

論 文

大韓造船學會誌
第22卷 第3號 1985年 9月
Journal of the Society of
Naval Architects of Korea
Vol. 22, No. 3, September 1985

非線型性을考慮한 規則波中 船體應答에 關한 研究

黃宗屹* · 金容直** · 金眞泳*** · 吳日根***

Nonlinear Effects on Ship Motion and Wave Load

by

J.H. Hwang* · Y.J. Kim** · J.Y. Kim*** · I.G. Oh***

Abstract

In this paper, the motion response and wave load of a container ship are treated by a nonlinear motion theory, which is similar to that used by Yamamoto et. al. [1]. This paper deals with the vertical motion response in oblique waves and the effect of the Smith correction in buoyancy force calculation.

In the present computation, for S-175 container ship model our result also shows that the ratio of the motion peak to peak value to the wave height decreases as the wave height increases, which was obtained earlier by Yamamoto et. al. [3]. On the otherhand the nondimensional midship bending moment increases as the wave height increases. These nonlinear effects are dominant near the resonance frequency, and depend on the hull form and forward speed. However, it is found that these nonlinear effects are not significant for tanker model.

1. 서 언

규칙파 중의 선체운동과 파랑하중의 해석에는 주로 선형이론이 사용되고 있다. 그러나 파고가 큰 과가 입사하거나 운동 진폭이 큰 상태에서는 유체 정역학적, 동역학적 계수들이 선형이론에서의 값들과는 달리 크게 변화한다. 특히 부가질량의 시간적 변화에 기인하는 충격력은 선저 충격 현상과 선수부 flare 충격 현상을 일으키며, 이에 의한 구조 손상예가 흔히 있어 왔다. 따라서 이러한 비선형 효과들을 고려한 선체 응답에 관한 연구가 요구되고 있다.

Yamamoto, Fujino, Fukasawa는 영파중에서의 선체

응답을 비선형 해법으로 다루었으며[1], 선체를 탄성 체로 취급한 연구도 수행하였다[2]. 또한 Yamamoto, Fukasawa, Arai, Kajita[3]는 비선형 해법에 의해 선체 운동을 계산하고 실험결과와 비교한 바 있다. Stavovy, Chuang[4]은 선저 충격 압력을 계산하였고, Hwang, Min, Kim, Ahn[5]은 선수부 충격압력에 관한 연구를 수행한 바 있다.

본 논문에서는 부가질량의 시간적 변화에 기인하는 충격력을 고려하고, 선체 형상의 비선형성에 기인하는 부력, 부가질량, 감쇠력의 시간에 따른 비선형 변화를 고려하여, 선체 운동과 파랑하중을 시간의 진행에 따라 계산하였다. 콘테이너선형에 대하여 입사파의 파고와 파장, 입사각도 및 선속을 변화시키면서 선체 응답

接受日字：1985年 6月 10日，再接受日字：1985年 8月 27日

* 正會員 서울大學校 工科大學

** 正會員 釜山水產大學 船舶工學科

*** 서울大學校 大學院(研究當時)

에 미치는 비선형효과를 보여주고 있다. 냉커 선형에 대한 계산도 수행하여 Yamamoto등 [1]의 계산 결과와 비교하였다.

2. 좌표계 및 가정

좌표계는 Fig. 1에서와 같이 공간 고정 좌표계를 0-XYZ로 하여, 연직 상방을 Z축으로 하고, 교란되지 않은 자유표면에 XY평면을 일치시켜 우수 좌표계가 되도록 한다. 또 선체 고정 좌표계를 0-xyz로 하여, 그 원점을 선체 중앙단면의 중심선상 수선면에 두도록 하며, 선수방향으로 x축, 좌현쪽으로 y축, 상방을 z축으로 정한다. 선체의 무게 중심 G는 0-xyz 좌표계에서 $(x_G, 0, z_G)$ 에 위치하는 것으로 한다. 입사파의 입사각 μ 는 Fig. 1에서와 같이 추파일 때를 0° , 영파일 때를 180° 로 정한다.

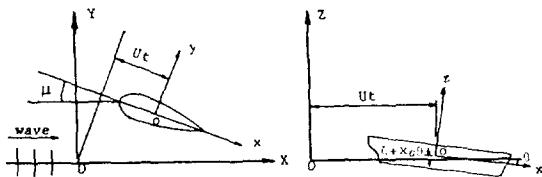


Fig. 1 Coordinate systems and wave heading angle, μ

본 논문에서는 영파 및 사파증을 등속도 U 로 전진하는 선체의 상하 동요 및 종동요만을 취급하며, 상하동요시 상방으로의 수직 변위를 양으로 하여 ζ 로 표시하고, 종동요시 선수가 내려가는 회전각을 양으로 하여 θ 로 표시한다. 수면 변위 η 는 상방으로의 변위를 양으로 하고 수직방향 상태속도 V_r 은 선체가 물속으로 돌입할 때를 음으로 한다. 굽힘 모멘트는 선체를 凹형으로 굽히는 것(sagging)을 양, 그 역(hogging)을 음으로 한다.

본 논문에서의 가정은 다음과 같다.

