

論 文

大 韓 造 船 學 會 誌
 第22卷 第3號 1985年 9月
 Journal of the Society of
 Naval Architects of Korea
 Vol. 22, No. 3, September 1985

2차원 자유표면파 문제에서의 국소 유한요소법의 응용

길 현 권* · 배 광 준*

An Application of the Localized Finite Element Method to Two-dimensional
 Free Surface Wave Problems

Hyun Kwon Kil* · K.J. Bai*

Abstract

The numerical calculation for solving boundary-value problem related to potential flows with a free surface is carried out by application of the localized finite element method. Only forced motion of 2-D body in infinitely deep fluid is considered, although this schemes is equally applicable to any first order time-harmonic problems of similar nature.

The infinite domain of the fluid is separated into the inner flow field and the outer flow field with common inter-surface boundary. The finite element method is applied to obtain the solution in the inner flow field and the Green functions are utilized to represent the solution in the outer flow field. At the inter-surface boundary, the continuity of the value of potential and the normal derivative of the potential (i.e. matching condition) is conserved.

The present method has better computational efficiency than the previous LFEM and the integral equation method of Frank. This enhanced computational efficiency is presumably due to the fact that the present method gives a symmetric coefficient matrix and requires less computational time in calculating the influence coefficient matrix of Green function than the integral equation method. And the irregular frequency doesn't exist because the uniqueness of the solution is assured by the matching condition. The present method can be applied in the future for a locally nonlinear problem such that the exact free surface condition is satisfied on the boundary of the localized finite element region (i.e. inner region).

As an example of the above method, the hydrodynamic forces for the circular cylinder and the rectangular cylinders are calculated. In the computed results, the small number of singularity distribution segments (3~6) give good result relative to Ursell's and Vugts'.

자유표면을 가진 유체에서의 2차원 구조물에 대한 유

체 동역학적 계수들을 구하는 방법으로써는, 사상 평면
 에서의 Multipole Expansion Method, 특이점 분포에
 의한 적분 방정식 방법 그리고 유한 요소법과 국소 유
 한 요소법(Localized Finite Element Method)의 응용

1. 서 언

接受日字：1985年 8月 10日，再接受日字：1985年 8月 27日

* 正會員, 서울大學校 造船工學科

등을 들 수가 있다.

국소 유한 요소법의 경우 물체에 가까운 영역(near field)에서는 유한 요소법을 이용하고 나머지 영역에서 는 해석적인 해(이미 알고 있는 함수)를 이용하여 정합을 하게 되는데, 이의 해로써 고유 함수(eigen function)을 이용하는 방법(유한 수심의 경우)과 Green 함수를 이용하는 방법(무한 수심 혹은 유한 수심의 경우)의 두 가지가 있다.

이러한 국소 유한 요소법은 Bai(1974)[1]에 의해 유한 수심의 경우에 대해 적용되어온 이래 Euvrard and Jami [2], Yamamoto [3], Taylor and Zietsman [4] 등에 의해 유한 수심과 무한 수심의 경우에 대해 이용되어져 왔으며 토크 유체 분야에서도 Berkhoff [5], Chen and Mei [6] 등에 의한 응용에서 좋은 결과들을 보여주고 있다.

이와 같은 국소 유한 요소법에 있어, 종래의 Green 함수를 이용하는 방법의 경우는 특이파수(irregular frequency)가 존재하거나 (Taylor and Zietsman[4]) 또는 특이파수가 존재하지 않는다면 최종 매트릭스가 비대칭성이 되는 (Lenoir and Jami [2]) 문제점을 갖는다. 그러나 본 논문에서 택하고 있는 범함수(functional)를 이용한 국소 유한 요소법에서는 특이파수가 존재하지 않으며 또한 최종 매트릭스는 대칭 매트릭스가 된다.

또한 본 논문의 방법과 종래의 적분 방정식을 비교하여 볼 때 특이파수가 존재하지 않는다는 점 이외에 소오스점과 관측점이 서로 중첩되지 않기 때문에, 비록 최종 매트릭스가 커지는 단점이 있음에도 불구하고 Green 함수의 influence coefficient 매트릭스 계산 시간이 월등히 단축되는 장점이 있어 더욱 효율적이다.

더구나 장래에 near field에서는 비선형 자유표면을 선형화하지 않고 적용할 수 있는 잊점을 갖고 있다. [7]

본 논문에서는 이러한 국소 유한 요소법을 이용하여 자유 표면을 가진 유체에서 2차원 주상체의 유체 동역학적 계수들(부가 질량과 감쇄 계수)을 구하였다. 이의 적용으로써 원형 단면과 사각형 단면을 택하여 유한 요소법이 적용되는 계산영역에서의 유한 요소수와 배열, 그리고 특이점(Green 함수)이 분포되는 요소의 갯수에 대한 수립 정도를 검토하였으며, 또한 특이점이 분포되는 요소의 위치와 분포 형상 그리고 정합 경계면의 위치와 형상의 영향에 대해서도 연구 검토하였다.

2. 문제의 정립

길이 방향으로 단면의 형상 변화가 없는 2차원 물체

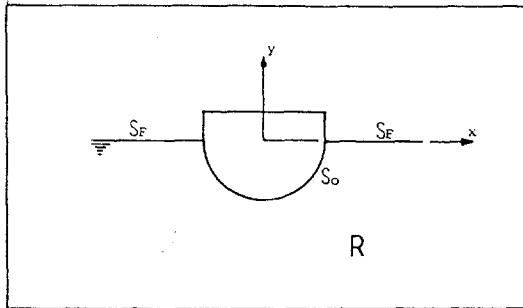


Fig. 1 Coordinate system and boundary configurations

(부유체 혹은 삼수체)가 무한 수심의 경수층에서 운동을 한다고 가정하고 좌표계는 Fig. 1과 같이 y 축은 증력과 반대 방향을 양(+)으로 잡고, x 축은 경수면상에 설정한다.

