

〈論 文〉

ARMA(1, 1) 多季節模型에 의한 河川流量的 模擬發生

A Synthetic Generation of Streamflows by ARMA(1, 1) Multiseason Model

尹 龍 男*

Yoon, Yong Nam

全 時 永**

Chon, Si Young

Abstract

The applicability of ARMA (1,1) multiseason model, which is in the beginning stage of active researches in the field of synthetic generation is evaluated with the streamflow data at the Nakdong stage gauging station on the main stem of the Nakdong River. The method of parameter estimation for the model is reviewed and the statistical analysis of the generated seasonal streamflows such as correlogram analysis and the computation of moments is made. The results obtained by ARMA(1,1) multiseason model are compared with the historical streamflow data and also with those by two other multiseason models, namely, Thomas-Fiering model and Matalas AR(1) multiseason model.

The seasonal streamflows generated by three multiseason models were annually summed up to form respective annual flow series whose statistics were compared with those of the annual flow series generated by three annual models, namely, AR(1), Matalas AR(1), and ARMA(1,1) annual models. The possibility of ARMA(1,1) multiseason model for the simultaneous generation of seasonal and annual streamflows is also evaluated.

要 旨

初期研究단계에 있는 ARMA(1,1) 多季節模型에 의해 季節流量을 發生시키기 위한 模型의 變數決定方法과 流量發生 및 發生流量系列의 統計學的分析을 실시하였으며 他模型과의 比較를 위해 Thomas-Fiering 模型, Matalas AR(1) 多季節模型도 사용하였다. 多季節模型에 의해 發生시킨 季節流量을 年度別로 合算하여 얻은 年流量系列의 統計學의 特性值를 年模擬發生模型에 의해 發生시킨 年流量系列의 統計特性值와 比較함으로써 ARMA(1,1) 多季節模型에 의해 季節 및 年流量資料系列을 한꺼번에 模擬發生시킬수 있는 可能性을 評價하였다.

필요한 풍부한 入力資料를 제공하게 된다.

일반적으로 年 水文時系列의 發生機構는 一定變數(constant parameters)를 가지는 Autoregressive(AR) 혹은 Autoregressive-Moving Average(ARMA) 模型에 의해 模型化가 이루어지나 季節時系列의 發生機構는 週期性 變數(periodic parameters)를 가지는 AR 혹은 ARMA 模型으로 模型化가 가능하다. 一定變數를 갖는 AR 模型은 推計水文學分野^{1,2,3,4}뿐만 아니라 推計過程(stochastic process)의 解析一般^{5,6,7}에서도 충분히 研究檢討되었으므로 一定變數를 가지는 ARMA 模

1. 序 論

지난 20여년동안 水文時系列의 推計學의 特性을 徹底하게 분석하여 짧은 歷史의인 流量資料로부터 長期間 資料를 模擬發生시키기 위한 數學的 模型의 開發에 많은 研究가 進行되어 왔다. 이와 같은 推計學의 模型에 의한 長期間 流量資料의 發生은 법 建設에 의한 貯水池의 運營操作方法의 最適化라든가 新設댐의 最適容量 決定등 水資源 시스템의 運營, 計劃 및 設計에

* 高麗大學校 工科大學 土木工學科 教授

** 漢陽大學校 工科大學 大學院 博士學位 課程

형태도 여러 사람에 의해 검토된 바 있다. ^{8,9,10,11,12)} 그러나 周期性 變數를 갖는 模型 ARMA에 의한 季節 流量的 模擬發生에 관한 연구는 Tao and Delleur¹³⁾ Salas et al ¹⁴⁾ 등이 근년에 와서 부분적으로 研究한 以外에는 크게 검토된 바가 없다.

따라서 本 研究에서는 季節 流量的 發生을 위한 AR MA 多季節 模型의 적용 가능성을 評價하기 위해 ARMA (1,1) 模型을 검토하였으며 比較目的으로 多季節 模型 이면서 使用이 보편화 되어 있는 Thomas-Fiering 模型(1)과 Matalas AR(1) 多季節 模型 ^{15,16)}에 의해서 도 季節 流量을 발생시켰다. 發生시킨 季節 流量的 年次 別 合計로 얻은 年 流量的 統計學的 特性值과 過去 流量 資料의 統計學的 特性值 比較는 물론이고 年 流量 發生에 사용되는 單一 季節 模型인 AR(1), ARMA(1,1) 및 Matalas AR(1) 模型에 의해 年 流量을 발생시켜 이의 統計特性值와도 比較함으로써 發生 模型의 相對的 인 優劣性을 比較 評價하였다.

2. 模擬發生 模型의 理論의 考察

本 研究에서 검토한 模型은 전술한 바와 같이 年 模型(annual model)과 多季節 模型(multiseason model)이며 이들 模型을 표시하는 基本發生方程式과 方程式에 포함되는 各種 變數의 算定方法을 간단히 살펴 보기로 한다.

2.1 年 模型

本 研究에서 사용한 年 模型에는 AR(1) 模型, Matalas AR(1) 模型 및 ARMA(1,1) 年 模型의 세 가지가 있으며 이들 模型의 發生方程式과 變數算定方法을 살펴 보면 다음과 같다.

2.1.1 AR(1) 模型

自己回歸 模型(Autoregressive model, AR model)의 一般式은 k 次 AR 혹은 Markov 模型으로 다음과 같이 표시된다.

$$X_t = \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \dots + \beta_k X_{t-k} + \epsilon_t \dots (1)$$

여기서 $X_t, X_{t-1}, \dots, X_{t-k}$ 는 自己回歸過程(autoregressive process)을 표시하여 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ 는 自己回歸係數이고 ϵ_t 는 平均值가 零이고 分散이 σ_ϵ^2 인 獨立時系列로서 偶然成分을 표시한다. AR 模型의 一般式인 式 1로부터 1次 AR 模型, AR(1),은 다음과 같아진다.

$$X_t = \beta_1 X_{t-1} + \epsilon_t \dots (2)$$

여기서 $\epsilon_t = \sigma_\epsilon z_t$ 이며 z_t 는 平均值가 零이고 分散이 1인 正規分布를 갖는 亂數(normally distributed random number), $N(0, 1)$,이다.