- 1) 유체는 비점성, 비압축성이며 비회전 운동을 한다.
- 2) 수심은 무한하며, 입사파는 정현 규칙파이다.
- 3) 선체는 강체이며, 탄성진동의 영향은 무시한다.
- 4) 부가질량과 감쇠력은 각 순간에서의 수면하 단면의 청상동요로부터 얻어지는 것으로 한다.(단, 노출된 단면이 수중으로 재 돌입시에는 무한 진동수의 부가 질량을 사용한다.)
- 5) 충격력은 선체가 유체로 돌입할 때(상대 속도가 음)만 작용하는 것으로 한다.
- 6) 사파증에서의 횡동요 및 좌우동요의 영향은 무시

한다.

위와 같은 가정외에 일반적인 strip 가정을 사용한다. 입사파의 조우 주파수 ω_e 는 다음과 같으며,

$$\omega_e = \omega - kU \cos \mu \quad (1)$$

여기에서 ω 는 입사파의 원 주파수이며, $k = \omega^2/g$ 이다.

입사파의 속도 포텐셜 ϕ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \phi &= -\frac{g\eta_0}{\omega} e^{kz} \sin(\omega_e t - kx \cos \mu - ky \sin \mu) \\ &= -\frac{g\eta_0}{\omega} e^{kz} \sin(\omega_e t - kx \cos \mu - ky \sin \mu) \end{aligned} \quad (2)$$

여기에서 g 는 중력가속도이고, η_0 는 입사파의 진폭이다. 수면 변위는 다음과 같고,

$$\eta = \eta_0 \cos(\omega_e t - kx \cos \mu - ky \sin \mu) \quad (3)$$

유체임자의 수직 방향 속도 V_z 는 다음과 같다.

$$V_z = -\omega \eta_0 e^{kz} \sin(\omega_e t - kx \cos \mu - ky \sin \mu) \quad (4)$$

각 순간에서의 흔수 Zd 는 다음과 같다.

$$Zd = \zeta - (x - x_G)\theta + T \quad (5)$$

여기에서 $T(>0)$ 는 정수증의 흔수이다. 상대 속도 V_r 은 다음과 같다.

$$V_r = -\zeta + (x - x_G)\dot{\theta} - U\theta + V_z \quad (6)$$

각 단면에서의 가속도 a 는 다음과 같다.

$$a = \ddot{\zeta} - (x - x_G)\ddot{\theta} \quad (7)$$

3. 운동 방정식 및 시간 적분법

선체에 작용하는 여러 힘들을 고려하여 다음과 같은 평형 방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \int_{-L/2}^{L/2} \left[\frac{d}{dt} (M_H V_r) + N_H V_r \right. \\ \left. + \rho g A' - w - \frac{w}{g} a \right] dx = 0 \\ \int_{-L/2}^{L/2} (x - x_G) \left[\frac{d}{dt} (M_H V_r) + N_H V_r \right. \\ \left. + \rho g A' - w - \frac{w}{g} a \right] dx = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

여기에서 M_H , N_H 는 각 순간의 흔수 Zd 에서의 이차원 부가 질량과 감쇠 계수이며, ρ 는 유체 밀도, A' 는 Smith 효과를 고려한 각 단면의 침수면적이고, w 는 선체의 단위 길이당 증량이다. 적분 기호안의 첫 항은 유체 운동량의 변화에 기인하는 힘이고, 둘째 항은 조파 감쇠력, 세째 항은 부력, 네째 항은 자중, 다섯째 항은 관성력에 해당한다.

첫 항은 다시 다음과 같이 나타내어진다.

$$\frac{d}{dt} (M_H V_r) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - U \frac{\partial}{\partial x} \right) M_H V_r$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\partial M_H}{\partial t} V_r + M_H \frac{\partial V_r}{\partial t} \\
 &- UV_r \frac{\partial M_H}{\partial x} - UM_H \frac{\partial V_r}{\partial x} \quad (9)
 \end{aligned}$$

(8)식과 (9)식, 그리고 (4)식과 (6), (7)식으로 부터 상하 동요와 종동요의 연성 운동방정식은 부록에서 나타낸 것과 같다.

이러한 비선형 운동 방정식에서 고려되는 비선형 효과는 다음과 같다.

1) 선형이론에서는 고려되지 않는 (9)식의 첫항, 즉 부가질량의 시간적 변화에 기인하는 비선형 유체력이 고려된다. 이를 충격력(F_{imp})라 하였다. 충격력을 두 가지로 나눌 수 있는데, 그중 흙수증가에 따른 충격력은 다음과 같이 계산되며,

$$\begin{aligned}
 F_{imp} &= \frac{\partial M_H}{\partial t} V_r \\
 &= \frac{\partial M_H}{\partial Zd} \frac{\partial Zd}{\partial t} V_r = -\frac{\partial M_H}{\partial Zd} V_r^2 \quad (V_r < 0) \quad (10)
 \end{aligned}$$

노출된 선지가 다시 수증으로 돌입함으로써 발생하는 접수구역 증가에 따른 충격력은 다음과 같이 계산하였다. [1]

$$\begin{aligned}
 F_{imp} &= \frac{\partial M_H}{\partial t} V_r \\
 &= \frac{M_H|_{Zd=0} \cdot \Delta x}{\Delta t S} V_r \quad (V_r < 0) \quad (11)
 \end{aligned}$$

여기에서 Δx 는, 시간 간격 Δt 동안 증가된 접수길이를 나타내며, S 는 strip간의 거리이다. 본 논문에서는 (11)식에 의한 선지 충격력의 계산에 있어서는 무한주파수의 부가 질량을 사용하였다. 접수길이의 증가속도도 상대속도 V_r 에 비례하므로 이들 충격력을 모두 속도의 차승에 비례하는 비선형 항임을 알 수 있다.

