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

$$\{Q\}^e = \iint Q_r N_i 2\pi r \, dr \, dX$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2\pi\bar{r}Q}{2\Delta} \iint (a_i r dr dx + b_i r^2 dr dx + c_i r x dr dx) \\
 &= \bar{r}Q\pi [a_i \bar{r} + b_i \bar{r}^2 + \frac{b_i}{12} (r_1'^2 + r_2'^2 + r_3'^2) + c_i \bar{r}\bar{x} \\
 &\quad + \frac{c_i}{12} (r_1' x_1' + r_2' x_2' + r_3' x_3')] \dots\dots\dots 23
 \end{aligned}$$

여기서,

$$\begin{aligned}
 r_i' &= r_i - \bar{r} \\
 x_i' &= x_i - x \\
 x &= \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)
 \end{aligned}$$

Natural Coordinate (Length Coordinate)에서,

$$\begin{aligned}
 \int_{l_1}^{l_2} N_1^\alpha N_2^\beta dl &= \frac{\alpha! \beta!}{(\alpha + \beta + 1)!} dl \\
 \int_{l_1}^{l_2} N_i dl &= \int N_1' N_2^0 dl = \frac{l_{ij}}{2} \text{ 이므로} \\
 \{q\}^e &= \int_{s} q_r N_i dS = \int_{l_i}^{l_j} q N_i 2\pi \bar{r}_{ij} dl \\
 &= 2\pi \bar{r}_{ij} q \int_{l_i}^{l_j} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= 2\pi \bar{r}_{ij} q l_{ij} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots 24
 \end{aligned}$$

여기서,

$$\begin{aligned}
 \bar{r}_{ij} &= \frac{1}{2} (r_i + r_j) \\
 l_{ij} &= l_j - l_i \\
 [K_k]^e &= \int_{s} h_r N_i N_j dS = hr \int_{l_i}^{l_j} \begin{bmatrix} N_1^2 & N_1 N_2 & 0 \\ N_2 N_1 & N_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} l_{ij}
 \end{aligned}$$

$$= 2\pi\bar{r}_{ij}h l_{ij} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (25)$$

$$\begin{aligned} \{q_{T\infty}\}^e &= \int_s h_r T_\infty N_i dS = h_r T_\infty \int_{l_i}^{l_j} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ 0 \end{bmatrix} l_{ij} \\ &= 2\pi\bar{r}_{ij}h T_\infty l_{ij} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

그러므로 式 (21)은,

$$\{k_T\}^e \{T\}^e - \{Q\}^e + \{q\} + [k_h]^e \{T\}^e - \{q_{T\infty}\}^e = 0 \dots\dots\dots (27)$$

$$[k_T^*] \{T\} = \{RHS\} \dots\dots\dots (27)$$

여기서,

$$[k_T^*] = [k_T] + [k_h]$$

$$\{RHS\} = \{Q\} - \{q\} + \{q_{T\infty}\}$$

[T] [RHS]를 既知數, [T]<sup>k</sup>와 未知數, [T]<sup>u</sup> 및 기지수 [RHS]<sup>k</sup>와 [RHS]<sup>u</sup> Partition 하면 式 (28)은,

$$\begin{bmatrix} [k_T^*]_{11} & [k_T^*]_{12} \\ [k_T^*]_{21} & [k_T^*]_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [T]^u \\ [T]^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{RHS\}^k \\ \{RHS\}^u \end{bmatrix} \dots\dots\dots (29)$$

式 (29)로부터

$$[k_T^*]_{11} \{T\}^u = \{RHS\}^k - [k_T^*]_{12} \{T\}^k$$

$$\{T\}^u = [k_T^*]_{11}^{-1} [\{RHS\}^k - [k_T^*]_{12} \{T\}^k] \dots\dots\dots (30)$$

