

3 체 문제와 연성계의 형성

朴 載 雨, 崔 圭 弘

연세대 천문기상학과

趙 慶 哲

경희대 우주과학과

(1985년 5월 30일 받음)

Three Body Problem and Formation of Binary System*

Jae Woo Park and Kyu Hong Choi

Department of Astronomy & Meteorology, Yonsei University

and

Kyong Chol Chou

Department of Space Science, Kyung Hee University

(Received May 30, 1985)

요 약

3 체 문제에 있어서 Newtonian 운동방정식의 특이점은 수치적분에 의한 특수해를 구하는 과정에서 정확도를 떨어뜨리고 computer 사용시간을 증가시킨다. 이러한 특이점은 Newtonian 운동방정식의 독립변수와 좌표축을 변환하는 정칙화(regularization) 과정을 통해 제거할 수 있다.

이 논문에서는 정칙화된 Newtonian 운동방정식을 5th-order Runge-Kutta 방법으로 특수해를 구하기 위해 BASIC언어로 작성한 computer program으로 적절한 초기위치와 초기속도를 가정하여 시간에 따른 3체의 위치와 속도를 계산하였다.

그 결과, 이러한 3중성계의 진화는 결국 분열되어 3체 중 1개는 쌍곡선 궤도를 그리면서

* Yonsei University Observatory Contribution No. 33.

계를 탈출하고 나머지 2개는 연성계를 형성하게 되었다. 이는 연성계의 기원을 설명할 수 있는 하나의 방법이 되지 않을까 생각된다.

ABSTRACT

The singularities of differential Newtonian equation of motion in three body problem cause the loss of accuracy and the considerable increase of the computer time. These singularities could be eliminated during the process of regularization to transform the independent variables and the coordinate of Newtonian equations of motion.

In this study, we calculated the positions and velocities of three body along the time scale to find out the unique solution of regularized Newtonian equations of motion with the 5th order Runge-Kutta method by assuming the suitable initial velocities and positions.

As the results of these calculations it is shown that the triple stellar system eventually distintegrated, two of them formed a binary, and the last one escaped from this system with a hyperbolic orbit. This may suggest one possible explanation for the binary formation.

I. 서 론

연성계의 기원에 대한 문제는 약 100여 년 동안 많은 천문학자들에 의해 연구되어 왔으나 모든 system의 기원에 대한 연구에서와 마찬가지로 관측자료가 부족하고 관측 불가능면이 있으며, 그리고 연성의 system이 상당히 다양하기 때문에 이를 한꺼번에 설명할 수 있는 한가지의 정설이 현재에도 없는 실정이다. 다만, Batten(1967, 1973)은 연성계의 기원에 대한 가설들을 네 가지로 분류, 정리한 바 있는데 그 중에는 다음과 같은 가설이 있다. 즉, 중력적으로 불안정 상태의 모임(association)으로 인해 별들이 그 계에서 탈출하는 과정을 계속할 때 탈출하는 별들은 계에서 에너지를 빼앗아 가며, 달아나지 않고 남아있는 별들은 결국에는 연성계를 형성한다는 것이다. 이는 van Albada(Batten 1967)에 의해 처음으로 주창된 이래 Szebehely(1967)는 모임이 3체인 경우에 대해 이와 비슷한 가설을 조사하였고 Harrington(1975)은 3체와 5체로 이루어진 각각의 계의 안정도를 수치해석적으로 조사하여 연성계, 3중성계 그리고 4중성계의 비율을 이론적으로 얻어냈다.

이러한 가설에 대한 모델 계산은 천체역학적인 문제이기 때문에 Newton의 운동방정식을 이용해야만 한다. 그런데, Newton의 미분방정식을 이용한 3체 문제 이상에서는 일반해를 구할 수 없기 때문에 수치적분에 의한 특수해를 구하여 시간에 따라서 변화하는 물체의 위치와

속도를 알아볼 수밖에 없다. 또한, 임의의 두 물체가 가까워지면 Newton의 운동방정식은 특이점을 갖게 된다. 그래서 특이점을 없애기 위하여 Levi-Civita(1903)의 2차원상에서 독립변수의 변환과 좌표축의 변환을 사용하여 Sundman(1912)은 2체 문제의 정착화(regularization)를 처음 시도하였다. 이를 Szebehely(1971)은 3체 이상의 n체 문제로 확장하여 정리하였다.

그래서, 이 논문에서는 Newton의 정착화된 운동방정식을 이용하여 Szebehely와 Peter(1967)의 model에 여러 가지 다른 초기조건으로 연성계의 형성과 진화를 전반적으로 살펴보고자 한다.

II. 기본방정식

잘 알려진 Newton의 운동방정식을 3체 문제에 적용시키면 다음과 같다.