式 1, 2의 自己回歸過程 X_t 는 正常時系列(stationary time series)을 표시하며 非正常時系列를 분석할

경우에는 이를 다음과 같이 標準化(standardization)하여야 함은 물론이다.

$$X_t = \frac{Q_t - \bar{Q}_t}{S_{Q_t}} \dots (3)$$

여기서 Q_t 는 流量時系列이고 \bar{Q}_t 및 S_{Q_t} 는 각각 流量의 平均值 및 標準偏差이다.

式 2로 표시되는 1次 AR 模型, AR(1),의 變數 β_1 과 σ_ϵ 는 各各 다음式으로 부터 計算된다.^{5,6)}

$$\beta_1 = \rho_1 \dots (4)$$

$$\sigma_\epsilon = S_{Q_t} \sqrt{1 - \rho_1^2} \dots (5)$$

여기서 ρ_1 은 다음과 같이 표시되는 流量時系列의 k 次 系列相關係數, r_k 중 $k=1$ 일 때의 1次 系列相關係數, r_1 ,을 표시한다.

$$r_k = \frac{\sum_{t=1}^{N-k} (Q_t - \bar{Q}_t)(Q_{t+k} - \bar{Q}_t)}{\sum_{t=1}^N (Q_t - \bar{Q}_t)^2} \dots (6)$$

여기서 N 은 流量資料의 總數이다.

따라서, 式 2의 $\beta_1 = r_1$, $\epsilon_t = \sigma_\epsilon z_t = z_t S_{Q_t} \sqrt{1 - r_1^2}$ 이 구해지고 나면 發生方程式은 式 3을 사용하면 다음과 같아진다.

$$Q_t = \bar{Q}_t + r_1(Q_{t-1} - \bar{Q}_t) + z_t S_{Q_t} \sqrt{1 - r_1^2} \dots (7)$$

만약 流量時系列 記錄이 對數正規分布를 가진다고 가정하면 式 3과 式 7의 Q_t 는 流量의 對數值(logarithm)를 표시하므로 實流量 Q_t^* 는 다음과 같은 變換으로 구하게 된다.

$$Q_t^* = \text{EXP}(Q_t) \dots (8)$$

2.1.2 Matalas AR(1) 模型

對數正規分布를 가지는 流量時系列을 發生시키고자 할 때에는 流量資料의 對數值를 취한 時系列를 사용하여 平均值, 分散, 歪度係數 및 系列相關係數 등을 계산하여 發生方程式에 사용하게 되므로 記錄된 流量資料의 統計特性值들이 그대로 보존되지 않고 歪曲된다. 따라서 Matalas¹⁵⁾는 流量資料의 統計特性值가 그대로 보존될 수 있는 다음과 같은 節次를 제안하였다. 즉, 流量 Q_t 의 可能한 下限值를 a 라 하고 $y_t = \log_e(Q_t - a)$ 가 正規分布를 가진다고 가정하면 Q_t 및 y_t 의 統計特性值間에는 다음과 같은 關係가 성립한다.

$$\mu_q = a + \text{EXP}(\sigma_y^2/2 + \bar{y}) \dots (9)$$

$$\sigma_q^2 = \text{EXP}[2(\sigma_y^2 + \bar{y})] - \text{EXP}(\sigma_y^2 + 2\bar{y}) \dots (10)$$

$$r_q = \frac{\text{EXP}(3\sigma_y^2) - 3\text{EXP}(\sigma_y^2) + 2}{[\text{EXP}(\sigma_y^2) - 1]^{3/2}} \dots (11)$$

$$\rho_q(1) = \frac{\text{EXP}[\sigma_y^2 \cdot \rho_y(1)] - 1}{\text{EXP}(\sigma_y^2) - 1} \dots (12)$$

여기서 $\mu, \sigma^2, \bar{y}, \rho(1)$ 은 各各 平均值, 分散, 歪度係數

및 Lag-one 系列相關係數이다. 따라서 流量資料 Q_t 로부터 $\mu_Q, \sigma_Q^2, \tau_Q, \rho_Q(1)$ 을 계산하고 式 9~12를 풀어서 $\bar{y}, \sigma_y, \rho_y(1)$ 및 a 를 각각 구하면 이들은 流量資料의 對數值의 統計特性值가 아닌 標本流量의 統計特性值가 되는 것이다.

式 7 과 유사하게 y_t 의 發生方程式을 표시하면

$$y_t^* = \bar{y} + \rho_y(1)(y_{t-1}^* - \bar{y}) + z_t \sigma_y \sqrt{1 - \rho_y^2(1)} \quad (13)$$

여기서 y_t^* 는 發生되는 流量의 對數值이다. 따라서 發生되는 流量系列 Q_t^* 는

$$Q_t^* = \text{EXP}(y_t^*) + a \quad \dots\dots\dots (14)$$

2.1.3 ARMA(1, 1) 年模型

ARMA 模型의 一般型인 ARMA(p, q)模型은 다음과 같이 표시된다.

$$q_t = \beta_1 q_{t-1} + \beta_2 q_{t-2} + \dots + \beta_p q_{t-p} + \epsilon_t - \alpha_1 \epsilon_{t-1} - \alpha_2 \epsilon_{t-2} - \dots - \alpha_q \epsilon_{t-q} \quad \dots\dots\dots (15)$$

여기서 q_t 는 標準化된 定常時系列을 표시하며 β_i 는 自己回歸係數, α_j 는 Moving Average 係數, ϵ_t 는 平均値가 零이고 分散이 σ_ϵ^2 인 獨立時系列이다.