2) 선체 형상의 비선형성에 따른 부력과 동 유체력 계수 M_H, N_H 의 비선형 변화가 고려된다. 본 논문에서

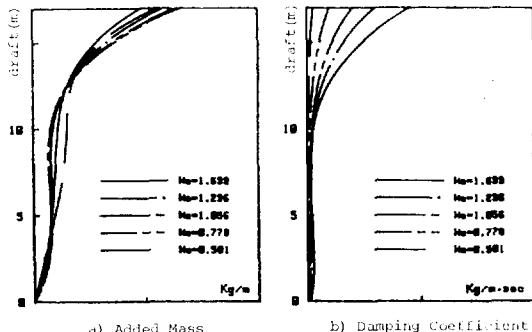


Fig. 2 Variation of added mass and damping coefficient v.s. draft at St. 3 (container ship)

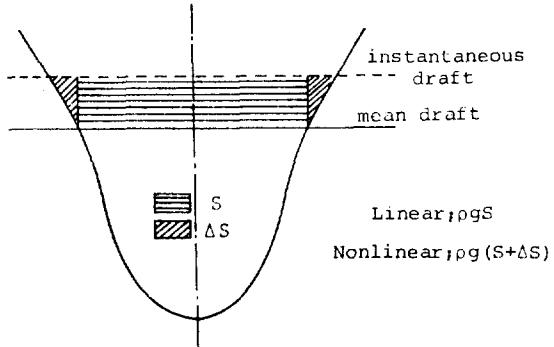


Fig. 3 Nonlinear variation of buoyance force

는 각 순간에서의 동 유체력 계수의 계산을 위해 조우 주파수에 대한 부가 질량과 감쇠계수를 Fig. 2에서와 같이 4~5개의 흙수에 대해 계산하고, cubic spline interpolation method에 의해 각 순간의 흙수에서의 부가 질량과 감쇠계수를 계산하였다.

또한, 흙수변화에 따른 침수면적의 비선형 변화를 고려하여 각 단면에서의 부력이 계산되었다. Fig. 3에서 보는 바와 같이 본 논문에서의 흙수 변화에 따른 부력 변화량은, 선형이론에서의 $f g S$ 와는 달리 $f g(S + \Delta S)$ 로 취급되게 되어 선체 형상에 따른 비선형성을 고려할 수 있다.

각 순간의 흙수에서의 침수면적은 동 유체력 계수들의 계산에서와 같은 방법으로 삼간법에 의해 계산되었다. 본 논문에서는 입사파중 압력의 수심에 따른 감쇠효과를 고려하여, 부력의 계산에 있어서는 각 순간의 흙수를 다음과 같이 계산하였다.

$$Zd' = \zeta - (x - x_C)\theta - \eta \cdot e^{-kT_m} + T \quad (12)$$

여기에서 T_m 은 각 단면에서의 평균흡수이다.

비선형 방정식의 해는 시간 적분법에 의해 구했으며 시간 적분 방법으로는 선형 해석에서 두조건 안정성이 증명되어 있는 Newmark Method를 택했다. [6] 즉, 시간 t_k 에서의 변위, 속도, 가속도를 각각 $U_k, \dot{U}_k, \ddot{U}_k$ 라고 하고 $t_k + \Delta t$ 에서의 가속도를 \ddot{U}_{k+1} 라 가정할 때 \ddot{U}_{k+1}, U_{k+1} 은 각각 다음과 같이 나타내어 진다.

$$\begin{aligned}
 \ddot{U}_{k+1} &= \dot{U}_k + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{U}_{k+1} + \ddot{U}_k) \\
 U_{k+1} &= U_k + \Delta t \dot{U}_k + \frac{1}{4} (\Delta t)^2 (\ddot{U}_{k+1} + \ddot{U}_k) \quad (13)
 \end{aligned}$$

적분을 위한 초기치로서는 선형이론의 해를 이용하였으며 각 계산 단계에서의 계산과정은 다음과 같다.

- 1) 현 계산단계 t_k 에서의 $\zeta_k, \dot{\theta}_k$ 를 $\zeta_{k+1}, \dot{\theta}_{k+1}$ 의 초기 가정치로 하여 (13)식에 의해 $\zeta_{k+1}, \dot{\theta}_{k+1}, \zeta_{k+1}, \theta_{k+1}$ 을 구한다.