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = -G m_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 m_j \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{r_{ij}^3}, \quad (i = 1, 2, 3) \dots\dots\dots (1)$$

여기서 \mathbf{r}_i 는 m_i 의 질량을 가진 물체의 위치벡터이다. 그리고, virial 정리를 $T = -\frac{n}{2} V$ (Harwit 1973)로 정의하면 총 에너지를 C라고 할 때

$$C = -V \left(1 - \frac{n}{2} \right) \dots\dots\dots (2)$$

가 된다. 이때 V를 위치에너지, T를 운동에너지라 하면 virial 계수는 n으로서 정의된다. 질량 m_i 인 물체의 위치벡터를 \mathbf{r}_i 라 하면 그 계의 관성모멘트는

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

로 정의되며 이를 질량중심에 대한 식으로 바꾸면

$$I = \frac{1}{M} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n m_i m_j r_{ij}^2 \dots\dots\dots (3)$$

가 된다. 이때 M 은 그 계의 질량의 합이다. 또한, 3체 문제에서의 potential function을

$$V = V_0 + R$$

로 정의할 수 있다 (Roy, 1978). 이때 V_0 는 2체 문제에서 정의되는 potential function이고 R 은 2체를 제외한 다른 인력체들에 의한 potential function이다. R 을 perturbative function이라고도 하는데 이를 사용하여 (1)식의 기본방정식을 변형하면

$$\begin{aligned} r_{k1} + G (m_k + m_1) \frac{r_{k1}}{r_{k1}^3} &= G \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k, 1}}^3 m_i \left(\frac{r_{1i}}{r_{1i}^3} - \frac{r_{k1}}{r_{k1}^3} \right) \\ &= \sum_{i=1}^3 m_i \nabla_{k1} R_{k1i} \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

이 된다. (4)식에서 세 물체 중 두 물체 $k, 1$ 이 아주 가깝게 접근하면 $r_{k1} = R = |r_k - r_1|$ 은 0에 접근한다. 이때 $r_{k1} = 0$ 인 점에서 속도와 가속도는 무한대로 증가하며 (4)식의 미분방정식은 특이점을 갖게된다. 이러한 특이점은 수치적분에 의한 미분방정식의 해를 구하는데 상당한 문제점을 일으키기 때문에 (4)식은 특이점이 제거된 미분방정식으로 변환하는 정칙화(regularization)의 과정을 겪어야만 한다. 3체 문제의 Newton 운동방정식에 대한 정칙화된 미분방정식을 얻으려면 두 가지의 단계를 거쳐야 한다. 우선 독립변수의 변환을 사용해서 정칙화된 함수(regular function)를 구하여야 한다. 독립변수 시간 t 대신에 새로운 독립변수를 위해 Sundman(1912)의 변환을 사용하면

$$dt = r ds \dots\dots\dots (5)$$

가 되며 여기서 s 는 새로운 독립변수이다. (4)식을 새로운 독립변수에 관한 미분방정식으로 바꾸면

$$r'' = -G (m_k + m_1) \frac{r}{r} + r^2 P + \frac{r' r'}{r} \dots\dots\dots (6)$$

과 같은 정칙화된 함수를 얻을 수 있다. 이때 prime은 s 에 대한 미분을 가리키며, (4)식에서 오른쪽 항을 P 로 나타내었다.

다음 단계로 (6)식을 좌표축의 변환을 통해 정칙화된 미분방정식을 얻어야만 한다. 이때 Levi-Civita(1903)의 좌표축의 변환은

$$\mathbf{r} = \mathbf{L}(\mathbf{u}) \mathbf{u} \dots\dots\dots (7)$$

과 같이 나타나며 $\mathbf{L}(\mathbf{u})$ 는 $\mathbf{L}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix}$ 으로 표시되는 Levi-Civita 행렬이다. (7)식과 같은 관계를 가진 새롭게 선택된 좌표공간으로 (6)식을 변환하면

$$\mathbf{u}'' - \frac{h}{2} \mathbf{u} = \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})}{2} \mathbf{L}^T(\mathbf{u}) \mathbf{P} \dots\dots\dots (8)$$

로 바뀌어 질 수 있으며 (8)식은 특이점을 포함하고 있지 않는 정칙화된 미분방정식이 된다. 여기서 $\mathbf{L}^T(\mathbf{u})$ 는 $\mathbf{L}(\mathbf{u})$ 의 역행렬이며 h 는 세 물체 중 두 물체 $k, 1$ 만을 생각해 볼 때 단위 질량당 결속 에너지를 가리킨다.

$$h = \frac{\dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{R}}}{2} - \frac{(m_k + m_1)}{R} \dots\dots\dots (9)$$

물론 (9)식의 h 는 특이점을 포함하고 있으므로 수치적분을 할 때에는

$$h' = 2 (\mathbf{L}(\mathbf{u}) \mathbf{u}' \cdot \mathbf{P}) \dots\dots\dots (10)$$

를 사용한다.

III. 수치적분의 방법

연성계가 되기까지 많은 시간동안 진화를 겪는 경우에는 4th-order Runge-Kutta 방법은 오차의 누적 때문에 부적당하다. 적분구간을 Δt (대체로 $\Delta t=0.1 \sim 0.01$)라 하면 4th-order Runge-Kutta 방법은 오차가 $(\Delta t)^5$ 에 비례하지만 5th-order Runge-Kutta 방법은 $(\Delta t)^6$ 에 따른다. 그래서, 이 논문에서는 미분방정식의 수치적분의 해를 5th-order Runge-Kutta 방법을 사용하여 구하였으며 HP 9826 S에 맞는 BASIC program을 작성하였다.

