韓國經營科學會誌
第 10券 第 2號
1985年 10月

—研究報告—

변수가 上·下限을 가진 블록대각 구조문제의 分解原理에 관한 小考

Note on Decomposition Principle for
Block-Angular Linear Programming Problem with Bounded Variables

朴 淳 達*

1. 서 론

分解原理(decomposition principle)은 선형계획법 문제 중에서도 블록대각구조를 가진 특수 모형에 의한 解法으로 잘 알려져 있다. 그런데 일반적으로 소개되어 있는 分解原理는 변수가 非陰의 조건을 가진 문제에 대한 해법이다.

블록대각 구조를 가진 선형계획법 문제는 잘 알려져 있는 바와 같이 下部구조를 가진 기관의 경영, 여러가지 종류의 사료배합 문제 등에 일어난다. 그런데 이런 문제의 대부분의 경우가 변수는 上·下限을 가지는 경우가 된다.

이 논문은 非陰의 조건을 가지는 문제에 대한 分解原理를 발전시켜 이런 변수가 上·下限을 가지는 일반적인 문제를 풀 수 있도록 하고자 하는 것이다. 변수가 上·下限을 가지게 되면 우선 進入변수, 탈락변수를 결정하는 문제, 1단계(phase 1) 문제등에 어려움이 나타난다. 이 논문은 이런 어려움들을 극복하고 나아가 主기억 공간이 제한되어 있는 小型電算機에 알맞는 계산방법을 연구하고자 한다.

2. 分解原理

이제 다음과 같은 문제가 주어져 있다고 하자. 즉,

$$
P:\quad
\begin{array}{lll}
\text{Max} & C_0X_0+C_1X_1+\cdots\cdots+C_lX_l & \\
\text{s.t} & A_0X_0+A_1X_1+\cdots\cdots+A_lX_l=b_0 & \\
 & \qquad\quad B_1X_1 \qquad\qquad\qquad\quad =b_1 & (1)\\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad B_lX_l=b_l & \\
 & l_i\leqq X_i\leqq u_i \quad \forall\, i &
\end{array}
$$

단, l_i, X_i, u_i는 n_i차벡타

A_i는 $m_0\times n_i$ 차행열 B_i는 $m_i\times n_i$ 차행열

이 문제에서 변수의 제약이 $X_i\geqq 0$가 되면 보편적인 블록대각 구조의 문제가 된다. 이런 문제의 分解原理에서 잘 알려져 있는 바와 같이 主문제(Master problem)을 (m_0+l)의 제약식으로 만드는 경우와 (m_0+1)개의 제약식으로 만드는 경우의 2가지가 있다. [2, 3] 이와 마찬가지로 문제 P를 主문제로 변환시킬 때도 위와 같은 2가지 방법이 있다. 制約式을 (m_0+1)개로 할 경우와 (m_0+l)개로 할 경우이다. 그런데 후자의 경우에는 基底行列 B^{-1}를 저장하는데 필요한 기억 공간의 차이가 많다.

(m_0+1) 개의 경우는 대략 B^{-1}를 저장하는데 (m_0+1) 개의 경우보다 $2m_0l+l^2$만큼 기억공간이 더 필요하게 된다. 이 기억공간은 l에 따라 차이가 많아지는 것이며 이것은 단지 B^{-1}만 비교했을 때 지만 문제 전체를 풀기 위한 기억공간을 생각했을 때는 더욱 많은 차이가 나타난다. 그래서 이 논문에서는 (m_0+1) 개의 方法을 택하기로 한다.

우선 문제 P를 다음 문제 P′으로 표기해 보자. 즉,

$$
P':\quad
\begin{array}{lll}
\text{Max} & C_0X_0+CX & \\
\text{s.t.} & A_0X_0+AX=b_0 & \\
 & \qquad\quad BX=b & (2)\\
 & l_0\leqq X_0\leqq u_0,\ \ l\leqq X\leqq u &
\end{array}
$$

여기서 $BX=b$는 B가 서로 독립인 블록대각 구조를 가지고 있으므로 이 문제의 可能解는 각 독립블록 문제 즉, $B_iX_i=b_i$의 可能解의 조합으로 만들어 낼 수 있다.