式15로 부터 ARMA(1, 1)模型의 發生方程式은

$$q_t = \beta_1 q_{t-1} + \epsilon_t - \alpha_1 \epsilon_{t-1} \quad \dots\dots\dots (16)$$

式 16으로 流量을 發生시키기 위해서는 模型方程式의 變數 β_1, α_1 및 偶然成分 ϵ_t 의 分散인 σ_ϵ^2 을 推定하지 않으면 안된다. 變數의 推定方法에는 最少自乘法과 Maximum Likely Method가 있으며 初期值의 결정은 Yule-Walker 方程式에 의한다³⁾. Yule-Walker 方程式에 의한 變數 β_1 과 α_1 의 推定은 다음과 같다.

$$\beta_1 = \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$\rho_1 = \frac{(\beta_1 - \hat{\alpha}_1)(1 - \hat{\alpha}_1 \hat{\beta}_1)}{1 - 2\hat{\alpha}_1 \hat{\beta}_1 + \hat{\alpha}_1^2} \quad \dots\dots\dots (18)$$

여기서 ρ_1, ρ_2 는 流量資料의 Lag-1 및 Lag-2 系列相關係數이며 式18에서의 $\hat{\alpha}_1$ 의 결정은 Stationarity 條件인 $|\hat{\alpha}_1| \leq 1$ 을 만족시키는 根을 解로 취해야 한다^{8,17)}. 한편 偶然成分의 分散은 다음 式으로 推定한다.

$$\sigma_\epsilon^2 = \frac{1 - \hat{\beta}_1^2}{1 - 2\hat{\alpha}_1 \hat{\beta}_1 + \hat{\alpha}_1^2} \quad \dots\dots\dots (19)$$

以上과 같이 式16의 變數 $\hat{\beta}_1, \hat{\alpha}_1$ 및 σ_ϵ^2 이 추정되고 q_t 가 流量記錄值 Q_t 를 平均値 Q_t 와 標準偏差 S_{q_t} 로 標準化된 時系列이라던 發生方程式은 다음과 같이 표시된다.

$$Q_t = \bar{Q}_t + \hat{\beta}_1(Q_{t-1} - \bar{Q}_t) + z_t S_{q_t} \sigma_\epsilon - \alpha_1 z_{t-1} S_{q_t} \sigma_\epsilon \dots (20)$$

만약 流量資料記錄이 對數正規分布를 가진다면 式20에 의해 發生되는 Q_t 는 流量의 對數值이므로 年流量系列은 다음과 같은 變換으로 구하게 된다.

$$Q_t^* = \text{EXP}(Q_t) \quad \dots\dots\dots (21)$$

2.2 多季節 模型

本 研究에서 主要 검토코져 한 多季節 模型은 ARM A(1, 1) 多季節模型이며 比較의 目的으로 模擬發生模型으로서 그 사용이 보편화 되어 있는 Thomas-Fiering 模型과 Matalas AR(1) 多季節模型을 사용하여 季節流量을 發生시켰으며 發生流量의 統計學的 特性值를 서로 比較하였다.

2.2.1 ARMA(1, 1) 多季節 模型

ARMA(1, 1) 多季節 模型의 發生方程式은 ARMA(1, 1) 年模型인 式16과 유사하게 표시할 수 있다. 卽,

$$q_{t,\tau} = \beta_{1,\tau} q_{t,\tau-1} + \epsilon_{t,\tau} - \alpha_{1,\tau} \epsilon_{t,\tau-1} \quad \dots\dots\dots (22)$$

여기서 $\beta_{1,\tau}$ 와 $\alpha_{1,\tau}$ 는 各各 自己回歸係數 및 Moving Average 係數이고 $\epsilon_{t,\tau}$ 는 平均値가 零이고 分散이 σ_ϵ^2 (ϵ)인 獨立時系列이며 $q_{t,\tau}$ 는 標準化된 定常時系列이다. 또한 式22의 첨자인 $t=1, 2, \dots, N$ 은 資料의 年數를 표시하며 $\tau=1, 2, \dots, M$ 은 季節의 數를 표시한다.

非定常時系列의 標準化 方法은 Young-Pisano¹⁸⁾의 方法으로 가능하며 이는 季節流量의 平均値와 分散을 이용하여 다음과 같이 周期成分은 제거하여 式22의 定常時系列 $q_{t,\tau}$ 를 얻는 方法이다. 卽,

$$q_{t,\tau} = \frac{Q_{t,\tau} - \bar{Q}_\tau}{S_{q_\tau}} \quad \dots\dots\dots (23)$$

만약 式23의 變換으로 얻어지는 時系列 $q_{t,\tau}$ 의 平均値와 分散이 각각 零과 1이 아니면 다음과 같은 變換을 다시하게 된다.

$$q_{t,\tau}' = \frac{q_{t,\tau} - \bar{q}_\tau}{S_{q_\tau}} \quad \dots\dots\dots (24)$$

여기서 \bar{q}_τ 와 S_{q_τ} 는 τ 季節에 대한 $q_{t,\tau}$ 의 平均値와 標準誤차이며 Roesoner and Yevdjovich¹⁹⁾가 이 變換을 제안 하였고 變換된 時系列 $q_{t,\tau}'$ 를 Standardized fitted series라 하여 式22의 變數推定을 위한 資料로 사용하게 된다.

式22로 표시되는 ARMA(1, 1) 多季節 模型의 變數를 추정하는 方法에는 Tao and Delleur¹³⁾와 Delleur²⁰⁾의 近似解法과 Salas, Boes and Smith¹⁴⁾의 正確解法이 있으며 正確解法에 의한 變數의 推定方程式은 다음과 같다. 卽, 周期自己回歸係數는

$$\beta_{1,\tau} = \frac{\rho_{2,\tau}}{\rho_{1,\tau-1}} \quad \dots\dots\dots (25)$$

여기서 $\rho_{1,\tau}$ 및 $\rho_{2,\tau}$ 는 각각 τ 季節의 Lag-1 및 Lag-2 系列相關係數이다.

한편, 周期 Moving Average 係數는

$$\alpha_{1,\tau} = \beta_{1,\tau} + \frac{1 - \beta_{1,\tau}\rho_{1,\tau}}{\beta_{1,\tau} - \rho_{1,\tau}} - \frac{\beta_{1,\tau+1} - \rho_{1,\tau+1}}{(\beta_{1,\tau} - \rho_{1,\tau})\alpha_{1,\tau+1}} \dots (26)$$

式26에서 $\alpha_{1,\tau}$ 와 $\alpha_{1,\tau+1}$ 以外的 變數值는 流量資料 및 式25로 부터 계산할 수 있으며 季節의 數 $\tau=1, 2, \dots, M$ 이라면 M 개의 聯立方程式을 얻게 되며 이를 逐次적으로 풀므로서 $\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \dots, \alpha_{1,M}$ 을 각각 구할 수 있게 된다. 이때 $\alpha_{1,\tau}$ 의 解는 2次方程式을 풀어 얻게 되며 stationarity 條件인 $|\alpha_{1,\tau}| \leq 1$ 을 만족시키는 解만 택해야 한다.