5th-order Runge-Kutta 방법은 Fehlberg(1968)에서 인용하였다. 수치적분하는 도중 원하는 오차범위(이 계산에서는 10^{-7}) 안에서 총 에너지의 변화량 ΔE 를 검사하며 거부 당할 때는 step-size는 반감되고 그렇지 않을 때는 다시 두배로 증가하게 된다. 그러나 초기 step-size 0.01를 넘지 아니한다.

IV. Model 과 계산결과

1) 가 정

초기 위치는 길이의 비가 $1:2:\sqrt{5}$ 인 직각삼각형과 $1:1:1$ 인 정삼각형의 형태에서 출발한다. 질량비는 직각삼각형인 경우는 $1:2:\sqrt{5}$ 이고 정삼각형인 경우는 $1:2:3$ 으로 가정하였다. 중력상수 $G=1$ 라 가정하고 초기속도는 virial 계수가 1 일 때와, 총각운동량이 0 이고 m_1 과 m_3 의 각각의 선형운동량이 1 일 때의 두 가지 경우를 가정하여 구했다. 자세한 값은 표 I 에 보였다.

모든 경우에 총 에너지는 음의 값을 갖게 된다. 그림 1 은 초기위치와 초기속도의 방향을 표시한 것이다. 계산상의 편리와 진화형태를 설명하는 데 혼동을 피하기 위해 그림 1-A 에서 m_1 의 속도의 방향이 양의 방향인 것을 case 1이라 하고 음의 방향인 것을 case 2, 그림 1-B 를 case 3, 그리고 그림 1-C 인 경우를 case 4 라 각각 명명하였다.

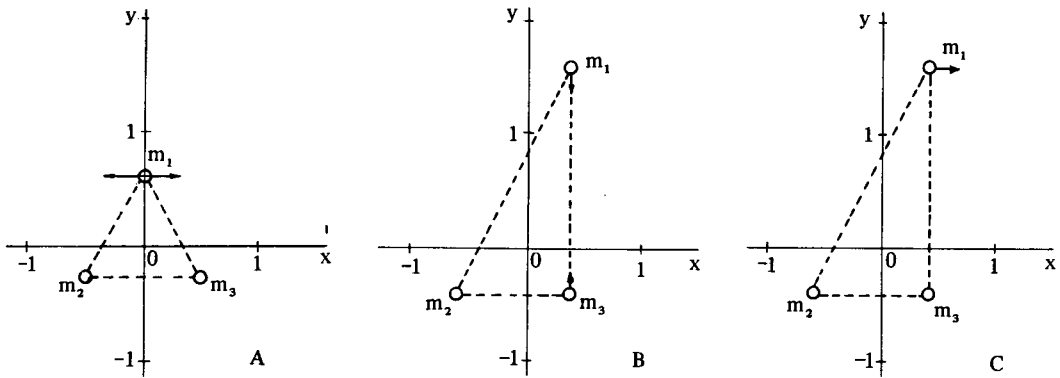


Fig. 1. Initial condition and direction of velocity

2) 단 위

원래의 운동방정식에서 독립변수로 사용된 시간 t 의 단위는 Szebehely(1967)와 동일하게 사용하였다.

$$T^2 GM/L^3 = 1$$

Table I. Initial velocity in the each case

	초 기 속 도		
case 1	$V_1 (+\sqrt{11}, 0)$	$V_2 (0, 0)$	$V_3 (0, 0)$
case 2	$V_1 (-\sqrt{11}, 0)$	$V_2 (0, 0)$	$V_3 (0, 0)$
case 3	$V_1 (0, -1)$	$V_2 (0, 0)$	$V_3 (0, 1/5)$
case 4	$V_1 (\sqrt{6.5}, 0)$	$V_2 (0, 0)$	$V_3 (0, 0)$

여기서 T, L과 M은 각각 시간, 길이 그리고 질량의 단위이며 중력상수 G는 1이라는 무명수의 단위를 사용하여, 계산할 때 편리하게 하였다. 만약에 길이의 단위인 L가 파아섹(pc)이고 질량의 단위가 태양의 질량 ($2 \times 10^{33} g$)을 사용하면 단위시간($t=1$)은 실제로 약 1.43×10^7 년에 해당되며 단위속도($V=1$)은 $6.52 \times 10^{-2} km sec^{-1}$ 에 해당된다. 또 길이의 단위가 천문단위(AU), 태양의 질량을 단위 질량으로 생각할 때는 약 58.21일의 단위시간과 약 $29.82 km sec^{-1}$ 의 단위속도를 갖게 된다.

3) 계산결과

case 1. 일단 m_1 의 섭동에 의해 정지하고 있었던 m_2 와 m_3 가 움직이기 시작한다. $t=0.48$ 에서 m_2 와 m_3 는 처음으로 close approach를 갖게 된다. 그리고, $t=0.99$ 가 되면 m_2 와 m_3 는 가장 멀리 위치하고 $t \sim 2.0$ 에서 m_1 이 계에서 탈출할 때 m_2 와 m_3 는 연성계 형태의 주기적인 운동을 계속한다. 그림 2가 case 1에서의 진화의 모습을 보여주며 작은 글씨의 숫자는 그 위치에 왔을 때까지 걸린 시간을 나타낸다.