*서울대학교 산업공학과

지금 P′문제의 $BX=\boldsymbol{b}$의 可能解集合을 $\boldsymbol{S}$라고 하자. 그러면

$$\boldsymbol{S}=\{X \mid BX=\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{l}\leq X\leq \boldsymbol{u}\} \tag{3}$$

이라고 표현된다. 그런데 S의 要素중에서 項點解를 X^j라고 표현하자. 이 X^j는 각 部分문제의 정점해 X_i^j들로 이루어져 있다. 그러면 $X(\in S)$는

$$X=\sum_j X^j y_j=\sum_j (X_1^j y_j, \cdots\cdots, X_i^j y_j) \tag{4}$$
$$\sum_j y_j=1, \quad y_j \geq 0$$

로 표현된다.

이것을 식(2)에 대입하면

$$\text{M}: \begin{array}{ll} \text{Max } z=C_0 X_0+C[\sum_j X^j y_j] & \\ \text{s.t.} \quad A_0 X_0+A[\sum_j X^j y_j]=\boldsymbol{b} & \\ \qquad y_j\geq 0,\ \boldsymbol{l}_0\leq X_0\leq \boldsymbol{u}_0 & \end{array} \tag{5}$$

이 된다. 이것을 간단히

$$\text{M}': \begin{array}{l} \text{Max } z=C_0 X_0+\sum_j d_j y_j \\ \text{s.t.} \quad A_0 X_0+\sum_j p_j y_j=\boldsymbol{b}_0 \\ \qquad \sum_j y_j=1 \\ \qquad \boldsymbol{l}_0\leq X_0\leq \boldsymbol{u}_0,\ y_j\geq 0\ \forall j \end{array} \tag{6}$$

이 된다. 결국 문제 P를 푼다는 것은 이 M′를 푼다는 것이 되며 分解原理는 이 M′를 푸는 과정을 이용하여 실제로 M′를 풀지 않고 문제 P를 풀고자 하는 것이다.

이제 M′를 푼다고 하자. 그러면 이 M′는 보편적인 一般限界 선형 계획법 문제이기 때문에 이에 맞는 修正單體法 [2]을 적용하여 풀 수 있다.

그런데 여기서 주의할 점은 문제 M′이 앞부분(블록 0)은 一般限界 문제 형태를 가지고 있지만 뒷부분(부분 문제의 해로 이루어진 부분)은 보편적인 非陰의 조건을 가진 문제형태이다. 그래서 이 문제에 수정 단체법을 적용할 때는 2重구조로 수정단체법을 적용하는 것이 좋다.

이제 문제 M′을 수정단체법으로 푼다고 하자. 그러면 그 주요 부분은 다음과 같다. 단 1단계(phase 1)은 3장에서 다루기로 하겠다.

評價벡타 (Pricing vector)

문제 M′의 基底行列을 B라고 두자. 이 B는 (m_0+1)차行列이다. 그러면

$$\pi=\boldsymbol{d}_B B^{-1}=(\pi_0, \pi_1) \tag{7}$$

단, π_0는 m_0차 벡타, π_1는 스칼라 양이라고 두자, 여기서 $\boldsymbol{d}_B$의 요소 d_j는

$$d_j=CX^j=\sum_i C_i X_i^j$$

또는

$$=C_{0j}$$

이다. 단 C_{0j}는 블록 0의 목적함수계수 즉, C_0의 j번째 요소를 나타낸다. 이것은 기저변수가 x_{0j} (블록 0의 변수벡타 X_0의 j번째 변수)일 수도 있고 y_j일 수도 있기 때문이다. 이에 따라 $d_i=C_{0j}$일 수도 CX^j일 수도 있는 것이다.