- 2) 구해진 t_{k+1} 에서의 선체 위치와 변화된 파의 위치에 따라 각 단면에서의 흘수를 구하고, 이에 의해 부록의 운동 방정식의 계수들과 $F(t), M(t)$ 을 구한다.
- 3) 운동 방정식을 $\zeta_{k+1}, \dot{\theta}_{k+1}$ 에 관한 연립 방정식으로 하여 새로운 $\zeta_{k+1}, \dot{\theta}_{k+1}$ 를 구한다.
- 4) 새로 구해진 ζ_{k+1} 와 $\dot{\theta}_{k+1}$ 를 이용하여 다시 1)~3) 까지의 계산을 반복한다. 반복 계산중에 얻어지는 ζ_{k+1} 와 $\dot{\theta}_{k+1}$ 를 비교하여 충분히 수렴된 후에는 다음 계산단계 t_{k+2} 에 대한 계산을 수행한다.
- 위의 계산과정을 계속하여 선체운동이 정상상태에 이른 후에 한주기 동안의 거동을 비선형 해로 한다.

4. 계산에 및 고찰

수치계산은 Fig. 4에 보여지고 있는 컨테이너 선형에 대해 수행되었고, 주요 요목과 중량 분포가 각각 Table 1과 Fig. 5에 보여지고 있다. 시간 적분에 있어 시간 간격은 주기의 1/50로 하였다.

Fig. 6 과 Fig. 7에는 FP에서의 흘수 변화와 상대 속도 변화가 각각 보여지고 있다. 입사파는 파장 파고비 (λ/H_w)가 30인 영파이다. 비선형 이론에 의한 운동 진폭이 선형해보다 작은 것을 볼 수 있다.

Fig. 8에는 St. 3 (0.1L aft FP)에서의 충격력의 변

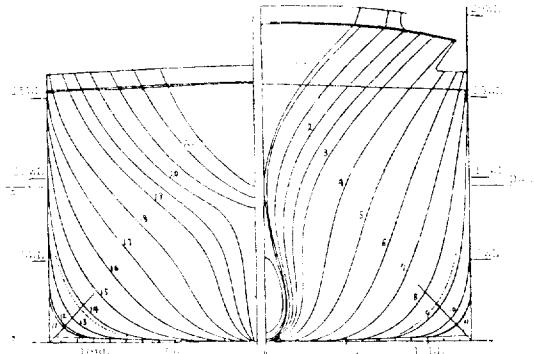


Fig. 4 Body plan of container ship (S-175)

Table 1 Principal particulars of container ship

Length between perpendiculars (L)	175 m
Moulded breadth (B)	25.4 m
Moulded depth (D)	15.4 m
Moulded draft (T)	9.5 m
Displacement (d)	24,742 ton
Block coefficient (C_b)	0.5716
Center of gravity from midship (x_G)	0.01417 L
Longitudinal gyroradius (K_1)	0.24 L

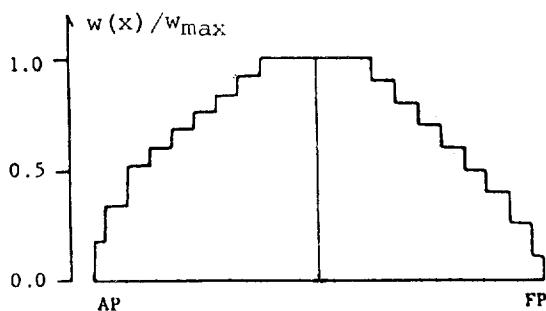


Fig. 5 Weight distribution of container ship

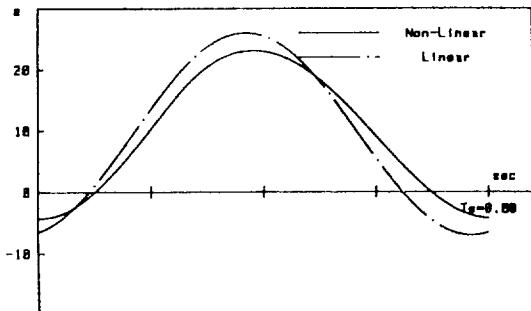


Fig. 6 Time history of instantaneous draft at FP of container ship

$$(F_n=0.275, \mu=180^\circ, \lambda/H_w=30, T_e=8.08 \text{ sec})$$

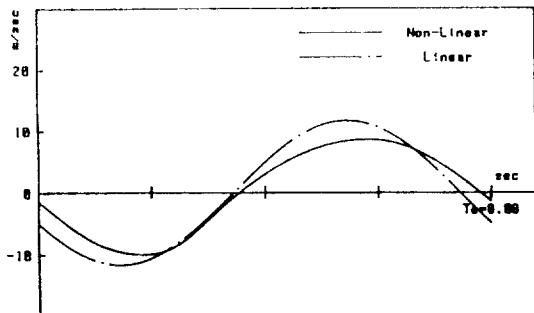


Fig. 7 Time history of relative velocity at FP of container ship

$$(F_n=0.275, \mu=180^\circ, \lambda/H_w=30, T_e=8.08 \text{ sec})$$

화를 볼 수 있는데, 선저 충격 현상과 선수부 flare 충격 현상이 순차적으로 나타남을 볼 수 있다. 이러한 충격에 의한 FP에서의 가속도의 변화와 선체 중앙단면에서의 굽힘 모멘트의 변화가 Fig. 9과 Fig. 10에서 각각 보여지고 있다.