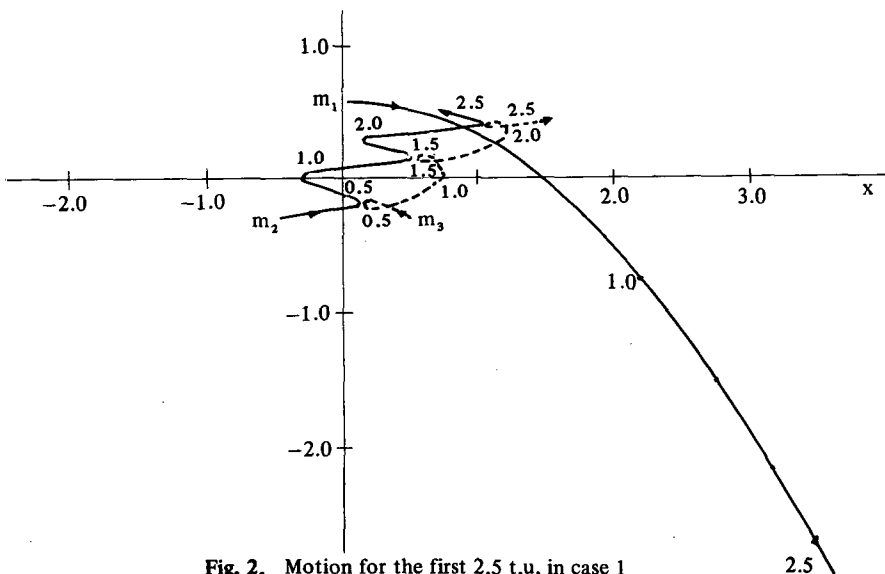


Fig. 2. Motion for the first 2.5 t.u. in case 1

case 2. case 1 과 비슷한 초기조건에서 출발하기 때문에 형성되는 연성계의 형태는 비슷하나 m_1 의 초기속도가 case 1 과 반대방향이고 정삼각형의 꼭지점에 위치한 물체의 질량분포가 비대칭이어서 시간에 따른 거리의 변화가 case 1 과는 차이를 보인다. 시간이 지남에 따라 연성계의 주기도 점점 감소한다. 이러한 주기의 변화도 case 1 과는 차이를 보이는데 case 1 보다는 좀 완만하게 감소한다.

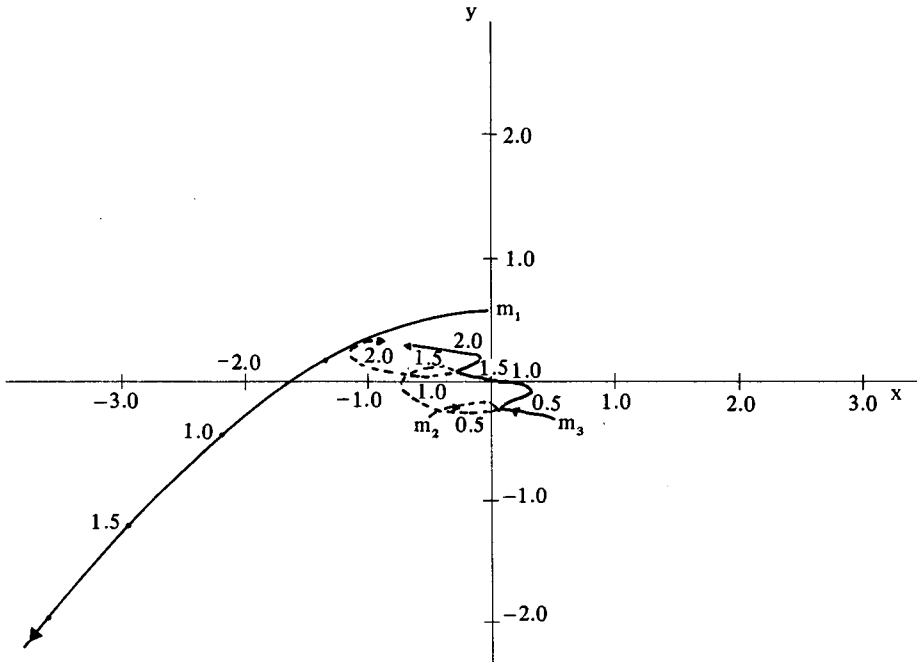


Fig. 3. Motion for the first 2 t.u. in case 2

case 3. 이 경우의 초기조건은 virial 계수가 0.22에서부터 출발하기 때문에 m_1 은 처음부터 쌍곡선 형태의 궤도에 따라 움직이기 시작한다. 이때 m_2 와 m_3 는 $t = 0.56$ 일 때 0.0032 의 거리를 두고 가까워졌다가 다시 멀어지면서 m_3 가 m_1 과 $t = 0.88$ 에서 약 0.1315 의 거리까지 가까워진다. 이러한 m_1 과 m_3 의 close approach는 후에 연성계를 이룰 m_2 와 m_3 에 대한 강한 섭동을 의미한다. 표 II에서 case 3에서의 최대속도 - 대체로 여러번의 close approach중 가장 가까워졌을때 그 case에서 최대속도를 갖게 된다-는 case 4에서의 최대속도의 약 0.13 배 정도밖에 되지 않는다는 사실은 m_1 에 의한 강한 섭동을 입증해주며 두 물체 (m_2 와 m_3) 의 결속에너지의 변화를 살펴보면 더 확실해진다.

m_1 이 $t \sim 3.0$ 에서 연성계의 진행방향과 정반대의 방향으로 계를 탈출하기 까지 m_2 와 m_3 는 5 번의 close approach를 더 갖게 된다.