2.1. 지배방정식 및 경계조건

이 문제를 풀기 위한 수학적 모델에 필요한 가정들은 다음과 같다.

- 비접성, 비압축성 유체와 비회전운동을 가정함으로써 속도장 함수 $\phi(\bar{V}(x, y, t)) = \nabla \phi(x, y, t)$ 가 존재한다.
- 물체의 운동이 미소하다는 가정하에 물체의 운동학적 경계조건은 정지 상태의 위치에 적용한다.
- 물체는 원진동수 σ 의 주기운동을 한다고 가정함으로써 속도장 함수는 공간과 시간을 나타내는 항으로 분리시켜 표시할 수 있다.

• 물체의 운동에 의해 발생되는 자유표면과 진폭은 과정에 의해 충분히 작다고 가정함으로써 자유표면 경계 조건을 선형화하여 경수면($y=0$)에 적용한다.

위의 가정하에서 속도장 함수 ϕ 는 다음과 같이 표시할 수 있으며

$$\phi(x, y, t) = Re[\phi(x, y)e^{-i\sigma t}] \quad (2.1)$$

복소함수 ϕ 는 각 운동 mode에 대해서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\phi(x, y) = \sum_{m=1}^3 \phi^{(m)}(x, y) \quad (2.2)$$

여기서 $m=1, 2, 3$ 은 각각 좌우, 상하 그리고 횡요운동 mode를 뜻한다. 이러한 속도장 함수 ϕ 는 다음의 방정식과 경계조건들을 만족하여야 한다.

• 연속방정식

$$\nabla^2 \phi(x, y) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi = 0 \text{ in } R \quad (2.3)$$

• 선형 자유표면 경계조건

$$\phi_y - \nu \phi = 0 \text{ on } S_F \quad (2.4)$$

여기서 ν 는 σ^2/g , g 는 중력 가속도를 뜻한다.

• 해저 경계 조건

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} |\nabla \phi| = 0 \quad (2.5)$$

• 물체 표면 운동학적 경계 조건

$$\phi_n = V_n \quad (= f(s)) \text{ on } S_0 \quad (2.6)$$

여기서 R, S_F, S_0 는 Fig. 1에서와 같이 각각 유체 영역, 정수면 그리고 평형 상태에서의 물체의 잡간 표면을 나타낸다. 이 경우 일반성에 조금도 결여 없이, 물체의 단위속도 운동을 고려한다면 $f(s)$ 는 운동 mode에 따라 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$f^{(i)}(s) = n_i \quad i=1, 2, 3 \quad (2.7)$$

$$\bar{n} = (n_1, n_2)$$

$$\bar{n}_3 = (\bar{r} - \bar{r}_c) \times \bar{n}$$

여기서 \bar{n} 은 물체 안쪽으로의 방향을 갖는 단위법선 벡터를 뜻하며 \bar{r}_c 는 항모운동의 회전중심 위치 vector이다.

• 무한 원방 경계조건

물체의 강제 조화 운동에 의하여 발생된 파는 무한 원방 ($x=\pm\infty$)으로 전파되어야 하며 이를 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\phi_x \mp i\nu\phi = 0 \quad \text{as } x \rightarrow \pm\infty \quad (2.8)$$

2.2. 힘과 모우먼트

물체 표면에 작용하는 힘과 회전 중심에 대한 모우먼트는 압력분포 P 로써 다음과 같이 계산된다.

$$F_j(t) = \iint_{S_0} P n_j \, ds \quad j=1, 2$$

$$M(t) = \iint_{S_0} P n_3 \, ds \quad (2.9)$$

이 경우 압력 P 는 Bernoulli 방정식에서 비선형항과 전수압력을 무시하면 다음과 같이 표시된다.

$$P(x, y, t) = -\rho \phi_t \quad (2.10)$$

여기서 ρ 는 유체의 밀도를 나타낸다.

이때 $M=F_3$ 로 나타내면 k -mode로 강제운동을 하는 물체에 유체가 작용하는 힘과 모우먼트는

$$F_j = i\rho \left(\mu_{jk} + i \frac{\lambda_{jk}}{\sigma} \right) \quad j, k=1, 2, 3 \quad (2.11)$$

와 같으며 μ_{jk}, λ_{jk} 는 k -mode의 물체 운동에 의해 야기되는 j 방향 성분의 유체력 계수를 나타내며 각각 부가 질량과 감쇄 계수를 뜻한다.

이에 부가 질량과 감쇄 계수는 다음의 절 알려진 저분형태로 표시된다.

$$\mu_{jk} + i \frac{\lambda_{jk}}{\sigma} = \rho \iint_{S_0} \phi^{(k)} n_j \, ds$$

$$= \rho \iint_{S_0} \phi^{(k)} - \frac{\partial \phi^{(j)}}{\partial n} \, ds \quad (2.12)$$

3. 변분법의 응용

Classical Variational Method의 자유 표면파 문제에 대한 응용에서는 계산 영역이 커지는 비효율적인 점이 있으므로, 계산 영역을 최대한 줄이기 위한 본 방법이 고안되었다. 즉 Classical Variational Method에서, 무한 영역을 유한화 시킨다 하더라도 수치계산에서 볼 때 취급해야 될 유체 영역은 여전히 크게 남아 있게 된다.

