韓國經營科學會誌
第10卷 第1號
1985年 4月

블록대각 構造를 지닌 2段階確率計劃法의 分解原理

A Decomposition Method for Two Stage Stochastic Programming with Block Diagonal Structure

김 태 호*
박 순 달*

Abstract

This paper develops a decomposition method for stochastic programming with a block diagonal structure. Here we assume that the right-hand side random vector of each subproblem is different each other. We, first, transform this problem into a master problem, and subproblems in a similar way to Dantzig-Wolfe's Decomposition Principle, and then solve this master problem by solving subproblems. When we solve a subproblem, we first transform this subproblem to a Deterministic Equivalent Programming (DEP). The form of DEP depends on the type of the random vector of the subproblem. We found the subproblem with finite discrete random vector can be transformed into alinear programming, that with continuous random vector into a convex quadratic programming, and that with random vector of unknown distribution and known mean and variance into a convex nonlinear programming, but the master problem is always a linear programming.

1. 서 론

이 논문에서 다루려고 하는 문제는 블록대각구조를 가진 2단계 확률계획법문제이다.

이런 형태의 문제는 본사와 여러개의 공장이 있고 여러 종류의 생산품을 각공장에서 생산하는 경우에 본사의 생산계획을 입안하고자 할 때 일어날 수 있다. 만일 각 생산품에 대한 수요가 확정적이면 다음 문제 N과 같이 표현되고 이 문제 N은 Dantzig-Wolfe의 분해원리(Decomposition Principle)나 기타의 분해해법이 적용될 수 있다.

$$
\begin{aligned}
N:\ & \text{Min } C^1X_1+C^2X_2+\cdots+C^lX_l \\
& \text{s.t. } A^1X_1+A^2X_2+\cdots+A^lX_l \leqq \boldsymbol{b} \\
& \qquad T^1X_1 \qquad\qquad\qquad\qquad =\boldsymbol{b}_1 \\
& \qquad\qquad T^2X_2 \qquad\qquad\qquad =\boldsymbol{b}_2 \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\ddots \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad T^lX_l=\boldsymbol{b}_l \\
& X_1,\cdots,\ X_l\geqq O
\end{aligned}
$$

여기서 C^j는 비용을 나타내는 벡터이고 A^j는 단위당 사용되는 자원량을 나타내는 행렬이며 T^j는 technological coefficient를 나타내는 행렬이다.

그러나 각각의 수요량을 나타내는 벡터 $\boldsymbol{b}_j$에 불확실성(Uncertainty)이 존재하고 어떠한 확률분포를 따르는 경우에는 이 벡터들을 ξ_j로 나타내기로 하며 이 때는 다음 문제 P와 같이 표현될 수 있다.

$$
\begin{aligned}
& \text{Min } C^1X_1+\cdots+C^lX_l+E[\text{Min}\{q_1^+Y_1^+ \\
& \qquad +q_1^-Y_1^-+\cdots+q_l^+Y_l^++q_l^-Y_l^-\}] \\
\text{P:}\ & \text{s.t. } A^1X_1+\cdots+A^lX_l \qquad\qquad\qquad\qquad \leqq \boldsymbol{b} \\
& \quad T^1X_1 \qquad +I_1Y_1^+-I_1Y_1^- \qquad\qquad\qquad\qquad =\xi_1 \\
& \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad\qquad\qquad \ddots \\
& \qquad\qquad T^lX_l \qquad\qquad\qquad +I_lY_l^+-I_lY_l^-=\xi_l \\
& X_1,\cdots,\ X_l\geqq 0,\ Y_1^+,\cdots,\ Y_l^+\geqq 0,\ Y_1^-,\cdots,\ Y_l^-\geqq 0.
\end{aligned}
$$