$$\{RHS\}^u = [k_T^*]_{21} \{T\}^u + [k_T^*]_{22} \{T\}^k \dots\dots\dots (31)$$

#### 4. 數值 計算

터어빈 디스크의 반경/두께 比의 變化에 대한 온도 분포를 求하기 위하여 有限差分法에서는 두께 方向으로는 3개의 節點을 固定하고 반경 方向으로 節點의 수를 變更할 수 있도록 컴퓨터 프로그램하여 Gauss's Jourdan 方法에 의해 解를 구하였다. 有限要素法에서는 3각형 유한 요소를 使用하였으며 規則節點 間隔(regular nodal distance)으로서 두께 方向으로는 3개 및 5개의 節點으로 固定하고 반경 方向으로 節點의 數를 變更할 수 있도록 하였다. 터어빈 디스크에서의 熱流速은 軸對稱이므로 반경 方向의 節點간의 온도차를 求하여 節點間隔으로 나누고 이 溫度勾配에 熱傳導 係數를 곱하여 計算하였다. 따라서, 터어빈 디스크 두께 方向의 열유속은 각 節點에서의 熱流速의 差異가 됨으로 각 節點에서의 반경 方向의 열유속의 差異를 求하여 그 節點에서의 두께 方向의 熱流速으로 하고, 최적반경/두께 比는 두께 方向의 열유속이 零이 되는 節點 즉, 반경 方向의 溫度勾配가 零이 되는 節點까지 節點의 수를 두께 方向의 節點의 數로 나누었다. 터어빈 깃에서는 溫度分布는 지배 방정식 및 境界條件을 고려하여 精密解(exact solution)를 求하고 터어빈 디스크와 같은 節點 間격에서의 온도를 구하고 節點의 數는 터어빈 디스크의 1/4로 하였다.

컴퓨터 入力資料는 다음과 같이 假定하였다.

터어빈 디스크 외경에서의 溫度  $T_0 = 650 \text{ }^\circ\text{C}$ , 冷却空氣 溫度  $T_\infty = 93 \text{ }^\circ\text{C}$ , 熱傳達 係數  $h = 97.6 \text{ Kcal/hrm}^2 \text{ }^\circ\text{K}$ , 熱傳導 係數  $K = 19.3 \text{ Kcal/hrm}^2 \text{ }^\circ\text{K}$ .

### Ⅲ. 結果 및 考察

#### 1. 터어빈 디스크의 溫度分布

터어빈 디스크에서의 온도 분포는 Fig. 2와 같이 터어빈 디스크의 外徑에서 加熱되고 디스크의 側面에서 冷却되므로, 외경에서 가장 높으며 半徑이 감소할 수록 減少하게 된다. 또한, Fig. 2에서 보는 바와 같이 디스크의 半徑(R)과 두께(t)의 比에 따라서도 달라지게 된다. 반경에 비해 두께가 크면 디스크 外徑에서의 加熱 熱流速이 많은데 비하여 디스크 側面에서의 冷却 熱流速은 적어 디스크가 충분히 冷却되지 못하고 Fig. 2와 같이 디스크 中心에서의 溫度도 높게 나타나며 두께에 비해 半徑을 점점 增加시키면 즉, 반경/두께 比를 增加시키면 터어빈 中心에서는 충분히 冷却되어 周圍의 冷却 공기 온도와 같은 온도를 나타내게 된다. Fig. 2는 有限差分法에 의해 구한 반경 比의 變化에 대한 平均溫度的 變化를 나타낸 것이며 Fig. 3은 有限要素法에 의해 구한 半徑比의 變化에 대한 平均溫度的 變化를 나타낸 것이다.