이러한 단점을 보완하기 위하여 본 방법에서는 유체 영역을 외부영역과 내부 영역으로 둘로 나누어, 외부 영역에서는 이미 알고 있는 해석해를 이용하게 된다.

Fig. 2와 같이 가상적인 정합 경계면 J 를 설정하고 유체 영역을 내부 영역 R_1 , 외부 영역 R_2 그리고 각 영역에서의 자유표면을 S_{F1}, S_{F2} 로 나타내기로 한다.

그리고 각 영역에서의 속도장 함수를 ϕ_1, ϕ_2 로 표시하면, ϕ_1 과 ϕ_2 는 각각 다음의 방정식과 경계조건을 만족해야 된다.

ϕ_1 은

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi_1 &= 0 && \text{in } R_1 \\ \phi_{1y} - \nu \phi_1 &= 0 && \text{on } S_{F1} \\ \phi_{1n} &= V_n && \text{on } S_0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

그리고 ϕ_2 는,

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi_2 &= 0 && \text{in } R_2 \\ \phi_{2y} - \nu \phi_2 &= 0 && \text{on } S_{F2} \\ \phi_{2x} \mp i\nu \phi_2 &= 0 && \text{at } x \rightarrow \pm\infty \end{aligned} \quad (3.2)$$

를 만족해야 한다.

또한 경계면 J 에서 속도장 함수와 그 법선 도함수의 연속조건을 만족해야 하므로, 이는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi_2 && \text{on } J \\ \phi_{1n} &= -\phi_{2n} && \end{aligned} \quad (3.3)$$

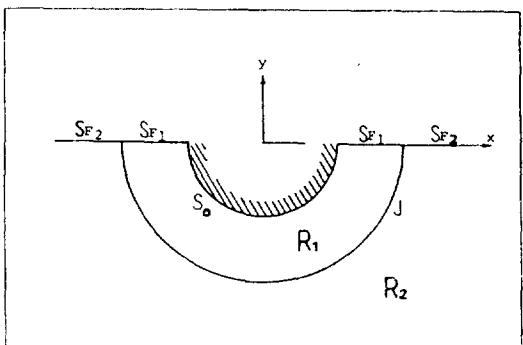


Fig. 2 Inner region, outer region and matching boundary

따라서 (3.3)의 정합 조건에 의해 해인 ϕ_1 과 ϕ_2 의 유일성이 보장된다. 이때 외부 영역의 해인 ϕ_2 는 이미 알고 있는 일반해들로써 나타낼 수 있다고 가정한다.

따라서 범함수 F_1, F_2 를 다음과 같이 결정할 수 있다.

$$\begin{aligned} F_1(\phi_1, \phi_2) &= \iint_{R_1} \frac{1}{2} (\nabla \phi_1)^2 dx dy - \frac{\nu}{2} \int_{S_{F_1}} \phi_1^2 dS \\ &\quad - \int_{S_s} V_s \phi_1 dS + \int_J (\phi_1 - \frac{1}{2} \phi_2) \phi_{2n} dS \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} F_2(\phi_1, \phi_2) &= \iint_{R_1} \frac{1}{2} (\nabla \phi_1)^2 dx dy - \frac{\nu}{2} \int_{S_{F_2}} \phi_1^2 dS \\ &\quad - \int_{S_s} V_s \phi_1 dS + \int_J [(\phi_2 - \phi_1) \phi_{1n} + \frac{1}{2} \phi_2 \phi_{2n}] dS \end{aligned} \quad (3.5)$$

그러므로 경계치 문제인 (3.1), (3.2) 그리고 (3.3)의 해를 구한다는 것은

$$\delta F_1(\phi_1, \phi_2) = 0 \quad (3.6)$$

혹은,

$$\delta F_2(\phi_1, \phi_2) = 0 \quad (3.7)$$

의 해를 구한다는 것과 같다.

본래의 미분 방정식으로 주어진 (3.1)~(3.3)의 해를 구하는 것이 (3.6) 혹은 (3.7)의 해를 구하는 것과 같다. 이 증명은 길 [18]이나 Bai & Yeung [1]에 있으므로 여기서는 생략한다. 보다 상세한 내용은 위의 두 논문에서 찾을 수 있다.

4. 해석 해와 유한 요소법을 이용한 해의 도출

이 절에서는 (3.4)에서 정의된 범함수 F_1 을 이용하여 (3.6)의 해를 구하는 수치 계산 과정을 설명하기로 한다.

4.1. 내부 영역(inner region)에 대한 해의 근사화

내부 영역을 유한개의 요소로 분할하여 각 요소에서의 속도장 함수 ϕ_1 을 polynomial trial function으로써 나타내기로 한다.

앞서 언급한 바와 같이 경계치 문제 ((3.1), (3.2), (3.3))는 변분법에 의한 (3.6)의 문제와 대응(equivalent)된다. 그리고 이 점이 다음과 같은 trial function 을 가정할 수 있는 근거가 된다.

본래 경계치 문제인 미분 방정식과 달리 범함수를 이용하는 경우 속도 potential ϕ_1 에 대한 2차 도함수는 나타나지 않는다. 이는 범함수를 구하는 과정에서 부분 적분(Green 정리)을 이용하기 때문이다. 따라서 변분법을 이용하는 경우, 본래의 미분 방정식 해보다 더 완화된 조건 하에서 근사해를 구할 수 있다는 장점이 있다.