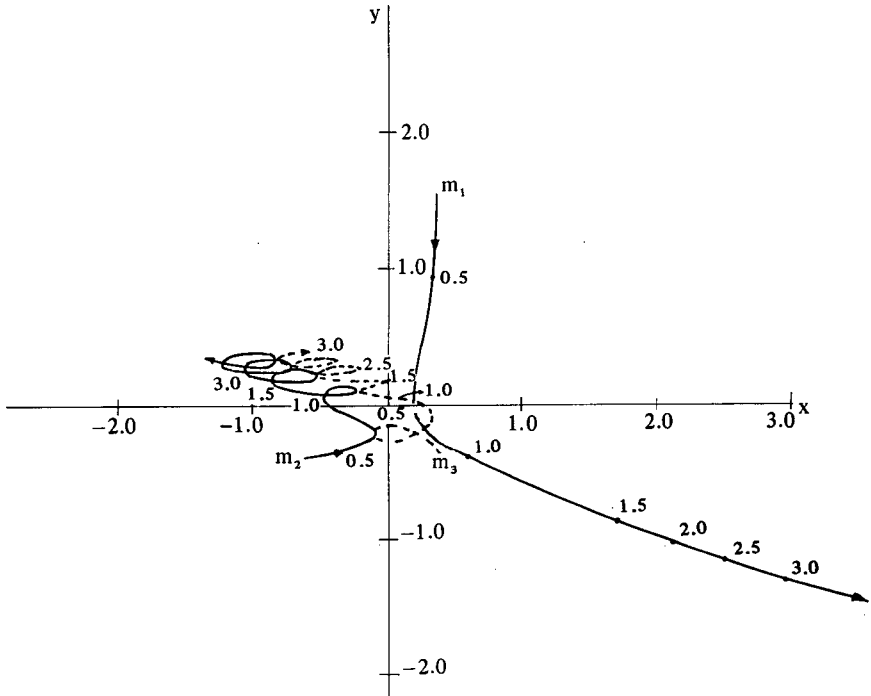


Fig. 4. Motion for the first 3 t.u. in case 4

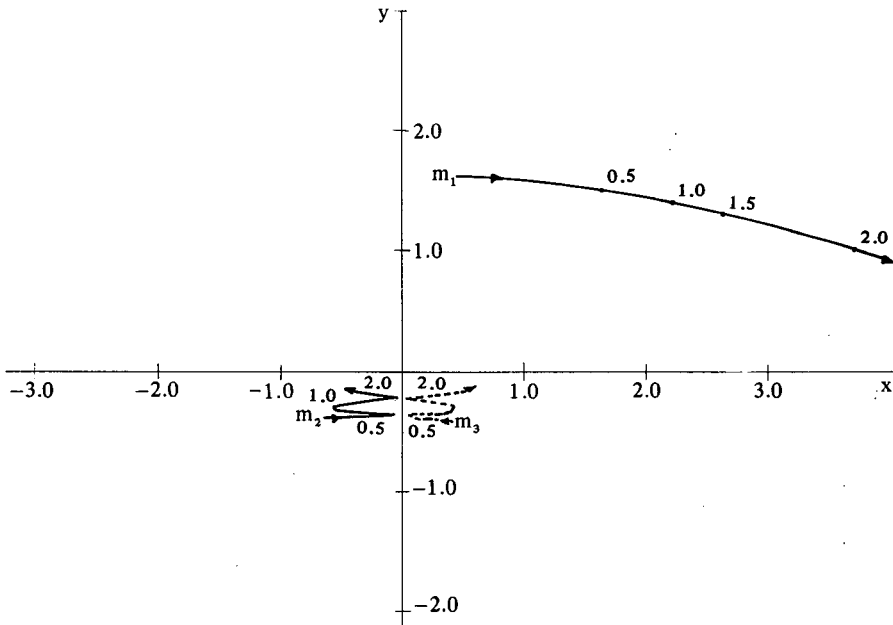


Fig. 5. Motion for the first 2 t.u. in case 4.

case 4. m_1 이 가진 초기속도가 비교적 크고 m_1 과, m_2 와 m_3 의 질량중심과의 거리가 약 2.07 단위질을 가짐으로서 다른 case 보다 m_1 에 의한 섭동력이 약하다. 그래서, 그림 5에서 볼 수 있듯이 형성된 연성계가 장반경이 비교적 큰 system을 이루게 된다.

이제까지의 결과들을 표 II에 요약하였다. 대체로 가장 가까이 있게 되는 시간에 최대속도를 갖게되며 가장 멀리 위치하게 될 때 최저속도를 갖게 된다.