Fig. 2와 Fig. 3을 比較하면 溫度分布의 傾向은 비슷하나 Fig. 2가 Fig. 3에 비하여 약

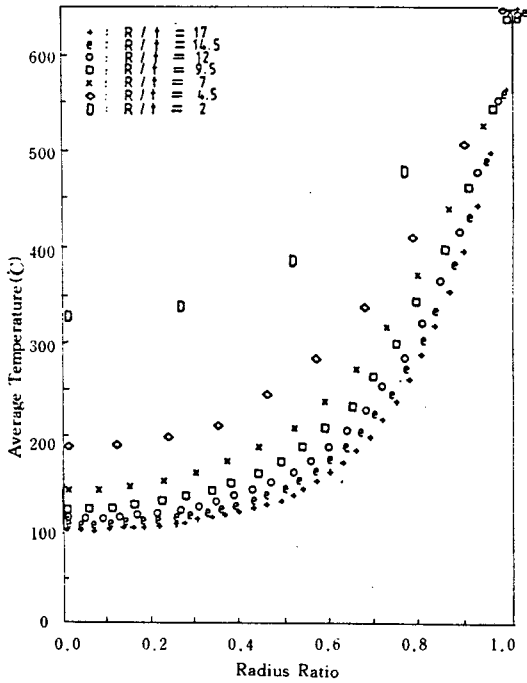


Fig. 2. Temperature vs Radius ratio by FDM.

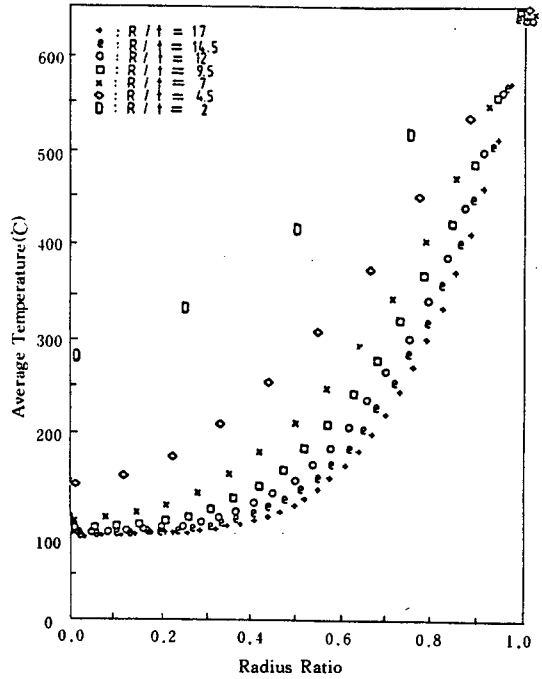


Fig. 3. Temperature vs Radius ratio by FEM.

간 높게 나타났다. 이것은 有限差分法에서는 上界 값(upper bound limit)을 가지며 有限要素法에서는 下界 값(lower bound limit)을 가지기 때문이다. 이 誤差는 中心에서 가장 크며 半徑 / 두께 比가 클수록 적어지게 된다. 이것은 전절의 數直計算에서 設명한 바와 같이 半徑 / 두께 比가 커지면 節點의 數가 增加하고 따라서, truncation error가 感少하기 때문이다. Fig. 4는 半徑 / 두께 比가 17일 때의 半徑比의 變化에 대한 터어빈 디스크의 側面 表面溫度 및 평균 온도를 有限差分法과 有限要素法の 結果로서 比較한 것이다. 여기에서도 마찬가지로 有限差分法에서는 上界 값을 나타내며 有限要素法에서는 下界 값을 나타내고 있다. 有限差分法과 有限要素法에 의한 解의 差異는 중심에서 가장 크고, 약 7°C정도이며, 정밀해와 差異 즉, 誤差는 그 이하 일것으로 恩料된다. 또한, 디스크 半徑비에서의 平均溫度와 表面溫度의 差 즉, 두께 방향의 溫度勾配는 중심에서는 거의 零에 가까우며 外徑으로 갈수록 커짐을 보여준다. 또한, 半徑 방향에 대한 溫度勾配도 중심 부근에서는 거의 零으로서 冷却空氣의 溫度와 같음을 보여준다. 따라서, 대부분의 熱量이 外徑 부근에서 冷却됨을 알 수 있다.