할인 (pricing out)

지금 문제 M′의 j列에 대해 할인한다고 하자. 그러면 j列이 블록 0의 列이 될 수도 있고 그렇지 않을 수도 있다. j列이 블록 0의 列이 아닐 경우에는

$$\bar{d}_j=\pi\begin{bmatrix} p_j \\ 1 \end{bmatrix}-d_j=\pi_0 p_j+\pi_1-d_j \tag{8}$$
$$=\pi_0 \sum_i A_i X_i^j-\sum_i C_j X_i^j+\pi_1$$
$$=\sum_i (\pi_0 A_i-C_i) X_i^j+\pi_1$$

가 된다. 만일 j列이 블록 0의 列일 경우에는

$$\bar{d}_j=\pi\begin{bmatrix} A_{0j} \\ 0 \end{bmatrix}-C_{0j}=\pi_0 A_{0j}-C_{0j} \tag{9}$$

가 된다. A_{0j}는 A_0의 j列을 나타낸다.

最適判定

문제 M′에 있어서 블록0는 일반한계문제이다. 그래서 이 부분의 최적조건은 비기저 x_{0j}에 대해

$$x_{0j}\text{가 上限일 경우 } \bar{c}_{0j}\leq 0 \tag{10}$$
$$\text{下限일 경우 } \bar{c}_{0j}\geq 0$$

을 만족시켜야 한다.

한편 뒷 부분에 대해서는

$$\bar{d}_j\leq 0\ \forall j$$

이면 최적이 된다. 문제 M′에서 이 조건을 만족시키는 기저와 그 값을 $\{X_0^*, y_j^*\}$라고 하면 최적해 X^*는

$$X^*=X_0^*+\sum_{j\ \text{기저}} X^{j*} y_j^* \tag{11}$$

가 된다. X^{j*}는 y_j^*로 대표되는 각 부분문제의 해들로 이루어진 $BX=\boldsymbol{b}$의 해이다.

進入변수선택

문제 M′에서 進入변수를 결정할 때는 블록 0에 대해서와 그외 부분에 대해서 두가지를 분리하여야 한다. 블록 0에 대해서는 一般限界 문제에와 같은 방법으로 그외의 부분은 보편적인 非陰조건을 가진 경우와 같이 하면 된다.

그런데 블록 0의 평가는 비교적 쉽지만 그외의부분 즉 d_j에 대한 평가는 모든 부분 문제를 풀어야 함으로 쉽지 않다. 그래서 이 논문에서는 블록 0에서 먼저 進入변수를 선택하고 블록 0에서 進入 변수가 없을 때 비로소 그외 부분에서 進入 변수를 찾기로 한다.

블록 0에서 進入변수를 결정하는 방법은

$$\mathrm{Min}\{\underset{x_{0j}\ \text{하한}}{\mathrm{Min}}\ \bar{c}_{0j},\ \underset{x_{0j}\ \text{상한}}{\mathrm{Min}}\ -\bar{c}_{0j}\}=\bar{c}_{0s} \tag{12}$$

으로 구한다. 이때 $\bar{c}_{os}<0$이면 x_{os}가 進入변수가 된다.

만일 $\bar{c}_{os}\geqq 0$라고 하자. 그러면 블록 0에서는 進入변수가 없다. 그러면

$$\mathrm{Min}\ \bar{d}_j=\bar{d}_s \tag{13}$$

을 구하여 $\bar{d}_s<0$이면 y_s가 進入변수가 된다. 그런데 이 식을 다시 쓰면

$$\underset{j}{\mathrm{Min}}\ \bar{d}_j=\underset{j}{\mathrm{Min}}(\pi_0 p_0-d_j+\pi_1) \tag{14}$$