式22의 周期偶然成分 $\varepsilon_{t,\tau}$ 의 分散은 다음 式으로 구한다.

$$\sigma_{\varepsilon_{t,\tau}}^2 = \frac{\beta_{1,\tau} - \rho_{1,\tau}}{\alpha_{1,\tau}} \dots (27)$$

式23을 式22에 대입하여 ARMA(1,1) 多季節模型의 發生方程式을 표시해 보면

$$Q_{t,\tau} = \bar{Q}_\tau + \beta_{1,\tau}(Q_{t,\tau-1} - \bar{Q}_\tau) + z_{t,\tau}S_{Q_\tau}\sigma_{\varepsilon_{t,\tau}} + \alpha_{1,\tau}z_{t,\tau-1}S_{Q_\tau}\sigma_{\varepsilon_{t-1}} \dots (28)$$

또한, 만약 式28의 季節流量 $Q_{t,\tau}$ 가 對數正規分布를 가지는 時系列이라면 流量의 對數值로 표시된 것이므로 發生되는 流量은 이를 變換하여 얻게된다. 卽,

$$Q_{t,\tau}^* = \text{EXP}(Q_{t,\tau}) \dots (29)$$

2.2.2 Thomas-Fiering 模型

Thomas-Fiering 模型은 1次 Markov 型的 模型으로 月流量資料의 發生에 주로 사용되며 發生方程式은 다음과 같다.

$$Q_{t,\tau} = \bar{Q}_\tau + r_\tau(1) \frac{S_\tau}{S_{\tau-1}} (Q_{t,\tau-1} - \bar{Q}_\tau) + z_{t,\tau}S_\tau \sqrt{1 - r_\tau^2(1)} \dots (30)$$

여기서 \bar{Q}_τ 는 τ 季節의 流量의 平均值이고 $S_\tau, S_{\tau-1}$ 은 각각 τ 및 $(\tau-1)$ 季節流量의 標準誤差, $z_{t,\tau}$ 는 正規分布를 갖는 亂數, $N(0, 1)$ 이며 $r_\tau(1)$ 은 τ 季節과 $(\tau-1)$ 季節流量間의 系列相關係數로서 다음式들에 의해 標本流量으로부터 계산된다.

$$\bar{Q}_\tau = \frac{1}{N} \sum_{\tau=1}^N Q_{t,\tau} \dots (31)$$

$$S_\tau^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{\tau=1}^N (Q_{t,\tau} - \bar{Q}_\tau)^2 \dots (32)$$

$$r_\tau(1) = \frac{\sum_{\tau=1}^N (Q_{t,\tau} - \bar{Q}_\tau)(Q_{t,\tau-1} - \bar{Q}_{\tau-1})}{S_\tau - S_{\tau-1}} \dots (33)$$

여기서 N 는 流量資料의 年數이다.

式30에서의 流量 $Q_{t,\tau}$ 가 對數正規分布를 가지는 流量時系列이면 前述한 바와 같이 式29에 의해 發生流量系列로 變換해 주어야 한다.

2.2.3 Matalas AR(1) 多季節模型

Burges¹⁶⁾는 Matalas²¹⁾의 多地點 年模型(multisite annual model)을 응용하여 實測季節流量의 平均值 \bar{Q}_τ , 分散 S_τ^2 및 Lag-1 系列相關係數 $r_\tau(1)$ 와 式30의 發生方程式에 사용할 變數인 平均值 μ_τ , 分散 σ_τ^2 및 Lag-1 系列相關係數 $\rho_\tau(1)$ 간의 關係式을 다음과 같이 표시하였다.

$$\bar{Q}_\tau = \text{EXP}(\mu_\tau + \frac{\sigma_\tau^2}{2}) \dots (34)$$

$$S_\tau^2 = \text{EXP}(2\sigma_\tau^2 + 2\mu_\tau) - \text{EXP}(\sigma_\tau^2 + 2\mu_\tau) \dots (35)$$

$$r_\tau(1) = \frac{\text{EXP}[\sigma_{\tau-1} \cdot \sigma_\tau \cdot \rho_\tau(1)] - 1}{[\text{EXP}(\sigma_{\tau-1}^2) - 1]^{1/2} [\text{EXP}(\sigma_\tau^2) - 1]^{1/2}} \dots (36)$$

式34~36에서 左邊값은 實測季節流量으로부터 직접 계산할 수 있으므로 3個方程式을 連립하여 풀면 變數 μ_τ, σ_τ^2 및 ρ_τ 를 구할 수 있게 된다.

따라서 Matalas AR(1) 多季節模型의 發生方程式은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$Q_{t,\tau} = \mu_\tau + \rho_\tau(1) \frac{\sigma_\tau}{\sigma_{\tau-1}} (Q_{t,\tau-1} - \mu_\tau) + z_{t,\tau}\sigma_\tau \sqrt{1 - \rho_\tau^2(1)} \dots (37)$$

3. 資料 및 分析方法

本 研究에 사용된 流量資料는 洛東江의 本流에 위치한 洛東 水位標地點에서 實測된 流量으로 洛東의 36年間(1924~1970年)의 月流量을 分析對象으로 하였다²²⁾.

年流量의 模擬發生을 위한 前述한 3個 模型의 各種 變數는 洛東地點의 12個月 月流量을 合하여 얻은 年流量時系列을 사용하여 구하였다. 多季節模型중 Thomas-Fiering 模型과 Matalas AR(1)模型은 원래 月流量의 發生에 사용되는 模型이나 本 研究에서는 ARMA(1,1) 多季節模型과의 結果比較를 위해 1~3月 4~6月 7~9月 및 10~12月의 3個月 單位로 合하여 年度別로 4 季節流量을 標本流量으로 사용하였다. 이는 本 研究에서 주로 검토코져 하였던 ARMA(1,1) 多季節模型의 變數중의 하나인 式26으로 표시되는 Moving Average 係數, $\alpha_{1,\tau}$ 는 季節數가 4個 以上으로 늘어나게 되면 計算이 대단히 까다로워 지기 때문이며, 또한 各種 模型에 의한 發生結果를 比較檢討할 目的으로는 4 季節 流量도 충분하다고 판단하였기 때문이다.