*서울대학교 공과대학 산업공학과

여기서

I_j : $(m_j \times m_j)$의 단위행렬

C^j : $(1 \times n_j)$의 비용을 나타내는 벡터

A^j : $(m_0 \times n_j)$의 자원 소요를 나타내는 행렬

X_j : n_j개의 요소를 가지는 변수벡터

T^j : $(m_j \times n_j)$의 행렬

$T^j X_j$: X_j에 대한 m_j품목들의 생산량

Y_j^+ : 부족량$(=\xi_j - T^j X_j)$ 벡터

Y_j^- : 잉여량$(=T^j X_j - \xi_j)$ 벡터

q_j^+ : m_j개의 요소를 가지는 부족비용을 나타내는 벡터

q_{ij}^+ : q_j^+의 한 요소이며 $q_{ij}^+ \geqq 0$, $i=1, \cdots, m_j$

q_j^- : m_j개의 요소를 가지는 잉여비용을 나타내는 벡터

q_{ij}^- : q_j^-의 한 요소이며 $q_{ij}^- \geqq 0$, $i=1, \cdots m_j$

ξ_j : 어떤 확률분포를 따르는 벡터(random vector)

ξ_{ij} : ξ_j의 한 요소, $i=1, \cdots, m_j$

그런데 만일 ξ_j가 모두 같은 형태의 확률분포를 따르면 다음 P^1와 같이 단순한 2단계 확률계획법으로 표현될 수 있다.

$$
\begin{aligned}
P^1 : \text{Min} \quad & CX + E[\text{Min}\{q^+Y^+ + q^-Y^-\}] \\
\text{s.t.} \quad & AX \qquad\qquad\qquad\qquad \leqq \boldsymbol{b} \\
& TX \qquad + IY^+ - IY^- \quad = \xi \\
& X \geqq 0, \ Y^+ \geqq 0, \ Y^- \geqq 0
\end{aligned}
$$

여기서, ξ : random vector

I : 단위행렬

문제 P^1와 같은 2단계확률계획법은 ξ가 따르는 분포유형에 따라 해법이 달라지며 Dantzig[3], Kohler와 Wets[11], Agizy[1], Elmaghraby[6], Strazicky[13], Slyke Wets[15] 등이 연구하였다. 특히 마지막 두 논문에서는 문제 P^1를 E와 같은 확정적등치계획법(Deterministic Equivalent Programming : DEP)이라는 선형계획법 형태로 변환시켜 푸는 해법을 소개하고 있다. 이 논문에서도 이런 기법을 활용하게 된다.

$$
\begin{aligned}
E : \text{Min} \quad & CX + Q(X) \\
\text{s.t.} \quad & AX \leqq \boldsymbol{b} \\
& X \geqq O
\end{aligned}
$$

여기서,

$Q(X) = E[\text{Min}\{q^+Y^+ + q^-Y^- \mid IY^+ - IY^- = \xi - TX, X \geqq O\}]$.

그러나 만일 ξ_j가 따르는 확률분포가 서로 상이한 경우는 전술한 기법을 사용하여 문제를 풀 수 없다. 그래서 이 논문에서는 문제 P의 각 부분문제 $T^i X_i + (I_i Y_i^+ - I_i Y_i^-) = \xi_i$가 서로 독립이고 각 ξ_i가 서로 상이한 경우 Dantzig-Wolfe 분해원리와 유사한 방법을 연구하고자 한다.

2. 분해원리(Decomposition Principle)

문제 P는 각 부분문제가 독립이기 때문에 다음의 문제 $\bar{P}$와 같이 표현할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
\bar{P} : \text{Min} \quad & C^1X_1 + E[q_1^+Y_1^+ + q_1^-Y_1^-] + \cdots \\
& \quad + C^lX_l + E[q_l^+Y_l^+ + q_l^-Y_l^-] \\
\text{s.t.} \quad & A^1X_1 \qquad\qquad\qquad \cdots + A^lX_l \quad \leqq \boldsymbol{b} \\
& T^1X_1 + I_1Y_1^+ - I_1Y_1^- \qquad\qquad\qquad = \xi_1 \\
& \qquad\ddots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad T^lX_l + I_lY_l^+ - I_lY_l^- = \xi_l \\
& X_1, \cdots, X_l \geqq O, \ Y_1^+, \cdots, Y_l^+ \geqq O, \ Y_1^-, \cdots, Y_l^- \geqq O
\end{aligned}
$$

이 문제 $\bar{P}$의 구조는 확정적 형태의 분해원리문제와 비슷하므로 Dantzig-Wolfe의 분해원리와 유사한 절차를 활용할 수 있다. 즉 문제 $\bar{P}$를 풀 때, 문제 $\bar{P}$의 解는 부분문제 j 즉,

$$T^jX_j + I_jY_j^+ - IY_j^- = \xi_j \qquad (1)$$

의 극점해의 볼록결합으로 이루어진다는 사실을 활용하여 부분문제를 문제 $\bar{P}$를 풀어 갈 수 있다.