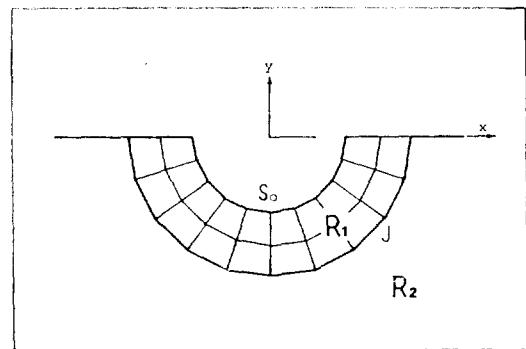


Fig. 3 Discretization of inner region

즉 근사해가 갖추어야 될 조건은 범함수 $F_1((3.4))$ 에서 보듯, 함수와 일차 도함수의 적분 값이 존재하던 된다. 이는 trial function으로 일차 도함수가 부분 연속(piecewise continuous)인 함수를 이용할 수 있음을 뜻한다. (즉, 분할된 각 영역의 연결 부분에서 근사해의 일차 도함수가 불연속해도 무방하다.)

내부 영역 R_1 을 Fig. 3과 같이 직선으로써 분할하고, 각 영역은 요소로써 나타낸다.

각 요소에 대해 trial functions $N_i(x, y)$ $i=1, \dots, n$ 을 도입하고, 속도장 함수 $\phi_1(x, y)$ 은 각 node에서의 ϕ_1 값을 계수로 갖는 합으로써 나타낸다.

이 경우 n, e 는 각각 node수와 각 요소를 뜻한다.

(본 문제의 경우 범함수 값 자체를 구하는 것이 아니라, 범함수 값이 stationary되게 하는 점을 구하므로, 계수로써 각 node에서의 ϕ_1 값이 아니라 ϕ_1 을 나타낼 수 있는 다른 변수를 이용할 수도 있다.)

따라서 각 요소에서의 속도장 함수 ϕ_1 은 다음의 근사식으로 나타낼 수 있다.

$$\phi_1 = [N]^e \{\phi_1\}^e \quad (4.1)$$

이 경우, $[N]^e$ 과 $\{\phi_1\}^e$ 는 trial function들과 각 node에서의 ϕ_1 값으로 다음의 행렬식을 뜻하며,

$$[N]^e = [N_1^e, N_2^e, \dots, N_n^e] \quad (4.2)$$

$\{\phi_1\}^e = [\phi_{11}^e, \phi_{12}^e, \dots, \phi_{1n}^e]^T$
trial function $[N]^e$ 는 판면 요소가 아니라면 영의 값을 갖는다. 따라서 전 유체 영역을 고려한 속도장 함수 ϕ_1 은 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$\phi_1 = \sum_{e=1}^E [N]^e \{\phi_1\}^e$$

$$= \sum_{i=1}^N \phi_{1i} N_i(x, y) \quad (4.3)$$

이 경우 E, N 은 각각 총 요소수와 총 node수를 뜻한다.

본 논문에서는 4개의 node를 갖는 선형 isoparametric

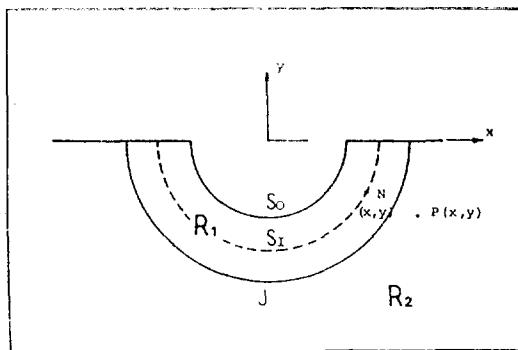


Fig. 4 Boundary for singularity distribution

요소를 이용하였다.

4.2. 외부 영역(outer region)에 대한 해의 근사화

외부 영역 R_2 에서의 (3.2)을 만족하는 근사해로써, 본 논문에서는 Green 함수를 trial function으로 이용하기로 한다. (Bai (1974) [1]는 유한 수심 문제의 경우 trial function으로써 고유 함수를 이용하고 있다.)

Fig. 4에서 와 같이 S_1 은 내부 영역 R_1 (물체표면 S_0 와 정합경계면 J 포함)에 위치한 임의의 경계면, N 과 P 는 각각 S_1 상의 임의 점 그리고 외부 영역 R_2 의 임의 점이라고 한다.

점 $N(x', y')$ 에 놓인 단위 세기의 맥동소오스로 인한 점 $P(x, y)$ 에서의 (3.2)을 만족하는 Green 함수는 다음과 같다. ([10])

$$\begin{aligned} G(P, N) = & \frac{1}{2} \ln \{(x-x')^2 + (y-y')^2\} \\ & - \frac{1}{2} \ln \{(x-x')^2 + (y+y')^2\} \\ & + 2P \cdot V \int_0^\infty \frac{e^{\nu(y+y')}}{\nu-k} \cos k(x-x') dk \\ & - 2\pi i e^{\nu(y+y')} \cos \nu(x-x') \end{aligned} \quad (4.4)$$

외부 영역 R_2 에서의 속도 potential ϕ_2 는 임의 경계면 S_1 상에 Green 함수 (4.4)를 분포시킴으로써 Green 정리에 의해 다음과 같이 나타낼 수 있다. ([11], [12])

$$\begin{aligned} \phi_2(x, y) = & \int_{S_1} q(N) \cdot G(P, N) dS \\ = & \sum_{i=1}^M \phi_{2i} \int_{S_1} G(P, N) dS (= \sum_{i=1}^M \phi_{2i} \psi_i(x, y)) \end{aligned} \quad (4.5)$$

여기서 $\psi_i(x, y) = \int_{S_1} G(P, N) dS$ 이다.