本 研究에서 사용한 3個 年模型과 3個 多季節模型을 流量의 模擬發生에 적용하기에 앞서 검토해야 할 사항으로는 첫째로 季節 및 年流量時系列資料가 水文學的 持續性(hydrologic persistence)을 가지는가 이고,

둘째로는 流量資料系列의 適正確率 分布型이 무엇인가 하는 것이다. 本 研究의 對象地點인 洛東地點의 月 및 年流量資料는 國內研究²²⁾에서 Correlogram 分析 및 Persistence Test 로 水文學的 持續性이 있는 것으로 밝혀졌을뿐 아니라 月 및 年流量의 最適確率分布型이 對數正規分布(Log-Normal distribution)임이 밝혀졌으므로 本 研究에서는 持續性 檢査와 適正確率分布型의 檢正節次를 생략하고 季節 및 年流量資料가 對數正規分布를 가지는 것으로 보고 6 個模擬模型을 적용하였다.

各 模型에 의한 流量의 發生年數는 200年으로 하였으며 初期에 發生되는 流量의 初期條件 bias²³⁾을 제거하기 위하여 後半 100年間의 發生流量만을 사용하여 Correlogram 및 統計特性值를 計算하여 比較하였다.

4. 分析結果의 檢討

本 研究에서 검토된 3 個의 多季節 模擬模型과 3 個의 年模型에 의해 發生된 流量資料의 信빙성을 검사하기 위하여 洛東의 實測流量資料의 水文學的 持續性 構造를 표시하는 Correlogram 과 各種 統計特性值를 구하여 이를 模擬發生된 流量의 Correlogram 및 統計特性值와 比較 檢討하였다.

4.1 Correlogram)의 比較

Correlogram 이란 式 6 으로 계산되는 系列相關係數를 遲滯次數(lag) k 에 대하여 plot 한 相關圖로 時系列을 구성하는 確定成分(deterministic component)이나 推計成分(stochastic component)을 파악하는데 유용하게 사용된다. Correlogram 에 의한 時系列의 水文學的 持續性 存在如否를 판별하는 方法에는 簡略法(Approximate test), 正解法(Exact test) 및 點轉換法(Turning Point test) 등이 있다.²³⁾ 이중 正解法이 가장 理論的인 근거가 있는 方法으로 標準化된 定常時系列의 Lag-1 系列相關係數 r_1 값이 Correlogram 上에서 다음과 같은 信賴限界(confidence limit, C.L.) 밖에 위치하고 餘他的 r_k 값이 거의 C.L. 內에 위치하면, 그 時系列은 水文學的 持續性을 가지는 定常時系列이라고 판단하게 된다.²⁴⁾ 즉,

$$C.L.(r_1) = -\frac{1}{N-1} \pm z \frac{(N-2)}{(N-1)^{3/2}} \dots\dots(38)$$

여기서 N 은 r_1 의 계산에 사용된 資料數이며 z 는 標準正規變量(standard normal random variate)으로서 95% 信賴限界에 해당하는 값은 1.96이다.

4.1.1 多季節模型에 의한 流量系列의 Correlogram

洛東地點의 36年(144季節) 間의 流量資料를 사용하

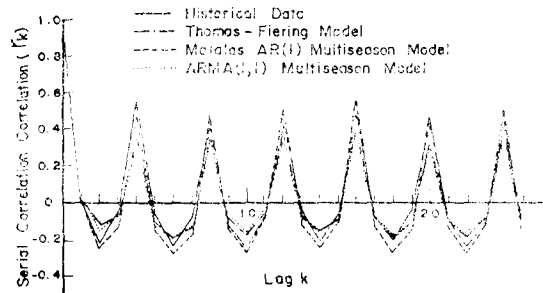


Fig. 1 Correlograms for Seasonal Streamflows at Nakdong

여 設定한 ARMA(1, 1) 多季節模型과 Thomas-Fiering 模型 및 Matalas AR(1) 多季節模型으로 各 各 模擬發生시킨 100年(400季節) 間의 流量資料로 부터 式 6 에 의해 r_k 를 계산하여 Correlogram 을 작성한 결과가 그림 1 에 표시 되어 있으며 實測流量에 대한 correlogram 도 동시에 比較되어 있다.

그림 1 에 나타난 季節模型別 Correlogram 을 實測 季節流量的 Correlogram 과 比較해 보면 模型에 따라 Correlogram 의 振幅에는 差異가 있으나 波形은 대동 소이함을 알 수 있다. 즉, 예상할 수 있는 바와 같이 4 季節을 周期로 하여 동일한 形의 波가 되풀이 되고 있다. 이는 季節流量이 4 季節(1 年) 周期를 가지며 季節에 따라 그 크기가 변동하는 이른바 季節變動成分(periodic component)이 존재함을 뜻하며 本 研究에서 季節流量的 發生에 사용한 3 個模型이 實測季節流量的 周期性을 충분히 再演시켜 주고 있음을 증명하는 것이다.

이와같이 季節流量은 周期成分을 가지고 있으므로 定常時系列이 아닌 非定常時系列이다. 따라서 周期成分(또는 季節成分)을 제거하여 定常時系列화한 후 Correlogram 을 比較하기 위하여 Young-Pisano¹⁸⁾의 標準化方法(式 23)으로 實測季節流量과 ARMA(1, 1) 多季節模型으로 發生시킨 100年間의 季節流量을 標準化한 후 計算한 Correlogram 은 그림 2 와 같다. 그림 2 에는 式 38 에 의해 36年間의 實測季節流量($N=144$)에 대해 계산한 95% 信賴限界($-0.170 \leq r_k \leq 0.156$)가 표시되어 있다. 그림 2 에서 볼 수 있는 바와 같이 ARMA 多季節模型에 의해 發生된 季節流量系列의 Correlogram 은 實測季節流量的 Correlogram 과 마찬가지로 r_1 및 r_2 가 95% 信賴限界值보다 훨씬 커서 強한 系列相