지금 이 부분문제 j의 극점해를 X_i라고 하자 그러면 이 부분문제의 解 X_j는 이들 극점해의 볼록결합으로 표현된다. 즉,

$$X_j = \Sigma^k \lambda_j^k X_j^k, \ \Sigma^k \lambda_j^k = 1, \ \lambda_j^k \geqq 0$$

이것을 문제 $\bar{P}$에 대입하면 다음과 같은 主문제(master problem) M이 생긴다.

$$
\begin{aligned}
M : \text{Min} \quad & \sum_{j=1}^{l} \Sigma_k \, d_j^k \lambda_j^k \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{l} \Sigma_k \, P_j^k \lambda_j^k \leqq \boldsymbol{b} \\
& \Sigma_k \lambda_j^k = 1, \ j = 1, \cdots l \\
& \lambda_j^k \geqq 0
\end{aligned}
$$

단,

$d_j^k = C^jX_j^k + E[\text{Min}\ (q_j^+Y_j^+ + q_j^-Y_j^-)]$

$P_j^k = A^jX_j^k$

이 문제 M의 d_j^k에 대한 할인가(reduced cost)를 구해보면,

$$
\begin{aligned}
\bar{d}_j^k &= d_j^k - (\Pi_0, \Pi_1, \Pi_2, \cdots, \Pi_l) \begin{pmatrix} A^jX_j^k \\ e_j \end{pmatrix} \\
&= \{(C^j - \Pi_0 A^j) X_j^k + E[\text{Min}\ (q_j^+Y_j^+ \\
&\qquad + q_j^-Y_j^-)] - \Pi_j\}
\end{aligned}
$$

Π_0 : 문제 $\bar{P}$의 결합제약식 $\sum_{j=1}^{l} A^jX_j \leqq \boldsymbol{b}$에 대한 dual vector

Π_j : j번째 볼록 제약식에 대한 dual vector, $j=$

$1, \cdots l$

e_j : j 번째 요소만 1 인 기본벡터

이므로

$$\underset{j,k}{\mathrm{Min}}\ \bar{d}_j^k = \underset{j}{\mathrm{Min}}\{\underset{k}{\mathrm{Min}}\{(C^j - \Pi_0 A^j) X_j^k - E[\mathrm{Min}\ (q_j^+ Y_j^+ + q_j^- Y_j^-)]\} - \Pi_j\}$$

가 되고 이 $\underset{j,k}{\mathrm{Min}}\ \bar{d}_j^k$ 를 구한다는 것은 다음의 문제 S 를 풀어 해를 구하는 것과 같다.

$$\mathrm{S}:\ \mathrm{Min}\ \tilde{C}_j X_j + E[\mathrm{Min}\ (q_j^+ Y_j^+ + q_j^- Y_j^-)]$$
$$\left.\begin{array}{l} \text{s.t.}\ \ T^j X_j + I_j Y_j^+ - I_j Y_j^- = \xi_j \\ \qquad X_j \geqq 0,\ \ Y_j^+ \geqq 0,\ \ Y_j^- \geqq 0 \end{array}\right\} j = 1, \cdots, l$$

단, $\tilde{C}_j = C^j - \Pi_0 A^j$

그래서 문제 P 를 푼다는 것은 문제 $\bar{P}$ 를 푸는 것이고 이것은 문제 S 와 문제 M 을 풀어서 해를 구할 수 있다.

그런데, 여기서 문제 M 은 선형계획법 형태를 가지고 있으나 문제 S 는 그렇지 않다. 그래서 결국 문제 P 를 푼다는 것은 문제 S 가 어떤 형태를 지니느냐에 따라 그 난이도가 결정된다.