2. 터어빈 깃의 溫度分布

Fig. 5는 燃燒 氣의 온도가 700°C, 800°C, 900°C일 때의 터어빈 깃의 길이 방향에 대한

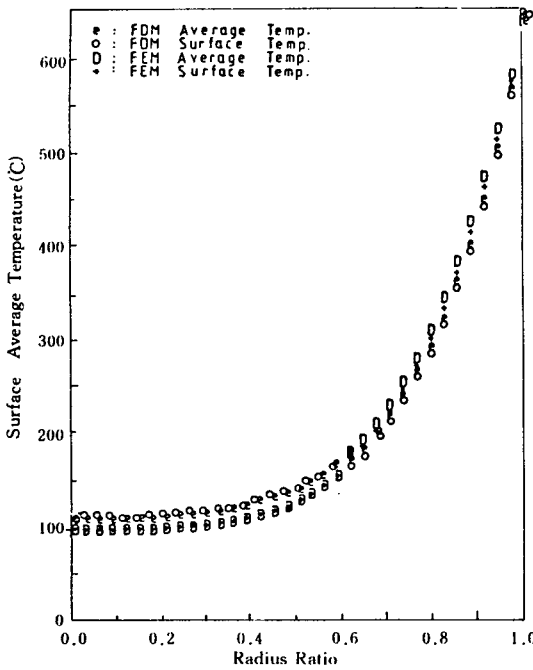


Fig. 4. Surface Average Temperature vs Radius ratio at  $R/t = 17$ .

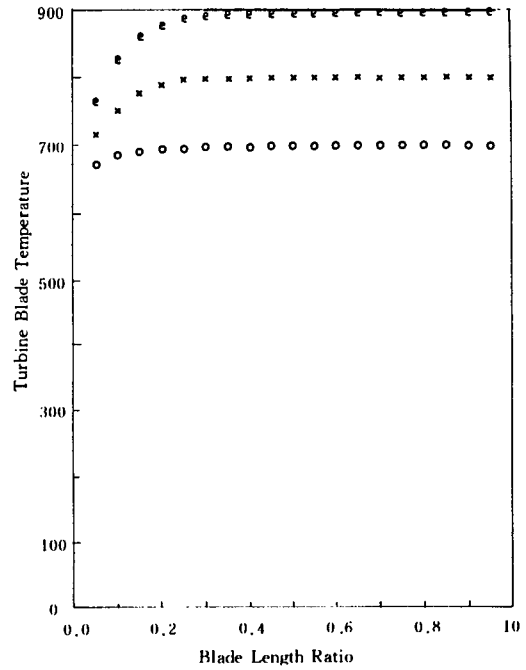


Fig. 5. Turbine Blade Temperature vs Blade Length Ratio at Heat Transfer Coefficient  $600 \text{ Kcal/hrm}^2 \cdot \text{K}$ .

溫度分布를 나타낸다. 터빈 깃은 燃燒 氣에 의해 터빈 깃 表面으로부터 加熱되고 터빈 깃 뿌리를 통해 터빈 디스크로 冷却된다. 따라서, 터빈 디스크와 가까운 깃 뿌리 부근에서는 터빈 깃 끝에서 보다 溫度가 낮게 나타나며 터빈 깃 뿌리에서는 터빈 디스크 外徑에서의 溫度와 같은  $650\text{C}$ 를 나타낸다.

Fig. 6은 위에서와 같은 條件에서 터빈 디스크 중심에서 터빈 깃 끝까지의 溫度分布를 나타낸 것이다. 터빈 디스크의 반경 / 두께 比는 23이며 터빈 깃의 길이는 半徑의  $1/4$ 이다. 이 경우 터빈 디스크 중심에서 溫度가 가장 낮고 터빈 깃 끝에서 가장 높다. 디스크 중심 부근에서는 온도가 冷却空氣의 온도와 같으며 半徑方向으로 溫度勾配가 없음을 보여준다. 또한 터빈 깃 끝 부근에서는 溫度가 燃燒 氣의 온도와 같음을 보여준다.

### 3. 터빈 디스크의 熱流速

Fig. 7은 半徑 / 두께 比가 23인 경우 반경비에 대한 溫度分布를 나타낸다. 디스크의 外徑에서는 터빈 깃 뿌리의 온도와 같은  $650\text{C}$ 를 나타내며 디스크 중심 부근에서는 冷却空氣의 溫度와 같은  $93\text{C}$ 를 나타내며 半徑比 0.4까지 거의 溫度勾配가 없음을 보여준다.