Table II. Summary of the initial condition and the results

Case No.	초기 형태	진화형태	초기 Virial계수	초기 관성모멘트	가장 가까워졌을 때	가장 멀어졌을 때	총 에너지	총 운동량
1	그림 1 $V_{1x} > 0$	그림 2	1	.833	$t=2.485$ $d=4.47 \times 10^{-3}$ $v=28$	$t=.992$ $d=.995$ $v=.440$	-5.50	1.914
2	그림 1 $V_{1x} < 0$	그림 3	1	.833	$t=2.502$ $d=.50 \times 10^{-3}$ $v=26$	$t=.994$ $d=1.001$ $v=.395$	-5.50	-1.914
3	그림 1	그림 4	.223	3.618	$t=1.147$ $d=6.46 \times 10^{-3}$ $v=18$	$t=2.506$ $d=.874$ $v=.230$	-5.76	0
4	그림 1	그림 5	1	3.618	$t=.537$ $d=1.25 \times 10^{-4}$ $v=137$	$t=1.079$ $d=1.005$ $v=.305$	-3.96	3.635

IV. 검토와 결론

Newton의 운동방정식의 수치해석적인 적분에 의해 구해진 3체 문제의 특수해를 구하는 과정에서 세 물체 중 하나는 계를 탈출하고 남은 두 물체가 실제의 연성체처럼 주기적인 궤도에 따라 운동한다. 이러한 연성계의 진화과정에서 나타나는 경향들을 검토하여 보기로 하겠다.

우선, 연성체를 이루는 m_2 와 m_3 의 결속에너지의 변화량을 표 III에서 살펴 보았다. case 3을 제외하고는 다른 경우들은 약 1.5 단위시간까지 약 $10^{-2} \sim 10^{-3}$ 정도로 밖에 변하지 않는다. 그러나 case 3에서 결속에너지가 비교적 많이 변하는 것은 m_1 에 의한 강한 섭동으로 많은 에너지를 탈출하는 m_1 에 의해 빼앗겼기 때문이다. 그림 6과 그림 7에서 각각 case

Table III. Variation of the binding energy

Case No.	초기 결속에너지	$t = 1.5$ 의 결속에너지	차	이
1	- 5.0000	- 5.0228	0.0228	
2	- 5.0000	- 5.0042	0.0042	
3	- 4.1316	- 4.7845	0.6485	
4	- 4.2361	- 4.2243	0.0118	

1 과 case 3의 결속에너지(B.E.)의 변화를 총 에너지(T.E.)와 함께 비교하였다.