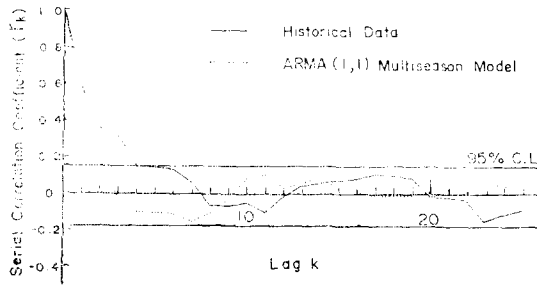


Fig. 2 Correlograms for Standardized Seasonal Streamflows at Nakdong

關性を 보이고 있을뿐 아니라, 水文學的 持續性を 갖는 定常時系列의 Correlogram 形態를 보이고 있고, $k > 2$ 이면 r_k 값이 95% 信賴限界內에서 zero 軸 上下로 交叉하는 이른바 白色雜音의 波動을 이룬다. 따라서 그림 2의 Correlogram 에 해당하는 流量系列은 持續성을 갖는 確定成分과 白色雜音의 變動성을 갖는 偶然成分으로 구성되는 正常時系列이라 할 수 있으며 ARMA(1,1) 多季節模型은 模擬發生模型으로서 實測資料의 持續성과 偶然성을 잘 代表해 주고 있다고 말할 수 있다.

4.1.2 年模型에 의한 流量系列의 Correlogram

本 研究에서 사용한 年模型인 AR(1)模型, Matals AR(1) 年模型 및 ARMA(1,1) 年模型으로 模擬發生시킨 年流量系列의 Correlogram 이 그림 3에 표시되어 있다. 또한 그림 3에는 比較를 목적으로 前述한바 있는 3個 多季節模型에 의해 模擬發生된 季節流量을 年度別로 合算하여 얻은 年流量系列(各 100年間의 年流量을 사용하여 模型別로 Correlogram 을 작성한 檢

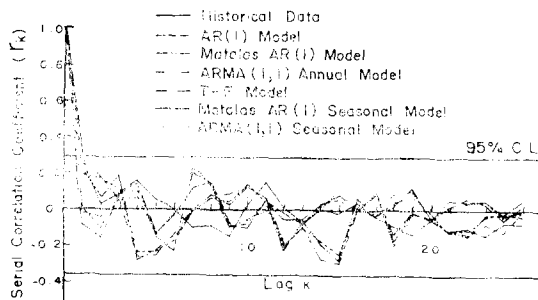


Fig. 3 Correlograms for Standardized Annual Streamflows at Nakdong

과도 표시되어 있다. 그림 3에 표시되어 있는 95% 信賴限界는 洛東의 36年間의 年流量系列($N=36$)에 대하여 式 38로 계산한 것으로 $-0.350 \leq r_k \leq 0.293$ 인 領域을 표시하고 있다.

그림 3에서 年模型인 AR(1) 및 ARMA(1,1) 年模型으로 模擬發生된 年流量系列의 Correlogram 은 實測年流量系列에 대한 것과 같이 r_1 값이 95% 信賴上限界值인 0.293보다는 약간 작으나 $r_1 > 0.2$ 로써 年流量系列의 水文學的 持續性を 강력히 표시해 주고 있으며 또한 Lag 가 커짐에 따라 Correlogram 은 白色雜音의 振動을 하고 있다. 따라서 AR(1) 및 ARMA(1,1) 年模型은 實測年流量系列의 持續성과 偶然성을 대체로 圓滿하게 代表해 주고 있다고 말할 수 있다.

그러나 그림 3의 多季節模型에 대한 Correlogram 3個를 관찰하면 白色雜音의 振動은 他模型 및 實測流量에 대한 것과 비슷하나 r_1 값이 거의 零에 가까운 年流量系列이 水文學的 持續성을 갖지 않는 無作為 時系列(random time series)의 Correlogram 을 방불케 한다. 따라서, 多季節模型에 의해 發生된 季節流量의 年度別 合算으로 얻은 年流量資料系列은 實測年流量系列이 가지는 水文學的 持續性的 保障에 어려움이 있음을 알 수 있다.

4.2 統計特性值의 比較

模擬發生模型의 適正如否를 評價하는 또 하나의 基準은 模擬發生된 流量資料系列의 統計學的 特性值를 實測流量資料系列의 값과 比較 검토하는 것이다. 따라서 여기서는 流量資料系列의 1, 2, 및 3次 모멘트인 平均值, 標準偏差 및 歪度係數를 基準으로 比較검토하기로 한다.

4.2.1 多季節模型에 의한 流量系列의 統計特性值

洛東地點의 實測流量資料(144季節)와 多季節模型인 ARMA(1,1) 多季節(S-ARMA(1,1))模型, Thomas-Fiering(T-F)模型 및 Matals AR(1) 多季節(S-M-AR(1))模型으로 各各 模擬發生시킨 季節流量系列(400季節)의 季節別 平均值, 標準偏差 및 歪度係數를 計算하여 수록한 것이 表 1이다. 表 1에서 ARMA(1,1) 多季節模型에 의한 季節流量의 統計特性值를 實測流量(historical)의 統計值에 對比한 相對誤差를 보면 平均值는 季節에 당파 1.95%~29.8%의 相對誤差를 보이고 標準偏差는 24.39%~146.55%, 歪度係數는 40.07%~354.35%의 相對誤差를 나타내고 있다. 平均值중 流量의 絕對 크기가 작은 1st 季節을 제외하면 相對誤差範圍는 1.85~1.84%內에 있어 標本流量의 中央集中性向을 그 린대로 잘 나타내어 주고 있으나 標準偏差와 歪度係數의 相對誤差가 지나치게 커서 標本流量이 가지는 確率

表 1. 季節流量系列의 統計 特性值 比較(洛東)