이 된다. 이 식에서 π_1은 상수이기 때문에 最小化에 영향을 미치지 않는다. 그래서 $\underset{j}{\mathrm{Min}}\ \bar{d}_j$인 y_j를선택하는 것은 결국

$$\underset{j}{\mathrm{Min}}(\pi_0 p_j-d_j)=\underset{j}{\mathrm{Min}}\sum_i(\pi_0 A_i-C_i)X_i^j$$
$$=\sum_i \underset{j}{\mathrm{Min}}(\pi_0 A_i-C_i)X_i^j$$

와 같이 된다. 이것은 결국 각 부분문제 i 즉

$$\begin{aligned}&\mathrm{Min}\ z_i=(\pi_0 A_i-C_i)X\\ &\text{s.t.}\quad B_iX=b_i\\ &\qquad\quad l\leqq X\leqq u\end{aligned} \tag{15}$$

를 풀어 그 값을 합친 것과 같다. 지금 식(15)의 최적해를 X^i, Z_i^*라고 하면

$$\underset{j}{\mathrm{Min}}(\pi_0 P_j-d_j)=\sum_j Z_i^* \tag{16}$$

이 된다. 결국

$$\underset{j}{\mathrm{Min}}\ \bar{d}_j=\sum_j Z_i^*+\pi_1 \tag{17}$$

이 된다.

3. 1단계

앞에서는 초기해가 주어졌을 때부터 시작한다. 그러면 初期解는 어떻게 구할 것인가?

지금 문제 M′에서 적절한 여유변수를 추가하였다고 하자. 즉,

$$\begin{aligned}&A_0X_0+\sum_j P_j y_j+S=b_0\\ &\sum_j y_j+s_y=1\end{aligned} \tag{18}$$

이때 여유변수 S는 최초의 문제 P에서의 여유변수와 같은 역할을 한다. 그러나 s_y는 y_j와 같은 역할을 하는 변수가 된다. 즉, s_y는 부분문제 $BX=b$의 解를 나타내고 있다.

그런데 初期解를 하나 구하기 위하여 문제 M′의 구조변수 즉 X_0와 y_j의 값을 어떻게 줄 것인가? 이들 값을

$$X_0=l_0,\quad y_j=0 \tag{19}$$

라고 두자. 이렇게 하여 얻어지는 基底변수의 값을

$$\begin{aligned}&S=b_0-A_0l_0\\ &s_y=1\end{aligned} \tag{20}$$

으로 두자. 그러면 이 해가 하나의 초기해가 된다. 그런데 이 초기해가 可能解가 될려면 첫째 $l\leqq S\leqq u$를 만족하여야 하고 다음에 s_y로 대표되는 각 부분문제의 해가 각 부분문제의 가능해라야 한다. 만일 이 중에서 어느 하나라도 만족되지 않으면 1단계 (phase 1)으로 가야한다.

그런데 $s_y=1$ 즉 $y_j=0$로 둔다는 것은 무슨 뜻인가? 이것은 결국

$$B_iX_i=b_i,\ l_i\leqq X_i\leqq u_i \tag{21}$$

에서

$$\begin{aligned}&B_iX_i+X_s=b_i\\ &l_i\leqq X_i\leqq u_i,\ X_s\geqq 0\end{aligned} \tag{22}$$

로 두었을 때

$$X_i=0,\ X_s=b_i \tag{23}$$

이라는 해를 뜻한다. 그래서 初期解 식(20)이 可能解가 될려면 S가 上·下限의 조건을 만족시키고 식(23)으로 대변되는 각 부분문제의 초기해가 모두 가능

해이면 비로소 可能解가 된다. 그렇지 않으면 1단계로 가게 되는 것이다.

다음에는 1단계에 해당하는 문제 M′은 무엇인가? 이것은 S가 上·下限을 만족시키느냐와 s_y로 대변되는 각 부분문제의 초기해가 모두 가능해인가의 여부에 따라 달라진다.