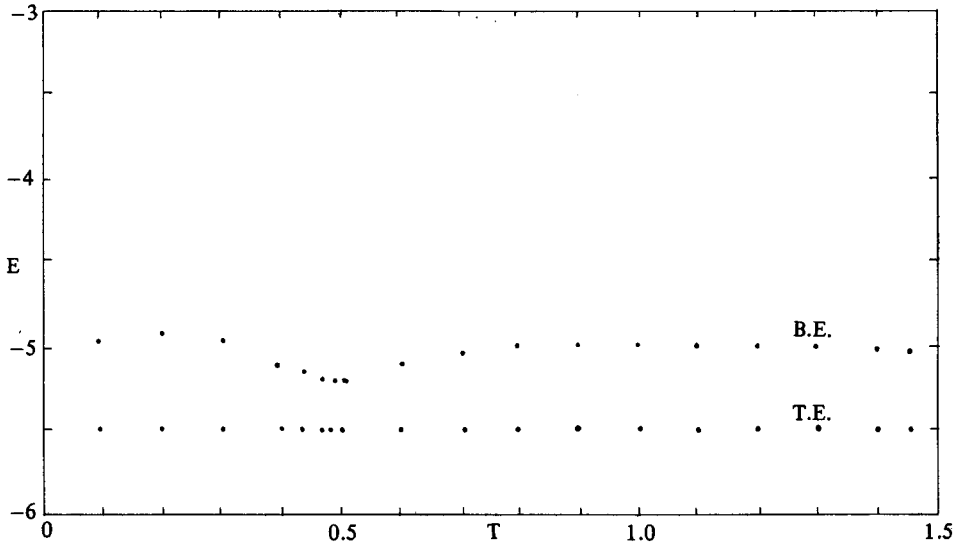


Fig. 6. Binding energy variation with time in the case 1

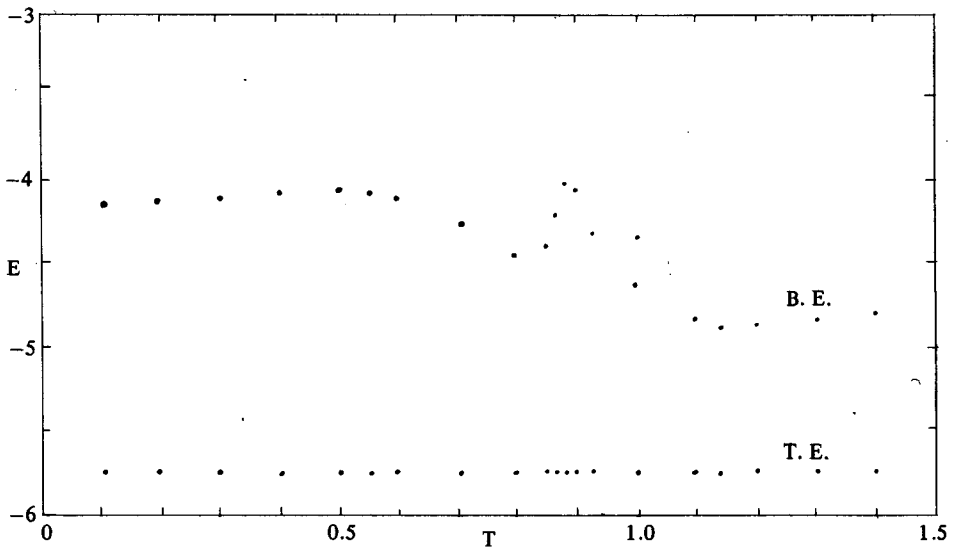


Fig. 7. Binding energy variation with time in the case 3

(3)식에 의해 구해진 관성모멘트의 변화와, 그리고 시간에 따른 virial계수를 살펴보면 두 물체의 close approach에만 관계하는 virial계수의 극대값과 3체가 모두 가까워졌을 때 나타

나는 관성모멘트의 극소값을 갖는 시간이 다른 case에서는 잘 일치한다. 그러나, case 3에서는 virial 계수의 극대값을 가질 때가 a점이고 관성모멘트의 극소값을 갖는 시간을 b라고 할 때 그림 8에서처럼 두 점이 일치하지 않는데 이는 Szebehely(1974)의 경우와도 상응한다.

많은 모델 중에서 짧은 시간(2~3 t.u.) 안에 연성계를 형성하는 것들만 살펴보았다. 그러나, 이러한 간단한 모델로 연성계를 형성할 수 있었다는 것은 매우 특이할만한 사항이다. 현재 천문학적인 조건과 부합되는 물리적 요소들을 더 첨가하여 모델을 계산한다면 연성계의 기원에 대해 좀 더 확실하게 논할 수 있을 것이다.

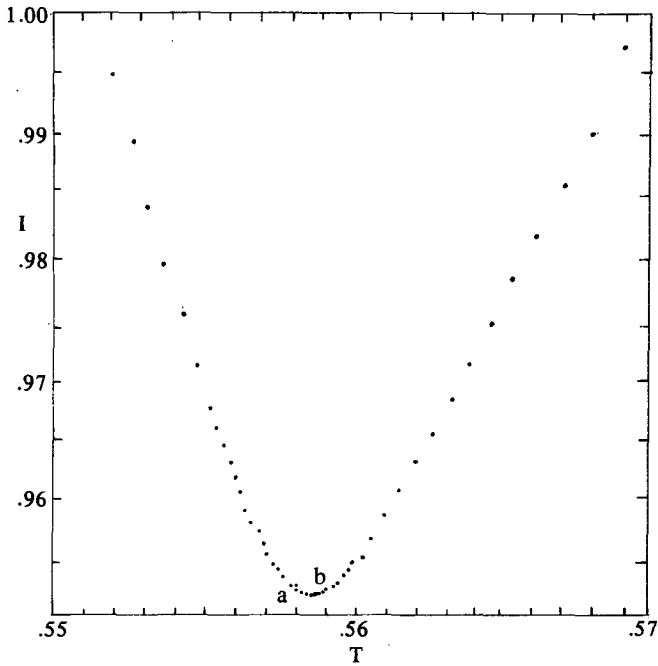


Fig. 8. Inertial moment variation with time in the case 3
($t = 0.55 \text{ t.u.} - 0.57 \text{ t.u.}$)

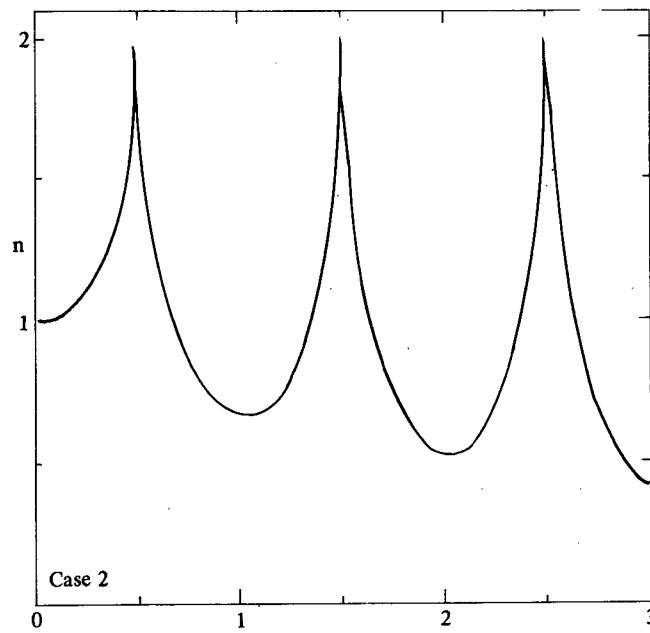
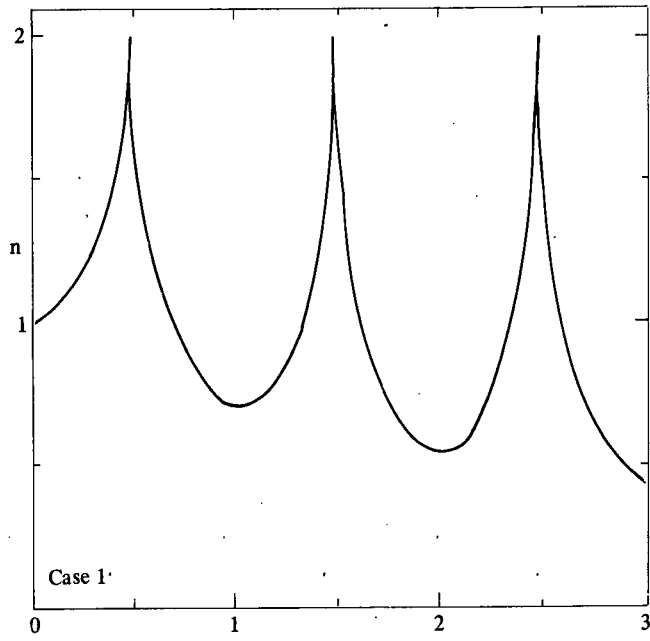