Fig. 11, Fig. 13 과 Fig. 15에는 각각 $F_n=0.1, 0.2, 0.275$ 에 대한 영파증에서의 상하동요의 입사파고에 따

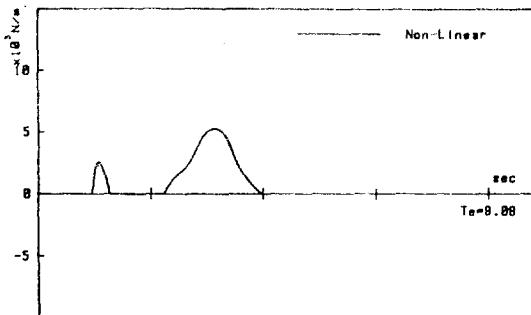


Fig. 8 Time history of impact force at St. 3 of container ship
($F_n=0.275$, $\mu=180^\circ$, $\lambda/H_w=30$, $T_e=8.08$ sec)

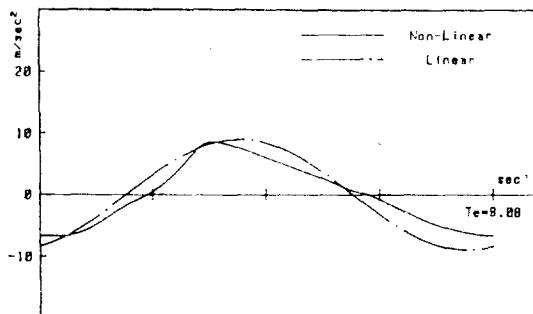


Fig. 9 Time history of acceleration at FP of container ship
($F_n=0.275$, $\mu=180^\circ$, $\lambda/H_w=30$, $T_e=8.08$ sec)

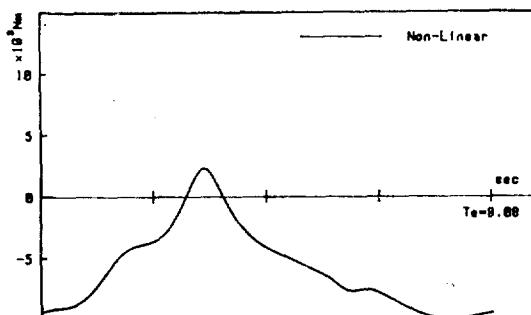


Fig. 10 Time history of bending moment at midship of container ship
($F_n=0.275$, $\mu=180^\circ$, $\lambda/H_w=30$, $T_e=8.08$ sec)

른 변화를 볼 수 있으며, Fig. 12, Fig. 14, Fig. 16에는 종동요의 변화를 볼 수 있다. 일반적으로 임사파고가 클수록 선체 운동의 임사파고에 대한 비는 줄어드는 것을 알 수 있고, 이러한 현상은 동조 주파수 부근에서 더욱 현저함을 알 수 있다. 또한 선속이 빠를수록 이러한 효과가 커짐도 알 수 있다. 이러한 운동전체의 감소효과는 충격력이 운동의 반대 방향으로 작

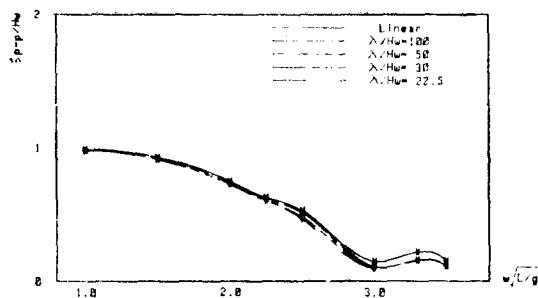


Fig. 11 Heave response v.s. wave height of container ship
($F_n=0.1$, $\mu=180^\circ$)

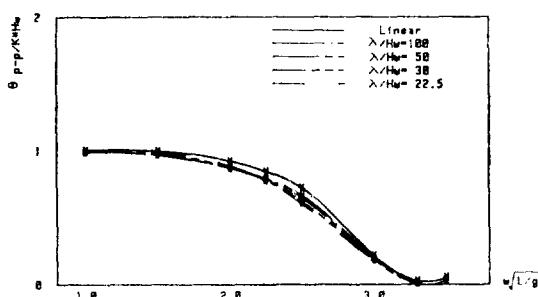


Fig. 12 Pitch response v.s. wave slope of container ship
($F_n=0.1$, $\mu=180^\circ$)

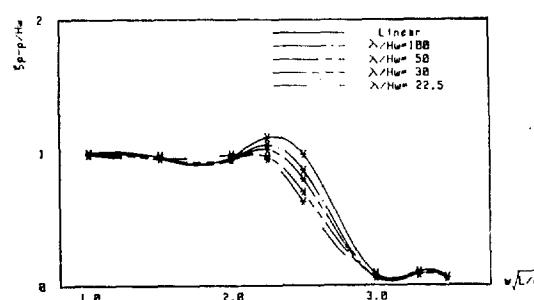


Fig. 13 Heave response v.s. wave height of container ship
($F_n=0.2$, $\mu=180^\circ$)

용하는 일종의 감쇠력의 할을 하기 때문으로 생각된다.