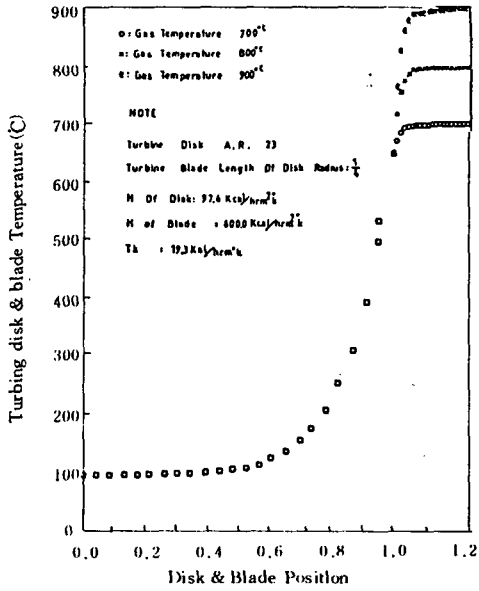


Fig. 6. Turbine Disk & Blde Temperature vs Disk & Blde Position.

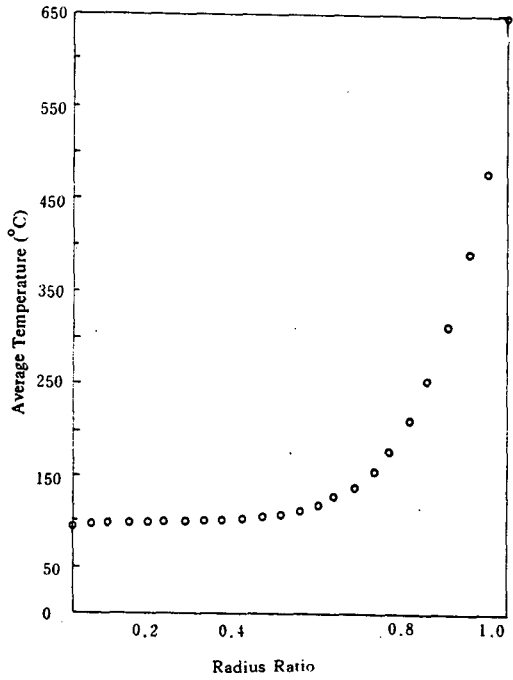


Fig. 7. Average Temperature vs Radius Ratio, at Aspect Ratio 23.

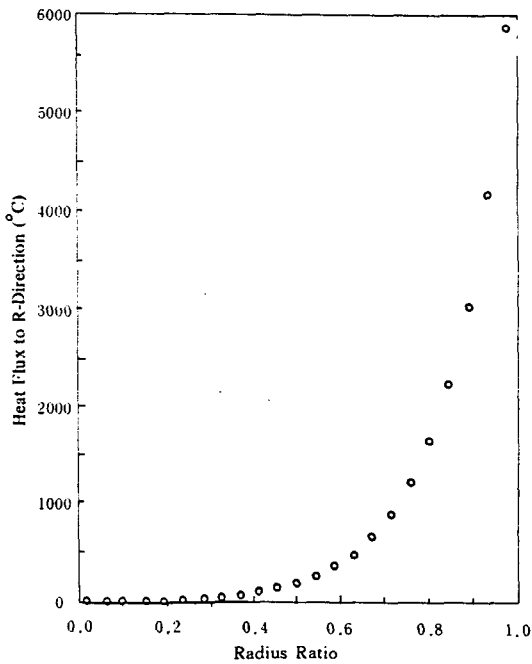


Fig. 8. Heat Flux to R-Direction vs Radius Ratio at Aspect Ratio 23.