1단계식은 다음과 같다. 즉,

$$\begin{aligned}&\text{Min} \sum \alpha_j s_j \\ &\text{s.t.}\ A_0 X_0 + \sum_j P_j y_j + S = b_0 \\ &\qquad \sum_j y_j \quad + s_y = 1 \\ &\qquad l_0 \leqq X_0 \geqq u_0,\ y_j \geqq 0,\ s_y = 0\end{aligned} \tag{24}$$

여기서 $\alpha_j = 1$ $\quad s_j \geqq u_j$ 일경우
$\qquad = -1$ $\quad s_j \leqq l_j$ 일경우

로 둔다. 단 s_j는 S의 要素를 뜻한다. 그리고 s_y에 해당하는 α_j에 대해서는

$\alpha_j = 0$ $\quad s_y$가 모든 부분문제의 가능해
$\quad = 1$ $\quad$ 아닐 경우

로 둔다. 이것은 一般限界문제에서의 1단계 문제와 비슷하다.

4. 計算方法 (Algorithm)

이상을 종합하여 計算方法으로 정리하여 보자.

단계 1 初期解

블록 0에 여유, 잉여 또는 인공변수 S를 도입한다. 그리고 각 블록 i에서는 역시 추가적인 변수 X_{S_i}를 도입한다. 그래서 初期解는

$$\begin{aligned}&X_0 = l_0,\ S = b_0 - A_0 l_0 \\ &X_i = 0,\ X_{S_i} = b_i \\ &\text{기저행열 B=I}\ (m_0+1)\ \text{次行列}\end{aligned} \tag{25}$$

라고 둔다. 만일

$$l_0 \leqq S \leqq u_0 \tag{26}$$

$$l_i \leqq X_{S_i} \leqq u_i \tag{27}$$

이면 이 초기해는 가능해가 되어 2단계 (phase 2)로 간다. 그렇지 않을 경우에는 다음 3가지의 경우가 생긴다.

경우 1 : 식 (26)은 만족, 식 (27)은 만족치 않을 경우

이 경우는 문제 M′을 푸는 단체법의 절차는 2단계 (phase 2)이지만 d_i를 평가하기 위하여 부분문제를 풀 때는 1단계 (phase 1) 상태로 풀어야 한다.

경우 2 : 식 (27)은 만족, 식 (26)이 만족치 않을 때

이 경우에는 문제M′를 푸는 과정을 1단계 (phase 1)으로 풀어야 한다. 즉 식 (24)를 이용하여 풀되 단 d_i를 평가할 때 즉 부분문제를 풀때는 2단계 (phase 2) 상태로 풀어야 한다. 즉 c_{oj}를 평가할 때는 1단계로, d_j를 평가할 때는 2단계로 평가한다.

경우 3 : 식 (26), 식 (27) 모두 만족치 않을 경우

이 경우에는 c_{oj}, d_j를 평가할 때 모두 1단계 (phase 1)으로 풀어야 한다.

단계 2 單體乘數

단체승수 $\pi = b_B B^{-1} = (\pi_0, \pi_1)$ 단 π_1 스칼라를 구한다. 여기서 $d_j = CX^j$이거나 c_{oj}이다.

단계 3 할인 및 進入변수

(1) 블록 0

먼저 블록 0에 대해 할인한다. 즉,

$\bar{c}_{oj} = \pi_0 A_{0j}$를 구한다. 다음에

$$\text{Min}\ \bar{c}_{oj} = \bar{c}_{os}$$

를 구한다. 만일 $\bar{c}_{os} \geq 0$이면 (2)로 넘어간다. 만일 $\bar{c}_{os} < 0$이면 x_{os}가 進入변수가 된다. 그리고 단계 4로 간다.