Fig. 17과 Fig. 18에는 파장 파고비가 15 일 때의, 비선형 해석에 의한 상하동요와 종동요의, 임사파의 임사각에 따른 변화가 각각 보여지고 있다. 사파증에서 는 유효파기율기 감소에 따라 종동요가 현저하게 감소하므로 선수부 운동은 비교적 심하지 않다고 할 수

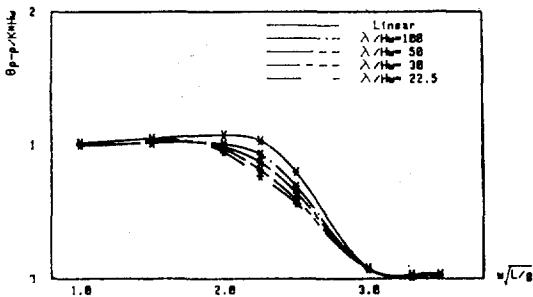


Fig. 14 Pitch response v.s. wave slope of container ship
($F_n=0.2$, $\mu=180^\circ$)

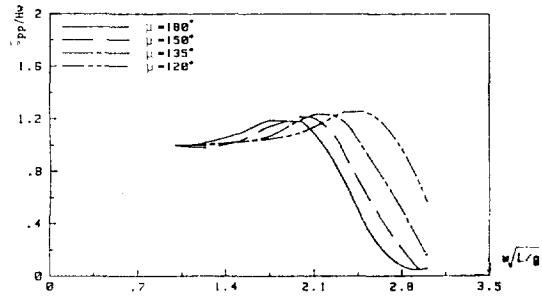


Fig. 17 Heave response v.s. heading angle of container ship
($F_n=0.275$, $\lambda/H_w=15$)

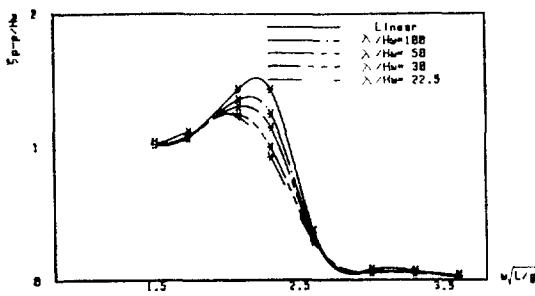


Fig. 15 Heave response v.s. wave height of container ship
($F_n=0.275$, $\mu=180^\circ$)

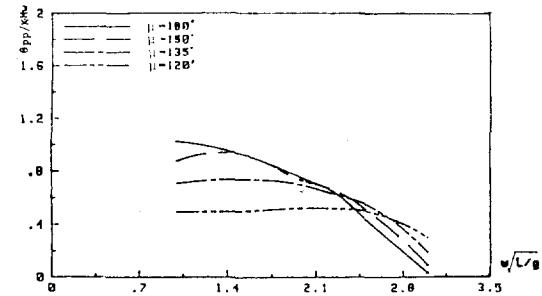


Fig. 18 Pitch response v.s. heading angle of container ship
($F_n=0.275$, $\lambda/H_w=15$)

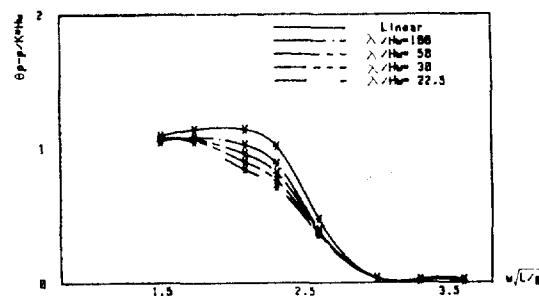


Fig. 16 Pitch response v.s. wave slope of container ship
($F_n=0.275$, $\mu=180^\circ$)

있다.

Fig. 19~Fig. 21에는 $F_n=0.1$, 0.2 , 0.275 에 대한 영파증에서의 입사파고에 따른, 선체 중앙 단면에서의 굽힘모멘트의 변화가 각각 보여지고 있다. 운동 응답과는 달리 입사파고가 증가할수록 무차원화된 굽힘모멘트는 증가하고 있음을 볼 수 있다.

Fig. 22에는 탱커 선형에 대한 운동 응답 계산값이

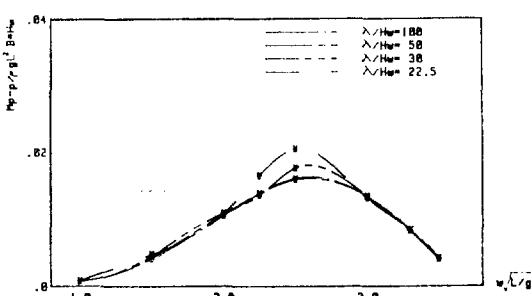


Fig. 19 Peak to peak bending moment at midship of container ship
($F_n=0.1$, $\mu=180^\circ$)

Yamamoto등 [1]의 계산 및 실험 결과와 비교되어 있다. 선형해는 본 논문과 Yamamoto등의 계산값이 같은 값을 주고 있으나, 비선형해의 경우 본 논문의 계산 결과는 선형해와 거의 차이가 없는데 비해 Yamamoto등의 계산결과는 전 파장 범위에 걸쳐 선형해보다 큰 값을 주고 있다. Yamamoto등은 부력 계산시 Smith 효과를 고려하지 않았다. 본 논문의 계산에 의하면 입사