3. 부분문제의 解

분해원리를 이용할 때는 부분문제 S 의 극점해를 구할 필요가 있다. 이 부분문제 S 의 극점해를 구하는 방법은 이 부분문제 S 를 확정적동치계획법(DEP)로 변환시켜 푸는 방법을 택한다. 그러면 이 DEP 는 ξ_j 의 종류에 따라 달라진다. 각 경우에 이 DEP 가 어떤 형태를 취하는지 보기로 하자.

(1) ξ_j 가 유한 이산적 확률벡터를 따르는 경우

ξ_j 가 발생할 사상이 t^0 가지이며 그 각각을 ξ_j^t 라고 하며 그에 대응한 확률을 P^t 라고 한다. 그러면 이때 문제 S 는 다음과 같은 형태의 확정적 동치계획법이 된다.

$$\mathrm{S}_1:\ \mathrm{Min}\ C_j X_j + P^1 q_j^+ Y_{j1}^+ + P^1 q_j^- Y_{j1}^- + \cdots + P^{t0} q_j^+ Y_{jt_0}^+ + P^{t0} q_j^- Y_{jt_0}^-$$

$$\begin{array}{ll} \text{s.t.}\ \ T^j X_j + I_j Y_{j1}^+ - I_j Y_{j1}^- & = \xi_j^1 \\ \quad\ \vdots & \quad\ \vdots \\ \quad\ T^j X_j \qquad\qquad + I_j Y_{jt_0}^+ - I_j Y_{jt_0}^- & = \xi_j^{t0} \end{array}$$

$$X_j \geqq 0,\ \ Y_{j1}^+, \cdots, Y_{jt_0}^+, Y_{j1}^-, \cdots, Y_{jt_0}^- \geqq 0$$

이 문제 S_1 을 직접 풀어서 해를 구할 수 있으나 더욱 간단한 방법은 문제 S_1 의 쌍대문제를 푸는 것이다. 이 쌍대문제는 다음과 같다.

$$\mathrm{DS}_1:\ \mathrm{Max}\ \xi_j^1 W_1 + \xi_j^2 W_2 + \cdots + \xi_j^{t0} W_{t0}$$
$$\text{s.t.}\ \ T^{j\prime} W + T^{j\prime} W_2 + \cdots + T^{\prime} W_{t0} \leqq C_j$$
$$\tilde{q}_{jt}^- \leqq W_t \leqq \tilde{q}_{jt}^+,\ \ t = 1, \cdots, t^0$$

단, $\tilde{q}_{jt}^+ = P^t q_j^+$ $(m_j \times 1)$벡터

$\tilde{q}_{jt}^- = P^t q_j^-$ $(m_j \times 1)$ 벡터

W_t : $(m_j \times 1)$ 벡터

이 식은 바로 선형계획법형태이다. 그래서 ξ_j 가 유한이산적 확률벡터를 따르는 경우에는 문제 P 가 Dantzig-Wolfe 의 분해원리와 같은 방법으로 풀 수 있다.

(2) ξ_j 가 연속적 확률벡터를 따르는 경우

벡터 q_j^+ 와 q_j^- 에 대해 다음을 정의한다.

$q_j^+ = (q_{1j}^+, q_{2j}^+, \cdots, q_{mjj}^+)$

$q_j^- = (q_{1j}^-, q_{2j}^-, \cdots, q_{mjj}^-)$

이 경우에 $\xi_{ij} \in \xi_j$ 인 ξ_{ij} 의 확률분포함수 $f_{ij}(\xi_{ij})$가 알려져 있으므로

$$E[\mathrm{Min}\ \{q_j^+ Y^+ + q_j^- Y_j\}^-]$$
$$= \mathrm{Min}\ [\sum_{i=1}^{m_j} \{q_{ij}^+ \int_{ij}^{\infty} (\xi_{ij} - Z_i) f_{ij}(\xi_{ij}) d\xi_{ij} + q_{ij}^- \int_0^{z_i} (Z_i - \xi_{ij})\ f_{ij}(\xi_{ij}) d\xi_{ij}]$$

가 되고 이때의 $Z = (Z_1, Z_2, \cdots, Z_{mj}) = T^j X_j$ 에 해당된다.