流量單位 : m³/sec.day

季節	模型	統計值		標準偏差		歪度係數	
		區分		區分		區分	
		絕對值	相對誤差%	絕對值	%	絕對值	%
1st	Historical	4,856	—	4,307	—	1.091	—
	S-ARMA(1,1)	6,273	29.18	10,619	146.55	4.957	354.35
	T-F	6,462	33.07	11,728	172.30	5.467	401.10
	S-M-AR(1)	5,335	9.86	4,815	11.79	1.812	66.09
2nd	Historical	12,376	—	10,388	—	1.259	—
	S-ARMA(1,1)	12,605	1.85	14,467	39.27	3.401	170.14
	T-F	12,724	2.81	14,181	36.51	3.141	149.48
	S-M-AR(1)	12,356	0.16	9,957	4.15	1.150	8.66
3rd	Historical	48,046	—	33,553	—	1.183	—
	S-ARMA(1,1)	49,892	3.84	42,092	25.45	1.657	40.07
	T-F	50,400	4.90	41,493	23.66	1.465	23.84
	S-M-AR(1)	47,355	1.44	29,222	12.91	0.570	51.82
4th	Historical	7,274	—	6,596	—	1.361	—
	S-ARMA(1,1)	7,059	2.96	8,205	24.39	2.712	99.27
	T-F	7,111	2.24	8,262	25.26	2.672	96.33
	S-M-AR(1)	6,807	6.42	6,242	5.36	1.183	13.08

表 2. 年流量系列의 統計特性值 比較(洛東)

流量單位 : m³/sec.day

模型	統計值		標準偏差		歪度係數	
	區分		區分		區分	
	絕對值	相對誤差%	絕對值	%	絕對值	%
Historical	72,552	—	45,029	—	1.142	—
AR(1)	72,838	0.39	50,709	12.61	1.445	26.53
M-AR(1)	70,574	2.73	41,653	7.50	0.635	44.40
ARMA(1,1)	72,462	0.12	55,027	22.20	1.224	7.18
S-ARMA(1,1)	75,829	4.52	49,144	9.14	1.357	18.83
T-F	76,697	5.71	55,839	24.01	1.113	2.54
S-M-AR(1)	71,853	0.96	41,006	8.93	0.554	51.49

分布型의 分散度歪와 曲度가 잘 반영되지 않은 것으로 나타났다. Thomas-Fiering 模型에 의한 季節流量의 統計值인 平均值, 標準偏差 및 歪度係數도 表 1에 표시된 바와 같이 ARMA(1,1) 多季節模型의 경우와 거의 유사한 絕對誤差範圍를 보이고 있다.

한편, 表 1의 Matalas AR(1) 多季節模型(S-M-AR(1))의 경우 相對誤差를 보면 平均值에서는 0.16~9.86%, 標準偏差에서는 4.15~12.91%, 歪度係數에서는

8.66~66.09%의 相對誤差를 보이고 있어 本研究에서 검토된 3個 多季節模型중 實測流量의 統計學的 特性을 가장 잘 模擬해 주고 있음을 알 수 있다.

4.2.2 年模型에 의한 流量系列의 統計特性值

洛東地點의 年流量系列(36年)과 年模型인 AR(1), Matalas AR(1) 및 ARMA(1,1)年模型에 의해 模擬發生된 年流量系列(各 100年)의 統計特性值가 表 2에 比較되어 있으며 季節模型인 ARMA(1,1) 多季節模型

Thomas-Fiering 模型 및 Matalas AR(1)多季節模型에 의해 發生된 季節流量(各 400季節)을 年度別로 合算하여 얻은 年流量系列(各 100年)의 統計特性值 또한 表 2에 수록하였다.

表 2를 관찰하면 3個 年模型은 平均值에서 0.12~2.73%의 相對誤差를 보이고 있어 標本流量의 中央集中性向을 잘 模擬하고 있으며, 標準偏差에서는 7.50~22.20%, 歪度係數에서는 7.18~44.40%의 相對誤差를 보이고 있어 分散度와 歪曲度도 대체로 만족할 만하며 이 중에서도 특히 ARMA(1,1) 年模型이 가장 우수한 것으로 나타났다.

3個의 多季節模型으로 發生된 季節流量의 合算으로 얻은 年流量系列의 統計值를 表 2로 부터 分析해 보면 平均值는 0.99~5.71%, 標準偏差는 8.93~24.01%, 가리고 歪度係數는 2.54~51.49%의 相對誤差를 나타내고 있다. ARMA(1,1) 多季節模型의 경우를 보면 平均值에서 5%, 歪度係數에서 9%, 歪度係數에서 19%以內에 相對誤差가 들므로 대체로 양호하다고 볼 수 있으며 Matalas AR(1) 多季節模型의 경우도 歪度係數를 제외한 平均值 및 標準偏差는 훌륭하게 模擬하고 있음을 알 수 있다.

5. 結 論

季節流量을 발생시키기 위한 模型으로서 ARMA(1,1)多季節模型을 洛東江의 洛東水位標地點에 적용하였으며 그 結果를 既存의 他 模型에 의한 結果와 比較 검토하였고 年模型에 의한 模擬發生 年流量系列과 季節模型에 의해 發生시킨 季節流量을 年度別로 合算하여 얻은 年流量系列의 統計學的 特性值를 比較檢討한 결과 다음과 같은 結論을 얻었다.

1) 3個月 單位의 實測季節流量과 ARMA(1,1) 多季節模型, Thomas-Fiering 模型 및 Matalas AR(1)多季節模型에 의해 發生시킨 季節流量의 Correlogram을 검토한 결과 모든 경우 季節을 4周期로 하는 季節性이 뚜렷하게 나타났다.

2) 實測季節流量과 ARMA(1,1) 多季節模型에 의한 季節流量系列에서 周期成分을 제거하였을 경우의 Correlogram으로 부터 洛東地點의 季節流量系列이 水文學的 持續性을 가짐을 알 수 있었고 따라서 3個 季節模型의 適用이 合當함을 확인할 수 있었다.

3) 年模型인 AR(1), Matalas AR(1) 및 ARMA(1,1) 模型에 의해 發生시킨 年流量과 實測年流量系列의 Correlogram도 流量系列의 水文學的 持續性을 나타내었으나 多季節模型에 의해 合成된 年流量系列의 Correl-

ogram에서는 資料系列의 水文學的 持續性이 보장되지 못함을 알 수 있었다.

4) 多季節模型에 의한 季節流量系列의 統計特性值를 實測季節流量의 統計值와 比較한 결과 ARMA(1,1)多季節模型은 Thomas-Fiering 模型의 결과와 비슷한 精度를 나타낸 반면 Matalas AR(1) 多季節模型이 가장 우수한 결과를 나타내었다.