이 경우 q 는 Green 함수의 세기를 나타낸다. 또한 경계면 S_1 을 M 개의 요소로 나누어, 각 요소에서의 세기는 ϕ_{2i} 로 일정하다고 가정하였으며 q 와 ϕ_{2i} 는 복소값을 갖는다.

4.3. 해(ϕ_1, ϕ_2)의 도출

4.1과 4.2절에서의 ϕ_1 과 ϕ_2 에 대한 근사식 (4.3),

(4.5)를 (3.6)에 적용한다. 즉 범함수 F_1 의 값을 정상이 되게 하기 위하여, 변분을 갖을 수 있는 ϕ_{1i} 와 ϕ_{2i} 를 감안하여 다음 관계를 얻게 된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1(\phi_1, \phi_2)}{\partial \phi_{1i}} &= 0 \quad i=1, \dots, N \\ \frac{\partial F_1(\phi_1, \phi_2)}{\partial \phi_{2i}} &= 0 \quad i=1, \dots, M \end{aligned} \quad (4.6)$$

이를 다시 쓴다면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial \phi_{1i}} &= \iint_R \left(\phi_{1x} \cdot \frac{\partial \phi_x}{\partial \phi_{1i}} + \phi_{1y} \cdot \frac{\partial \phi_{1y}}{\partial \phi_{1i}} \right) dx dy \\ &\quad - \nu \int_{S_{F1}} \phi_{1i} \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial \phi_{1i}} dS - \int_{S_0} V_n \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial \phi_{1i}} dS \\ &\quad + \int_J \phi_{2n} \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial \phi_{1i}} dS \\ \frac{\partial F_1}{\partial \phi_{2i}} &= - \int_J \left[\frac{1}{2} \left(\phi_2 \cdot \frac{\partial \phi_{2n}}{\partial \phi_{2i}} + \phi_{2n} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial \phi_{2i}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \phi_{1i} \cdot \frac{\partial \phi_{2n}}{\partial \phi_{2i}} \right] dS \end{aligned} \quad (4.7)$$

이에 다음 관계를 이용한다면,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} &= \left[\frac{\partial N_1}{\partial x}, \frac{\partial N_2}{\partial x}, \dots \right] (\phi_1) \\ \frac{\partial}{\partial \phi_{1i}} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) &= \frac{\partial N_1}{\partial x} \quad i=1, \dots, N \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial \phi_{1i}} &= N_i \quad i=1, \dots, N \\ \frac{\partial \phi_{2n}}{\partial \phi_{2i}} &= \psi_{in}(x, y) \quad i=1, \dots, M \end{aligned} \quad (4.8)$$

(4.7)은 $(N+M)$ 개의 대수 방정식으로 귀착된다.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

이 경우 A_{11} , A_{12} , A_{21} , A_{22} , Q_1 그리고 Q_2 는

$$\begin{aligned} A_{11} &= [a_{ij}]_{N \times N} \\ A_{22} &= [b_{ij}]_{M \times M} \\ A_{12} &= [c_{ij}]_{N \times M} \\ A_{21} &= [d_{ij}]_{M \times N} \\ Q_1 &= \{f_i\} \\ Q_2 &= \{0\} \end{aligned} \quad (4.10)$$

이때, 위 매트릭스의 각 요소들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \iint_R (N_{ix} N_{jx} + N_{iy} N_{jy}) dx dy - \nu \int_{S_F} N_i N_j dS \\ c_{ij} &= d_{ji} = + \int_J N_i \phi_{jn} dS \\ b_{ij} &= - \int_J \frac{1}{2} (\psi_{in} \phi_j + \phi_i \psi_{jn}) dS \\ f_i &= \int_{S_0} V_n N_i dS \end{aligned} \quad (4.11)$$

이때 (4.11)을 고려하면, $(M+N)$ 개 대수 방정식 계수에 해당하는 매트릭스는 대칭성을 갖게 되며, 또한 적절한 node 번호에 따라 띠 행렬(banded matrix)이됨을 알 수 있다.

이 경우 (4.11)의 적분은 4 node들을 갖는 선형 isoparametric 요소에 대하여, 정사각형 요소로 사상을 한 후 가우스 적분공식을 이용하여 계산하였다.

5. 수치 계산 및 고찰

유한 요소법이 적용되는 영역은 4개의 node를 갖는 선형 isoparametric 요소로써 계산을 하였다.

물체의 형상은 y 축에 대해 대칭인 원형 단면과 사각형 단면(반폭 b 와 깊이 T)인 경우 $b/T=1.0, 4.0, 8.0$ 에 대해서 상하, 좌우운동의 유체동역학적 계수들을 Ursell [13, 14], Frank [15] 그리고 Vugts [16]의 결과들과 비교하였다.

본 방법의 경우 유한 요소법과 적분 방정식의 연성으로 볼 수가 있는데 이에 전자가 적용되는 내부 영역의 요소수, 그리고 후자가 적용되는 외부 영역을 나타내기 위한 특이점이 분포되는 Segment 수들의 관계를 알아 보았다. 또한 적분 방정식과는 달리 특이점 분포가 물체 표면에만 국한되지 않으므로 특이점이 분포되는 경계면의 위치, 형상의 영향을 알아보았고, 정합 경계면의 형상에 따른 영향도 함께 알아보았다.