그러므로 문제 S 에 대한 확정적동치계획법은 다음과 같다.

$$\mathrm{S}_2:\ \mathrm{min}\tilde{C}_j X_j + \sum_{i=1}^{m_j} G_i(Z_i)$$
$$\text{s.t.}\ \ T^j X_j - Z = 0$$
$$X_j \geqq 0$$

단,

$$G_i(Z_i) = q_{ij}^+ \int_{Z_i}^{\infty} (\xi_{ij} - Z_i)\ f_{ij}(\xi_{ij})\ d\xi_{ij} + q_{ij}^- \int_0^{z_i} (Z_i - \xi_{ij})\ f_{ij}(\xi_{ij}) d\xi_{ij}.$$

이 경우의 $G_i(Z_i)$는 $f_{ij}(\xi_{ij})$의 형태에 의해 결정되는바, ξ_{ij} 가 $U_i \leqq \xi_{ij} \leqq V_i$ 에서 일양분포을 따른다면,

$$G_i(Z_i) = \{(q_{ij}^+ - q_{ij}^-)/\ 2(V_i - U_i)\} Z_i^2 - \{(q_{ij}^+ V_i + q_{ij}^- U_i)/(V_i - U_i)\} Z_i + (q_{ij}^+ V_i^2 + q_{ij}^- U_i^2)/2(V_i - U_i)$$

가 되므로 문제 S_2 는 다음의 2차 계획법(quadratic programming)이 된다. 즉,

$$\mathrm{S}_3:\ \mathrm{Min}\ C_j X_j + (1/2)\ Z' \bar{Q} Z + qZ + C_0$$
$$\text{s.t.}\ \ T^j X_j - Z = 0$$
$$X_j \geqq 0$$

단,

$$\bar{Q} = \begin{pmatrix} \dfrac{q_{1j}^+ + q_{1j}^-}{V_1 - U_1} & & & \\ & \dfrac{q_{2j}^+ + q_{2j}^-}{V_2 - U_2} & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \dfrac{q_{mj}^+ + q_{mj}^-}{V_{mj} - U_{mj}} \end{pmatrix}$$

$$\bar{q}=[-(q_{1j}^{+}V_1+q_{1j}^{-}U_1)/(V_1-U_1),\cdots-(q^{m_j}{}_{j}^{+}V_{mj}+q_{mjj}^{-}U_{mj})/(V_{mj}-U_{mj})]$$

$$C_0=\sum_{i=1}^{m_j}\{(q_{ij}^{+}V_i^2+q_{ij}^{-}U_i^2)/2(V_i-U_i)\}$$

또한 문제 S_3는 $T^jX_j=Z$를 이용하여 더욱 간단히 표현된다.

$$S_4: \text{Min } \bar{q}X_j+1/2\ X_j'\ QX_j+C_0$$

$$\text{s.t. } X_j\geqq 0$$

단, $\bar{\bar{q}}=\tilde{C}_j+\bar{q}T^j$

$\bar{\bar{Q}}=T^{j\prime}QT^j$

그런데 이 문제 S_4에 대해서는 다음의 정리 1이 성립한다.

정리 1 : 문제 S_4의 $\bar{\bar{Q}}$는 positive semi-definite (PSD)이다.

증명 : $q_{ij}^{+}+q_{ij}^{-}\geqq 0$이고 $V_i-U_i>0$이 항상 성립하므로 문제 S_3에서 $(q_{ij}^{+}+q_{ij}^{-})/(V_i-U_i)\geqq 0$이 항상 성립한다. 따라서 임의의 Y에 대해 $Y'\bar{\bar{Q}}Y\geqq 0$이 되므로 $\bar{\bar{Q}}$는 PSD가 된다. 마찬가지로 $Y'\bar{\bar{Q}}Y=\bar{Y}'T^{j\prime}\bar{Q}T^jY$이므로 $Y_0=T^jY$로 두면 이 임의의 Y_0에 대해서 $Y_0'\bar{Q}Y_0\geqq 0$이 항상 성립하므로 $Y'\bar{\bar{Q}}Y=Y_0'\bar{Q}Y_0\geqq 0$이 항상 성립한다. 따라서 $\bar{\bar{Q}}$는 PSD이다 [Q. E. D] 따라서 문제 S_4의 목적함수는 볼록함수가 되어 이 부분문제의 국부최적(local optimum)은 바로 전체최적(global optimum)이 된다.