5) 年模型에 의한 年流量系列의 統計值를 實測年流量의 統計值와 比較한 결과 AR(1), Matalas AR(1) 및 模型 共히 平均值나 標準偏差 및 歪曲度에서 대체로 비슷한 精度를 나타내었다. 多季節模型으로 合成한 年流量系列의 統計值를 實測 年流量系列과 比較한 결과 ARMA(1,1) 多季節模型이 平均值, 標準偏差 및 歪度係數에서 實測流量系列을 가장 잘 模擬해 주고 있음을 알았다.

以上の 結論을 다시 要約하면 ARMA(1,1) 多季節模型은 현재까지 많이 사용되어온 Thomas-Fiering 模型과 비슷한 精度로 季節流量을 발생시킬수 있을 뿐 아니라 發生된 季節流量의 合算에 의해 얻어지는 年流量系列도 實測流量系列의 統計特性值를 훌륭하게 再演시켜 준다고 할 수 있다. 또한 季節流量의 發生에 있어서 ARMA(1,1) 多季節模型보다 Matalas AR(1) 多季節模型이 더 좋은 결과를 보이고 있는데 이는 本 研究에서 사용한 ARMA(1,1) 多季節模型이 月流量이 아닌 3個月 單位의 季節流量을 發生시킨 模型이기 때문이 아닌가 생각된다. 따라서 追後의 研究로 ARMA(1,1) 月模型의 變數推定 알고리즘을 개발하여 ARMA(1,1) 月模型에 의한 發生流量系列이 月, 季節 및 年流量系列의 統計學的 特性을 얼마나 잘 再演시키는지 究明할 필요가 있다고 하겠다.

謝 辭

本 研究는 1984年度 文教部 學術研究助成費에 의해 수행되었음을 밝히며 本 研究를 가능하게 해 준 文教部 當局에 심심한 感謝를 드린다.

參 考 文 獻

1. Thomas, H.A. and M.B. Fiering, Mathematical Synthesis of Streamflow Sequences for the Analysis of River Basins by Simulation, in *Design of Water Resources Syetems*, edited by A. Maas et al., Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1962

2. Yevdjedich, V., Fluctuation of Wet and Dry Years, 1. Research Data Assembly and Mathematical Models, Hydrology Paper No.1, Colorado State University, Fort Collins, Colo., 1963
3. Beard, L.R., Use of Interrelated Records to Simulate Streamflows, J. Hydraulic Div., ASCE, Vol. 91, No. HY5, 1965
4. Quimpo, R.G., Stochastic Models of Daily River Flow Sequences, Hydrology Paper, No. 18, Colorado State University Fort Collins, Colo., 1967
5. Yule, G., On A Method of Investigating Periodicities in Disturbed Series with Special Reference to Wolf's Sunspot Numbers, Phil. Trans. Royal Society of London, Series A, 226, 267, 1927
6. Walker, G.T., On Periodicity in Series of Related Terms, Proc. Roy. Soc. London, Series A, 131, 518, 1931
7. Kendall, M.G. and A. Stuart, *The Advanced Theory of Statistics*, Vol. 3, *Design and Analysis of Time Series*, 1st ed. Hafner, New York, 1966
8. Box, G.E.P. and G. Jenkins, *Time Series Analysis, Forecasting and Control*, 1st ed. Holden-Day, San Francisco, 1970.
9. Carlson, R.F., A.J.A. Maccormick, and D.G. Watts, Application of Linear Models to Four Annual Streamflow Series, Water Resources Research, Vol. 6, No. 4, 1970
10. O'Connell, P.E., A Simple Stochastic Modeling of Hurst's Law, IAHS-AISH, Publication No. 100, 1971
11. Hipel, K.W., A.I. McLeod, and W.C. Lennox, Advances in Box-Jenkins Modeling, 1. Model Construction, Water Resources Research, Vol. 13, No. 3, 1977
12. Lettenmaier, D.P. and S.J. Burges, Operational Assessment of Hydrologic Models of Long-Term Persistence, Water Resources Research, Vol. 13, No.1, 1977
13. Tao, P.C. and J.W. Delleur, Seasonal and Non-Seasonal ARMA Models in Hydrology, J. Hydraulics Div., ASCE, Vol. 102, No. HY10, 1976
14. Salas, J.D., D.C. Boes, and R.A. Smith, Estimation of ARMA Models with Seasonal Parameters, Water Resources Research, Vol. 18, No.4, 1982
15. Matalas, N.C., Mathematical Assessment of Synthetic Hydrology, Water Resources Research, Vol.3, No.4, 1967
16. Burges, S.J., Some Problems with Log-Normal Markov Runoff Models, J. Hydraulics Div., Vol. 98, HY 9, 1972
17. Salas, J.D., J.W. Delleur, V. Yevdjedich, and W. L. Lane, Applied Modeling of Hydrologic Time Series, Water Resources Publication, Fort Collins, Colo. 1980
18. Young, G.K. and W.C. Piasino, Operational Hydrology Using Residuals, J. Hydraulics Div., ASCE, Vol. 94, HY4, 1968
19. Roesner, L.A. and Yevdjedich, V.M., Mathematical Models for Time Series of Monthly Precipitation and Monthly Runoff, Hydrology Paper, No.15, Colorado State University, Fort Collins, 1966
20. Delleur, J.W., P.C. Tao, and M.L. Kawas, An Evaluation of Practicality and Complexity of Some Rainfall and Runoff Time Series Models, Water Resources Research, Vol. 15, 1976
21. Fiering, M.B. and B.B. Jackson, Synthetic Streamflows, American Geophysical Union, Water Resources Monograph 1, 1971
22. 李舜鐸, 河川流量의 模擬發生에 關한 推計學的 研究, 博士學位 論文, 高麗大學校 大學院, 土木工程學科, 1974
23. Clarke, R.T., *Mathematical Models in Hydrology*, Irrigation and Drainage paper No. 19, UN/FAO, Rome, 1973
24. Anderson, R.L., Distribution of Serial Correlation Coefficients, Annals of Mathematical Statistics, Vol. 8, No.1, 1941