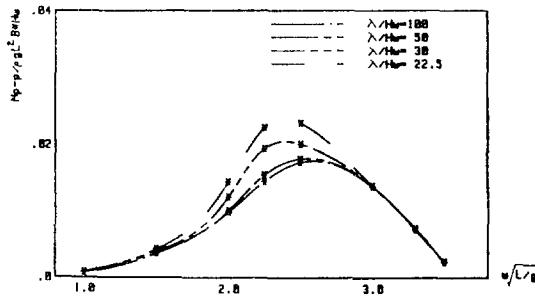


Fig. 20 Peak to peak bending moment at midship of container ship
($F_n=0.2$, $\mu=180^\circ$)

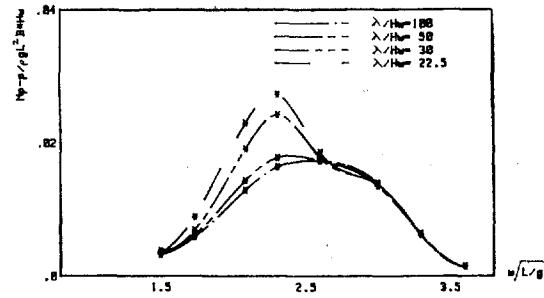


Fig. 21 Peak to peak bending moment at midship of container ship
($F_n=0.275$, $\mu=180^\circ$)

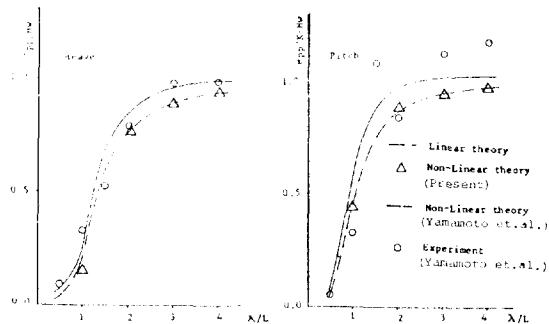


Fig. 22 Heave and pitch response of tanker [1]
($F_n=0.1$, $\mu=180^\circ$, $\lambda/H_w=50$)

파의 파고가 매우 작은 경우 비선형 해가 선형해에 접근하나, Yamamoto등의 결과는 그렇지 않다. Fig. 22에서의 파고 외에 몇 가지 파 기울기에 대한 계산도 수행되었는데 텅커 선형에 있어서는 파고에 따른 비선형 효과가 매우 작음을 알 수 있었다. 이는 텅커 선형이 선수부 flare가 비교적 작고 선속이 낮음에 기인하는 것으로 생각된다.

5. 결 론

부가 질량의 시간적 변화에 기인하는 충격력과 흔수 변화에 따른 부력의 비선형 변화 등과 같은 비선형 효과를 고려하여, 영파와 사파중에서의 선체 운동 응답과 파랑 하중이 다루어졌다. 또한 Yamamoto등[1]의 텅커 선형에 대한 계산도 수행하여 비교하였다.

콘테이너선에 대한 계산으로부터 입사파의 파고와 선속등이 선체 운동응답과 파랑 하중에 미치는 영향을 검토하였으며 다음의 결론을 얻었다.

1) 입사파고가 클수록 선체 운동의 입사파고에 대한 비는 감소하며, 이로부터 Yamamoto등의 결과

가 재확인되었다. 또한 입사파고가 클수록 무차원화된 선체 중앙 단면에서의 굽힘모멘트는 증가한다.

2) 이러한 비선형 효과는 입사파고가 클수록, 선속이 빠를수록 현저하고, 동조 주파수 부근에서 특히 현저하다.

이밖에 사파의 경우는 유효 파기울기의 현저한 감소로 선수부 운동이 영파의 경우보다는 완화되어, 텅커 선형보다는 선속이 높고 선수부 flare가 심한 콘테이너 선형에서 비선형 효과가 크다는 것을 알 수 있었다.

앞으로 본 논문에서는 단순한 가정에 의해 다루어진, 각 단면에서의 대진폭 운동에 따른 동 유체력 변화를 시간 영역에서의 엄밀한 방법으로 다루는 연구가 요구되며, 사파의 경우 본 논문에서 고려되지 않은 청동요의 영향을 고려하는 연구가 있어야겠다.

참 고 문 헌

- [1] Yamamoto, Y., Fujino, M. and Fukasawa, T., "Motion and Longitudinal Strength of a Ship in Head Sea and the Effects of Non-Linearities", *J. of SNA of Japan*, Vol. 143, 1978.
- [2] Yamamoto, Y., Fujino, M. and Fukasawa, T., "Motion and Longitudinal Strength of a Ship in Head Sea and the Effects of Non-Linearities", *J. of SNA of Japan*, Vol. 144, 1978, Vol. 145, 1979, Vol. 150, 1981.
- [3] Yamamoto, Y., Fukasawa, T., Arai, M. and Kajita, E., "Nonlinear Effects for Ship Motion in Heavy Seas", *Intl. Shipbl. Prog.*, Vol. 29, No. 333, 1982.