Fig. 9. Virial coefficient variation with time in the case 1 and case 2

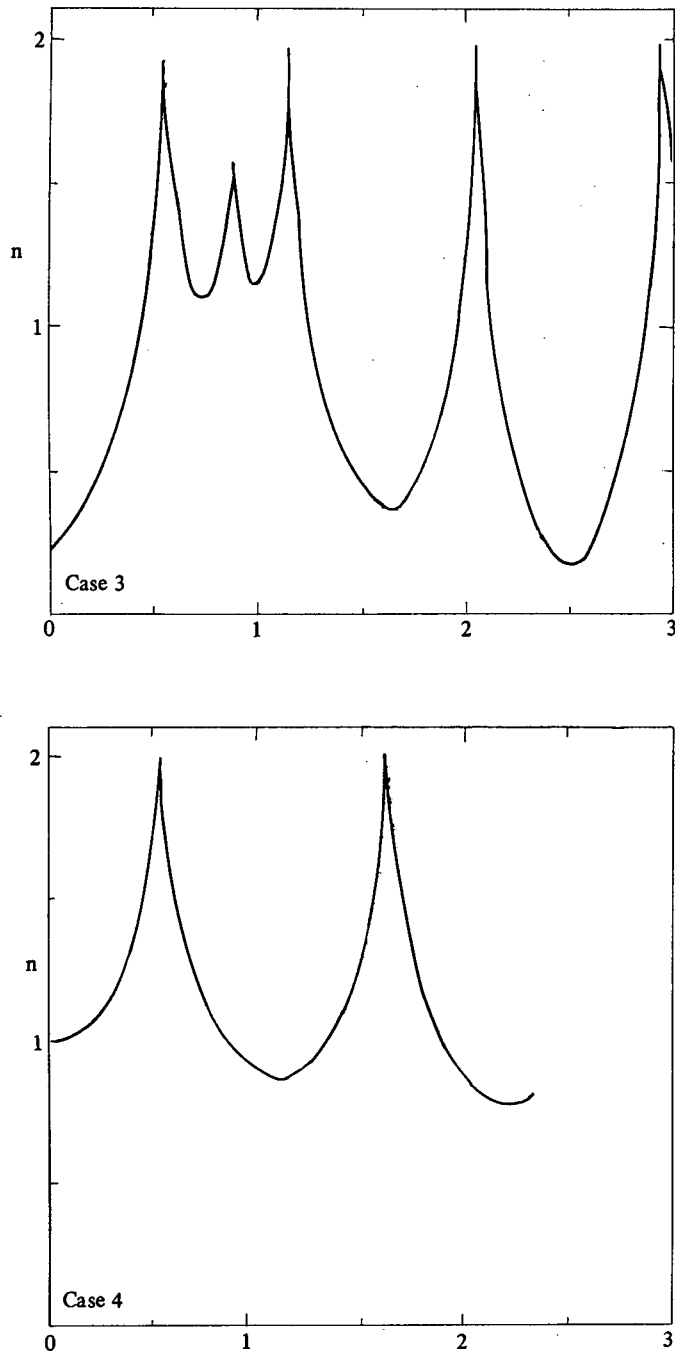


Fig. 10. Virial coefficient variation with time in the case 3 and case 4.

REFERENCES

- Batten, A. H. 1967, *Ann. Rev. Astr. Astrophys.*, **5**, 25.
- . 1973, *Binary and Multiple systems of Binary stars*(New York: Pergamon), p. 246.
- Febhlberg, E. 1968, NASA TR R-287.
- Harrington, R. S. 1975, *A. J.*, **80**, 1081.
- Harwit, M. 1973, *Astrophysical concepts*(New York: John wiley & sons), p. 96.
- Levi-Civita, T. 1903, *Ann. Math.*, **2**, 1.
- Roy, A. E. 1978, *Orbital Motion*(Bristol: Adam Hilger), p. 156.
- Sundman, K. F. 1912, *Acta. Math.*, **35**, 105.
- Szebehely, V. 1974, *A. J.*, **79**, 1449.
- Szebehely, V. and Bettis, D. G. 1971, *Astrophys. and Space Sci.*, **13**, 365.
- Szebehely, V. and Peters, F. 1967, *A. J.*, **72**, 876.