(2) 기타 블록

$\bar{d}_i$를 구한다. 이 $\bar{d}_j$은 식 (8)로 구한다. 물론 이 때 $\sum_j (\pi_0 A_i - C_i) X_i^j$를 구하기 위해서는 각 블록에 대해

$$\begin{aligned}&\text{Min}\ (\pi_0 A_i - C_i) X_i \\ &\text{s.t.}\quad B_i X_i = b_i \\ &\qquad l_i \leq X_i \leq u_i\end{aligned} \tag{28}$$

을 풀어 그 최적해를 X_i^*, 그리고 그 때의 목적함수의 값을 Z_i^*라고 하자. 그러면

$$\text{Min}\ \bar{d}_j = \bar{d}_S = \sum_j Z_i^* + \pi_1 \tag{29}$$

이다. 만일 여기서 $\bar{d}_S \geq 0$이면 이 문제의 최적해를 찾은 것이며 이 때의 최적해는 식 (11)과 같다. 만일 $\bar{d}_S < 0$이면 y_S가 進入변수가 된다.

단계 4 進入列수정

(1) 進入列이 블록 0에서 나올 경우

문제 M′의 블록 0의 S째列은 $[A_{0S}\ 0]^T$이다. 그래서 進入列을 수정하면

$$F = \begin{bmatrix} A_{OS} \\ c \end{bmatrix} = B^{-1} \begin{bmatrix} A_{OS} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{30}$$

와 같이 된다.

(2) 進入列이 블록 0가 아닐 경우

이 경우 進入列은 $[P_s, 1]^T$인데 이 P_j는 식(28)에서 구해진 최적해 X_i^*를 이용하여

$$P_s = \sum_j A_j X_i^*$$

로 구해진다. 그래서 이 進入列을 수정하면

$$F = B^{-1}\begin{bmatrix} P_s \\ 1 \end{bmatrix} = B^{-1}\begin{bmatrix} \sum_i A_i X_i^* \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (31)$$

이 된다.

단계 5 基底탈락변수

우선 문제 M′의 우변상수$[b \quad 1]^T$를 수정하여야 한다. 이것은

$$R = \begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix} = B^{-1}\begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (32)$$

로 구해진다. 그 다음 單體法에서와 같이 比率검정 (Ratio test)으로써 기저탈락변수를 선택한다.

단계 6 B^{-1}의 수정.

進入변수와 탈락변수가 결정되면 보편적인 單體法에서와 같이 B^{-1}를 수정한다.

이상과 같은 計算方法으로 一般限界를 가진 블록대각 구조문제를 풀 수 있다.

5. 結 論

이상에서 변수가 上·下限을 가진 블록 대각 구조문제를 푸는 分解原理를 소개하였는데 물론 변수가 上·下限을 가진 경우라도 이 上限·下限 조건을 모두 制約式으로 표현하면 非陰조건을 가진 블록대각 구조문제되어 일반적인 分解原理로 풀 수 있다. 그러나 이렇케 上·下限을 처리하면 制約式의 갯수가 많이 늘어나 小型電算機를 염두에 둘 때는 바람직하지 못하다. 小型전산기를 기억공간이 제한되어 있어 計算方法에서 이 기억공간을 고려하는 것이 대단히 중요하다. 보통 64K를 가진 소형전산기를 선형계획법문제를 풀 때는 A行列 크기가(80×80)를 넘기 힘들다. 하물며 이 문제가 블록대각 구조를 가질 때는 각 부분문제의 크기가 얼마나 작아야 하겠는가? 부분 문제의 갯수가 8개라면 각 부분문제의 크기가 (10×10) 보다 작아야 한다.

그러나 여기 소개한 방법을 이용하면 부분문제의 갯수와 상관없이 부분문제의 크기를 거의 (80×80)으로 유지할 수 있다.

참 고 문 헌

1. 朴淳達, 一般限界문제의 感度分析 한국 OR학회지, 7권 2호 1982
2. 朴淳達, 線型計劃法 및 그 관련분야, 大英社, 1983, pp 120－128
3. Lasdon, L. S., Optimization Theory for Large Systems, Macmillan, 1970, Chapter 3