그리고 나아가 $f_{ij}(\xi_{ij})$가 지수분포 즉 $e^{-\xi_{ij}}(\lambda=1$로 가정함) 일 경우에는 일양분포로 치환이 가능하므로 동일한 2차 계획법의 형태가 된다. 그외 일반적인 연속 분포의 경우에는 weighted sums of uniform distribution으로 근사할 수 있으므로 2차 계획법의 형태로 부분문제가 근사화될 수 있다.

이 경우에는 부분문제가 비선형계획법이고 主문제가 선형계획법인 상태가 된다. 따라서 Sandblom [12]의 비선형계획법의 분해원리를 이용하여 풀 수 있다.

(3) ξ_j가 따르는 분포를 알지 못하나 평균(μ_j)과 분산(σ_j^2)만을 아는 경우

이 경우에는 $f_{ij}(\xi_{ij})$에 대한 정보를 가지고 있지 못하고 단순히 평균과 분산만을 아는 경우이므로 가능한 분포로부터 발생하는 최대비용을 최소화하는 Minimax 과정을 도입해야 한다[8].

이제 문제 S에서 $Z_i=(T^jX_j)_i-\mu_{ij}$를 치환하여 보면,

$$E[\text{Min } q_j^{+}Y_j^{+}+q_j^{-}Y_j^{-}]$$
$$=\text{Min}\{\sum_{i=1}^{m_j}[q_{ij}^{-}(Z_i-\mu_{ij})+(q_{ij}^{+}+q_{ij}^{-})\int_{Z_i}^{\infty}(\xi_{ij}-Z_i)\ f_{ij}(\xi_{ij})\ d\xi_{ij}]\}$$

이므로 Mimimax 과정을 통하면,

$$\text{Max}\int_{Z_i}^{\infty}(\xi_{ij}-Z_i)\ f_{ij}(\xi_{ij})\ d\xi_{ij}$$
$$=1/2[\{\sigma_{ij}^2+(Z_i-\mu_{ij})^2\}^{1/2}-(Z_i-\mu_{ij})]$$

가 된다. [8]. 따라서 부분문제의 형태는 다음과 같다.

$$S_5: \text{Min } \tilde{C}_jX_j+\sum_{i=1}^{m_j}\{q_{ij}^{-}Z_i+\tfrac{1}{2}(q_{ij}^{+}+q_{ij}^{-})((\sigma_{ij}^2+Z_i^2)^{1/2}-Z_i)\}$$

$$\text{s.t. } T^jX_j-Z=\mu_j$$

단, $\mu_j=(\mu_{1j},\mu_{2j},\cdots.\ \mu_{mj})$

이 문제 S_5의 목적함수에 대해서는 다음의 정리 2가 성립한다.

정리 2 : 문제 S_5의 목적함수에 대한 Hessian Matrix H는 항상 $H\geqq 0$이다.

증명 : 문제 S_5의 Hessian Matrix H를 구해보면

$$H=\left[\begin{array}{c|cccc} 0 & & 0 & & \\ \hline 0 & \tilde{q}_{1j}\tilde{V}_{1j} & & & 0 \\ & \tilde{q}_{2j}\tilde{V}_{2j} & & & \\ & 0 & \ddots & & \\ & & & \tilde{q}_{mjj}\tilde{V}_{mjj} & \end{array}\right]$$

$$\tilde{q}_{ij}=q_{ij}^{+}+q_{ij}^{-}$$

$$\tilde{V}_{ij}=(\sigma_{ij}^2+Z_i^{-1/2}\ \{1-Z_i^2/(\sigma_{ij}^2+Z_i^2)\}$$

가 된다. $q_{ij}\geqq 0$이다 $\tilde{V}_{ij}\geqq 0$이 항상 성립하므로 $\tilde{q}_{ij}\tilde{V}_{ij}\geqq 0$이 되어 $H\geqq 0$이 항상 성립한다[Q. E. D].