5.1. 수렴 정도의 고찰

5.1.1. 요소의 크기와 요소수에 따른 수렴 정도 특이점이 분포되는 요소의 개수와 요소수를 고정하고 요소의 크기에 따른 비교를 하였다.

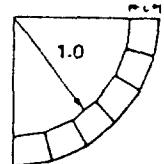
이의 예로써 원형단면에 대해 요소수 6개인 경우 요

소의 형상이 정사각형에 가까운 크기(l) 0.25인 경우의 값이 상대적으로 가장 Ursell의 값에 가까움을 알 수 있다. (Table 1.)

또한 요소수에 따른 수렴정도를 알기 위해 특이점 분포 요소 갯수를 고정하고 요소수를 변화시키면서 계산을 수행하였다.

원형단면에 대한 상하운동의 부가질량의 경우 요소수가 증가함에 따라 Ursell의 결과에 수렴해감을 알 수 있다. (Table 2.) (이때 상하 운동의 감쇄 계수나 좌우 운동의 부가 질량, 감쇄 계수도 이와 같은 경향을 갖게 되나 상하운동의 부가 질량에 비해 상대적인 오

Table 1 Numerical experiment by varying the size of the finite elements, with 3 singularity-distribution seg. (added mass coeff. $\mu = \mu/\rho A$ in heave)



$\sigma^2 b/g$	0.5	1.0	1.5	2.0	3.0
0.1	0.65244	0.61613	0.68067	0.73561	0.82735
0.25	0.64696	0.60586	0.66583	0.72942	0.81787
0.5	0.63136	0.58500	0.64401	0.70877	0.80053
1.0	0.59074	0.53964	0.60129	0.66264	0.73694
Ursell's result	0.639	0.594	0.662	0.733	0.808

b : half-beam

A : body section area

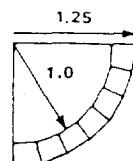


Table 2 Convergence test on the total no. of finite element with 3 singularity-distribution segments for $\sigma^2 b/g = 1.0$ (added mass coeff. $\mu = \mu/\rho A$ in heave)

N	$\sigma^2 b/g$	0.5	1.0	1.5	2.0	3.0	CPU time
3		0.66043	0.61792	0.68216	0.72353	0.83355	426
4		0.65251	0.60859	0.66722	0.73879	0.82625	566
5		0.64926	0.60753	0.66707	0.73272	0.82092	566
6		0.64696	0.60586	0.66583	0.72942	0.81787	653
7		0.64579	0.60488	0.66485	0.72825	0.81617	728
9		0.64436	0.60381	0.66395	0.72630	0.81414	909
15		0.64299	0.60272	0.66299	0.72447	0.81223	1406
17		0.64283	0.60259	0.66287	0.72424	0.81199	1619
20		0.64266	0.60246	0.66276	0.72402	0.81177	1900
Ursell's result		0.639	0.594	0.662	0.733	0.808	

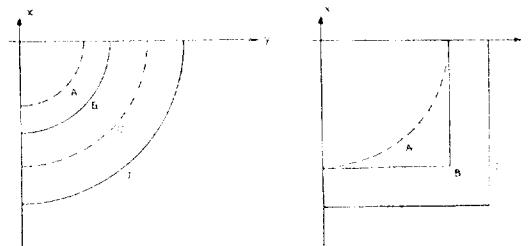
(CPU time in m-sec)

차가 작음으로 상하운동의 부가질량에 대해 비교를 하였다.)

5.1.2. 특이점이 분포된 요소갯수에 따른 수렴 정도

특이점 분포 요소갯수에 따른 수렴정도를 알아보기 위해 요소수를 고정하고 특이점 분포 요소 갯수를 변화시키면서 계산을 수행하였다. 이의 결과 원형 단면의 경우, 특이점 분포 요소 갯수가 3개 이상인 경우는 차이가 거의 없으나 특이점 분포 요소 갯수가 정합 경계면의 요소 갯수보다 많아지는 경우는 값의 오차가 커짐을 알 수가 있었다. 이는 본 논문에서 택하고 있는 방법에서 원인을 찾을 수가 있다. 즉 한정된 정보(정합 경계면의 정합점에 대해 이를 이용해 구해져야 하는 미지수의 갯수는 늘어나게 되는데 이때 정합 경계면에서의 적분을 선형적으로 취하는데에 원인이 있다고 생각된다.

5.2. 특이점이 분포되는 경계면의 위치와 형상, 그리고 정합 경계면의 형상에 따른 비교



A: inside body boundary

B: on body boundary

C: between body boundary and matching boundary

Fig. 5 Configurations of singularity-distribution boundary and matching boundary J.

적분 방정식과 달리 특이점이 분포되는 경계면의 위치는 물체 내부, 물체표면 그리고 가상표면(정합 경계면 안쪽)에 설정할 수 있으며 그 표면의 형상도 임의로 정해줄 수 있다. 이에 대해서는 위치, 형상(Fig. 5)에 따른 값의 변화는 거의 없는 것으로 확인할 수 있었다.