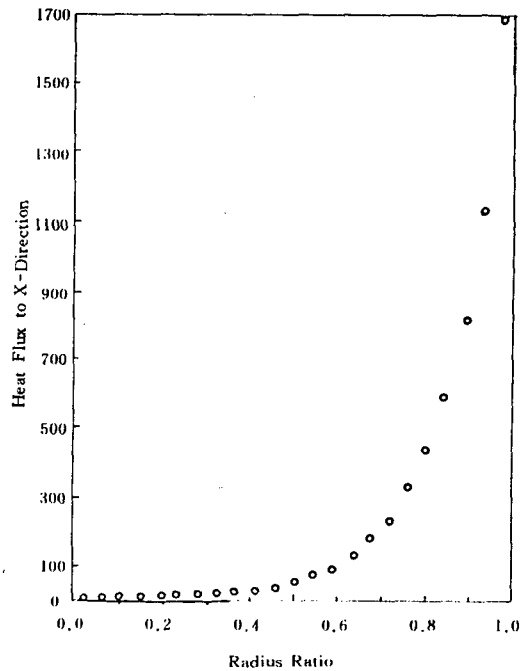


Fig. 9. Heat Flux to X-Direction vs Radius Ratio at Aspect Ratio 23.

Fig. 8은 위와 같은 경우의 半徑方向에 대한 熱流速을 나타낸다. 디스크의 外徑 근처에서는 약 6000Kcal/hr.m 程度의 熱流速이 있으며 0.4이하에서는 熱流速이 거의 없음을 보여준다. Fig. 7에서의 溫度分布와 比較할때 合當한 結果임을 보여준다.

Fig. 9는 위와 같은 경우의 디스크 두께 방향에 대한 熱流速을 나타낸 것이다. 두께 방향의 熱流速은 軸對稱이므로 円周方向의 溫度勾配는 없으므로 各半徑에서의 半径 방향의 열유속의 差異로서 計算하였다. Fig. 9에서 보는 바와 같이 디스크의 外徑 근처에서 약 1700Kcal/hr.m 程度의 열유속이 있으며 半径비 0.4이하에서는 거의 없음을 보여준다. Fig. 8과 比較할때 合當한 結果임을 알 수 있다. 터빈 디스크의 冷却은 대부분 外徑 부근에서 일어나며 半徑比 0.4 이하에서는 冷却效果가 없음을 알 수 있다. 따라서 터빈 冷却의 側面에서는 半径비 0.4 이하의 材質은 不必要한 部分이다.

#### 4. 材料의 熱傳導率과 最適半徑 / 두께比

Fig. 9에서는 半徑比가 0.4 이하에서는 冷却效果가 거의 없음을 알 수 있다. 터빈 디스크의 設計에 必要한 資料를 提供하기 위하여 터빈 디스크의 중심 부근에서 最小限의 냉각 열유속이 있는 最適의 半径 / 두께 比를 有限差分法에 의해 求하였다. 最適半徑 / 두께 比는 터빈 디스크의 材料에 따라 달라진다.

Fig. 10은 材料의 熱傳導率에 대한 最適半径 / 두께 比를 나타낸 것이다. 열전도율이 增加함에 따라 最適半径 / 두께 比가 線形的으로 增加함을 알 수 있다. Fig. 10으로부터 材料의 熱傳導率과 最適半径 / 두께 比는 다음과 같은 關係가 있음을 알 수 있다.

$$AR = 0.4K + 4$$

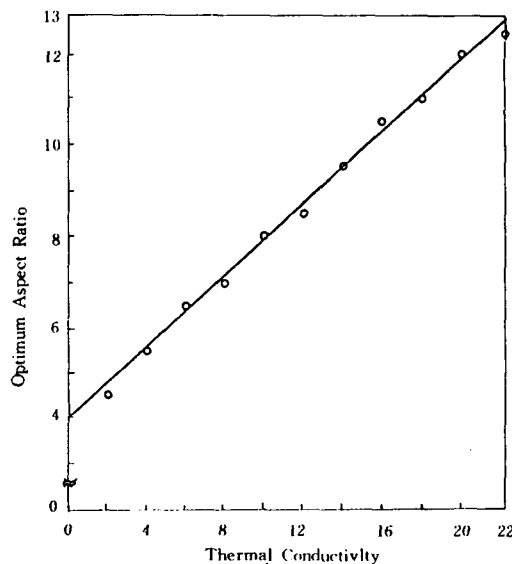


Fig. 10. Thermal Conductivity vs Optimum Aspect Ratio.