따라서 문제 S_5는 선형제약식을 가진 볼록비선형계획법이 되며 S_4와 마찬가지로 부분문제의 국부최적이 항상 전체최적이 된다.

그리고 이 경우에도 앞의 경우와 같이 부분문제는 비선형계획법, 그리고 主문제는 선형계획법의 분해원리를 적용하면 된다.

4. 결 론

이 논문은 제약식이 블록대각구조를 가지고 각 블록의 우변상수항이 서로 다른 확률분포를 따르는 2단계 확률계획법 문제의 解法을 제시하고 있다.

이 解法은 Dantzig-Wolfe의 분해원리와 비슷한 分解解法으로써 문제를 主문제와 부분문제로 변환시켜 풀게 된다. 部分문제는 확정적모형(확정적동치계획법)으로 변환시켜 풀게 되는데 이 때 각 블록의 우변확률벡타의 종류에 따라 다른 형태의 확정적모형으로 변환된다. 여기서 가장 깊은 관심사는 原문제를 主문제와 부분문제로 변환시킬 때 어떤 형태의 모형으로 변환되느냐 이다.

이 연구에서는 우변확률벡타가 유한한 이산적확률분

포를 가질 때는 부분문제가 선형계획법으로 표현되고, 연속적확률분포를 가질 때는 부분문제가 2차 계획법으로 표현되며, 평균과 분산만을 아는 확률분포를 가질 때는 부분문제가 볼록비선형계획법으로 표현될 수 있음을 발견하였다. 그리고 어떠한 경우에도 主문제는 선형계획법으로 표현될 수 있음을 발견하였다.

참 고 문 헌

1. M. E. Agizy, "Two-Stage Programming Under Uncertainty with Discrete Distribution Function", *O. R.*, Vol. 15, No. 1, 1967.
2. A. Charnes and W. W. Cooper, "Chance-Constrained Programming", *Mgt. Sci.*, Vol. 6, No. 1, 1959
3. G. B. Dantzig, "Linear Programming Under Uncertainty", *Mgt. Sci.*, Vol. 1, No. 3, 1955.
4. G. B. Dantzig and P. Wolfe, "Decomposition Principle for Linear Programs", *O. R.*, Vol. 8, 1960.
5. M. A. H. Dempster, *Stochastic Programming*, Academic Press, New York, 1980.
6. S. E. Elmagraby, "Allocation Under Uncertainty When the Demand Has Continuous D. F.", *Mgt. Sci.*, Vol. 6, No. 3, 1970.
7. S. J. Garstka and D. P. Rutenberg, "Computation in Discrete Stochastic Programs With Recourse", *O. R.*, Vol. 21, No. 1, 1973.
8. R. Jagannathan, "Minimax Procedure for a Class of Linear Programs Under Uncertainty", *O. R.*, Vol. 25, No. 1, 1977.
9. V. V. Kolbin, *Stochastic Programming*, D. Reidel, 1977.
10. J. K. Sengupta, *Stochastic Programming*, North Holland, 1972.
11. D. Koher and R. Wets, "Programming Under Uncertainty", *Mathematical Note No.* 387, Mathematics Research Lab., Boeing Scientific Research Laboratories, 1964.
12. C. Sandblom, "A Computational Investigation into Nonlinear Decomposition", *NATO Conference Proceeding*, 1972.
13. B. Strazicky, "Some Results Concerning an Algorithm for the Discrete Recourse Problem", *The Institute of Mathematics and Its Applications Conference Proceedings*, 1974.
14. R. Wets, "Stochastic Programs with Fixed Recourse : The Equivalent Deterministic Program", *SIAM Review* Vol. 16, No. 3, 1974.
15. Van Slyke and R. Wets, "L-Shaped Linear Programs with Applications to Optimal Control and Stochastic Programming", *SIAM. J. Appl. Math.*, Vol. 17, No. 4, 1969.
16. 김태호, "볼록대각구조를 지닌 2단계확률계획법의 분해해법에 관한 연구", 서울대학교 공대 석사논문, 1985