또한 정합 경계면도 형상에는 관계가 없으나, 본 방

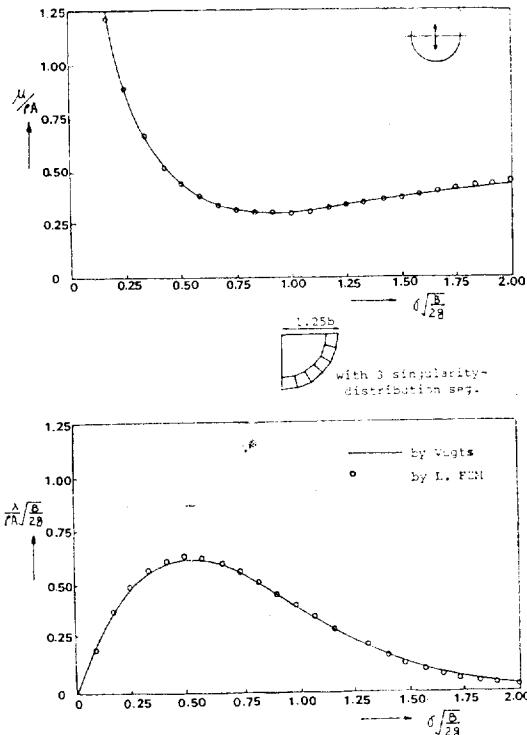


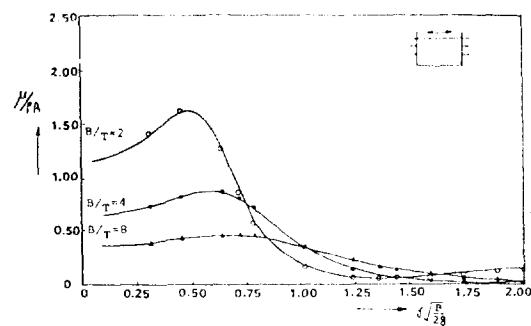
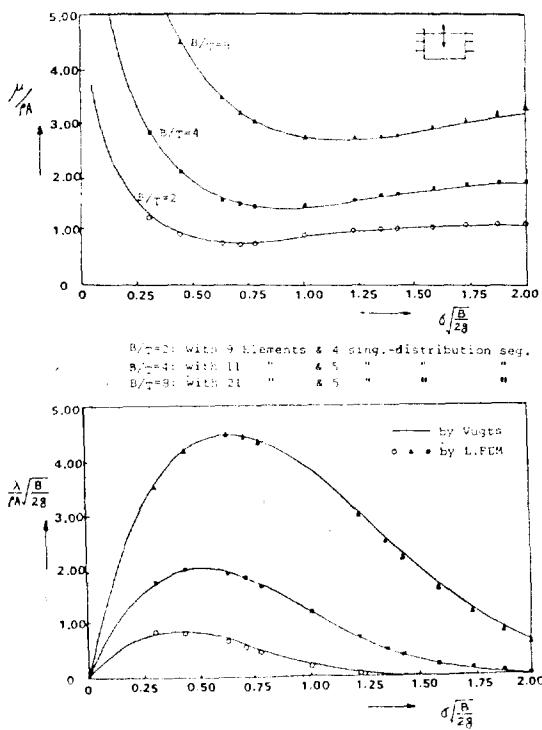
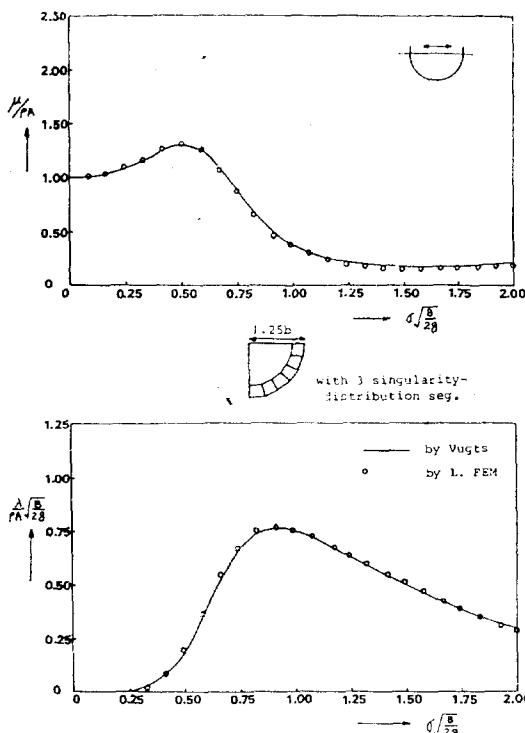
Fig. 6 Added mass and damping coeff. in heave

Table 3 Comparison between our results and others. (added mass coeff. $\bar{\mu} = \rho A$ in heave)

$\sigma^2 b/g$	by frank method				By L. FEM	Ursell's result
	9	15	20	3		
0.5	0.66635(4.28)	0.65785(2.95)	0.65460(2.44)	0.64696(1.25)		0.639
1.0	0.62498(5.22)	0.61789(4.02)	0.61492(3.52)	0.60586(2.00)		0.594
1.5	0.67706(2.27)	0.67430(1.86)	0.67257(1.60)	0.66583(0.58)		0.662
2.0	0.77715(6.02)	0.75646(3.20)	0.74887(2.17)	0.72942(-0.49)		0.733
3.0	0.84606(4.71)	0.83431(3.26)	0.82944(2.05)	0.81787(1.22)		0.808
CPU tim for $\sigma^2 b/g = 1.0$	741	2005	3950	653		

(CPU time in m-sec)

*The values in the parentheses are the relative errors in the present result assuming that Ursell's results are exact.



법에서 사용하는 사각형 요소의 경우 가능한 한 요소의 형상이 정사각형에 가깝도록 정하는 것이 바람직하다.

5.3. 다른 방법들과의 비교

본 방법인 국소 유한 요소법을 이용하는 경우 특이 파수가 존재하지 않는다는 점 이외에도 다음을 지적할 수가 있다. 즉 종래의 Frank Method에서 보다 본 방법에서는 Kernel 적분시 소오스점과 관측점이 중첩되지 않고 항상 충분한 거리가 있기 때문에 적분계산이 용이하다.

수치 계산 결과를 비교하여 보면, 원형 단면의 경우 Ursell의 결과를 기준으로 Frank Method에 의한 결과 보다 본 방법이 계산 시간과 오차면에서 더 나은 결과를 얻고 있음을 확인 할 수 있다. (Table 3)

또한 원형 단면과 사각형 단면 ($b/T=2, 0, 4.0, 8.0$)의 heave, sway 운동에 대한 부가 질량과 감쇄 계수들을 Vugts의 결과와 비교해 보면 비교적 잘 일치하고 있으며, 특이파수는 발생하지 않음을 확인 할 수 있다. (Fig. 6, 7, 8, 9)

6. 결 언

Green 함수를 이용하는(무한 수심 문제의 경우) 국소 유한 요소법의 경우 하나의 요소 매일 총과 적은 수의 특이점 분포 segment(3~6개)로써도 비교적 좋은 결과를 얻을 수 있다.

또한 본 방법의 경우 종래의 국소 유한 요소법(Green 함수를 이용하는)과 달리 특이점수가 존재하지 않으며, 최종 매트릭스는 대칭 매트릭스가 된다.

그리고 적분 방정식(Frank Method)에 비해 계산 시간이 줄어 들게 되고 오차면에서도 좋은 결과를 주고 있다.

그러나 본 방법에서 택하고 있는 선형 isoparametric 요소 대신에 더 고차항의 요소를 이용하면 더 나은 결과가 기대되고, 본 방법의 경우 대칭 물체를 다루고 있으나, 비대칭인 임의 단면의 경우에도 본 논문 방법이 그대로 적용될 수 있다.

이와 같은 무한 수심에 대한 국소 유한 요소법에 있어 비선형 자유표면 경계조건을 유한 요소법이 적용되는 영역(near field)에 적용하고 더 나아가 3차원 물체로 확장된다면 복잡하고 비전형적인 해양 구조물등에 대한 유체 동역학적 계수들을 더 정확히 구할 수 있을 것이다.

후 기

본 논문은 한국과학재단의 연구비 지원하에 이루어졌음을 무기하여, 한국과학재단에 감사를 드립니다.

참 고 문 헌

- [1] Bai, K.J. & R. Yeung, "Numerical solutions to free surface flow problems", *Proc. 10th Symp. Naval Hydrodyn.*, Office Naval Res., Combridge, Mass., pp. 609-647, 1974.
- [2] D. Euvrard & A. Jami, "Recent progress towards an optimal coupling between finite elements and singularity distribution procedures", *2nd. I.C on N.S. Hydrodynamics*, 1981.
- [3] H. Seto & Yamamoto, "Finite element analysis of surface wave Problems by a method of superposition", *1st. Int. Conf. on Num. Ship Hydrodynamics*, 1975.
- [4] R.E. Taylor & J. Zietsman, "A comparison of localized finite element formulations for two-dimensional wave diffraction and radiation problems", *Int. J. Num. Meth. Eng.* Vol. 17, 1355-1384, 1981.
- [5] J.C.W. Berkhoff, "Linear wave propagation problems and the finite element method", Ch. 13 in *Finite Element Methods in Fluids*, vol. 1, Wiley London, 1975.
- [6] H.S. Chen and C.C. Mei, "Oscillations and wave forces in a man-made harbour in the open sea", *Proc. 10th Symp. Naval Hydrodyn.*, Office Naval Res., Cambridge, Mass., pp. 573-596, 1974.
- [7] J.C. Luke, "A variational principle for a fluid with a free surface", *J.F. Mech.* Vol. 27, part 2, pp. 395-397, 1967.
- [8] Bai, L.J., "A variational method in potential flows with a free surface", Ph. D. Thesis, University of California, Berkeley, 1972.
- [9] Bai, K.J., "The added mass of two-dimensional cylinders heaving in water of finite depth", *J.F. Mech.* Vol. 81, pp. 85-105, 1977.
- [10] Wehausen, J.V. & Laitone, E.V., "Surface Waves", *Handbuch der physik*, (Encyclopedia of physics), edited by S. Fluegge, Vol 9, Fluid Dynamics 3, Springer-Verlag, Berlin, Germany, pp. 446-778, 1960.
- [11] Ohmatsu, S., "On the irregular frequencies in the theory of oscillating bodies in a free surface", *Ship Res. Inst. Report No. 48*, 1975.
- [12] Lamb, H. *Hydrodynamics*. 6th ed. Cambridge University Press. 1945, New York, Dover.
- [13] Ursell, F., "On the heaving motion of a circular cylinders on the free surface of a fluid", *Quar. J. Mech. Appl. Math.* 2, 218-231, 1949.
- [14] Tasai, F., "On the damping force and added mass of ships heaving and pitching", *J. Soc. Nav. Arch. Japan* 105, 47-56, 1959.
- [15] Frank, W., "Oscillating of cylinders in or below the free surface of deep fluids", Report No. 2375, Naval Ship Res. & Dev. Center, Bethesda, MD.
- [16] J.H. Vugts, "The hydrodynamics coefficients for swaying, heaving and rolling cylinders in a free

- surface”, *Int. Shipbuilding Progress*, Vol. 5, No. 167, July 1968.
- [17] O.C. Zienkiewicz, *The Finite Element Method*, McGraw-Hall, 1977.
- [18] 길현권. “국소 유한 요소법에 의한 자유표면과 문제의 수치계산”, 서울대학교 대학원 조선과 석사논문, 1985.