- [4] Stavovy, A.B. and Chuang, S.L., "Analytical Determination of Slamming Pressures for High-Speed Vehicles in Waves", *J. of Ship Res.*, Vol. 20, No. 4, 1976.
- [5] Hwang, J.H., Min, K.S., Kim, Y.J. and Ahn, S.I., "Prediction of Bow Flare Impact Pressure by Momentum Slamming Theory", *Proc. Intl. Workshop on Ship and Platform Motions*, 1983.
- [6] Bathe, K.J. and Wilson, E.L., *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice-Hall INC, 1976.

부 록

상하동요 및 종동요에 관한 연성운동방정식과 그 계수들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & A_{\zeta\zeta} + B_{\zeta\zeta}\dot{\zeta} + C_{\zeta\zeta}\ddot{\zeta} + A_{\zeta\theta}\dot{\theta} + B_{\zeta\theta}\dot{\theta} + C_{\zeta\theta}\theta \\ & = F_c \cos \omega_c t + F_s \sin \omega_c t + F(t) \\ & A_{\theta\theta}\dot{\theta} + B_{\theta\theta}\dot{\theta} + C_{\theta\theta}\theta + A_{\zeta\theta}\ddot{\zeta} + B_{\zeta\theta}\dot{\zeta} + C_{\theta\zeta}\zeta \\ & = M_c \cos \omega_c t + M_s \sin \omega_c t + M(t) \end{aligned}$$

여기에서,

$$\begin{aligned} A_{\zeta\zeta} &= \frac{W}{g} + \int_{-L/2}^{L/2} M_H dx \\ B_{\zeta\zeta} &= \int_{-L/2}^{L/2} N_H dx - U[M_H]_{-L/2}^{L/2} + \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\partial M_H}{\partial t} dx \end{aligned}$$

$$C_{\zeta\zeta} = 0$$

$$\begin{aligned} A_{\zeta\theta} &= - \int_{-L/2}^{L/2} (x - x_G) M_H dx \\ B_{\zeta\theta} &= - \int_{-L/2}^{L/2} (x - x_G) N_H dx + U[(x - x_G) M_H]_{-L/2}^{L/2} \\ &\quad + U \int_{-L/2}^{L/2} M_H dx - \int_{-L/2}^{L/2} (x - x_G) \frac{\partial M_H}{\partial t} dx \end{aligned}$$

$$C_{\zeta\theta} = U \int_{-L/2}^{L/2} N_H dx - U^2 [M_H]_{-L/2}^{L/2}$$

$$+ U \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\partial M_H}{\partial t} dx$$

$$\begin{aligned} F_c &= -\omega \omega_c \eta_0 \int_{-L/2}^{L/2} M_H e^{-kT_m} \cos(kx \cos \mu) dx \\ &\quad - \omega \eta_0 \int_{-L/2}^{L/2} N_H e^{-kT_m} \sin(kx \cos \mu) dx \\ &\quad + U \omega \eta_0 [M_H e^{-kT_m} \sin(kx \cos \mu)]_{-L/2}^{L/2} \\ &\quad - \omega \eta_0 \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\partial M_H}{\partial t} e^{-kT_m} \sin(kx \cos \mu) dx \end{aligned}$$

$$F_s = \omega \omega_c \eta_0 \int_{-L/2}^{L/2} M_H e^{-kT_m} \sin(kx \cos \mu) dx$$

$$- \omega \eta_0 \int_{-L/2}^{L/2} N_H e^{-kT_m} \cos(kx \cos \mu) dx$$

$$+ U \omega \eta_0 [M_H e^{-kT_m} \cos(kx \cos \mu)]_{-L/2}^{L/2}$$

$$\begin{aligned} & -\omega \eta_0 \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\partial M_H}{\partial t} e^{-kT_m} \cos(kx \cos \mu) dx \\ A_{\theta\theta} &= I + \int_{-L/2}^{L/2} (x - x_G)^2 M_H dx \\ B_{\theta\theta} &= \int_{-L/2}^{L/2} (x - x_G)^2 N_H dx - U[(x - x_G)^2 M_H]_{-L/2}^{L/2} \\ &\quad + \int_{-L/2}^{L/2} (x - x_G)^2 \frac{\partial M_H}{\partial t} dx \\ C_{\theta\theta} &= -U \int_{-L/2}^{L/2} (x - x_G) N_H dx - U^2 \int_{-L/2}^{L/2} M_H dx \\ &\quad + U^2 [(x - x_G) M_H]_{-L/2}^{L/2} \\ &\quad - U \int_{-L/2}^{L/2} (x - x_G) \frac{\partial M_H}{\partial t} dx \\ A_{\theta\zeta} &= - \int_{-L/2}^{L/2} (x - x_G) M_H dx \\ B_{\theta\zeta} &= - \int_{-L/2}^{L/2} (x - x_G) N_H dx + U[(x - x_G) M_H]_{-L/2}^{L/2} \\ &\quad - U \int_{-L/2}^{L/2} M_H dx \\ &\quad - \int_{-L/2}^{L/2} (x - x_G) \frac{\partial M_H}{\partial t} dx \\ C_{\theta\zeta} &= 0 \\ M_c &= \omega \omega_c \eta_0 \int_{-L/2}^{L/2} (x - x_G) M_H e^{-kT_m} \cos(kx \cos \mu) dx \\ &\quad + U \omega \eta_0 \int_{-L/2}^{L/2} M_H e^{-kT_m} \sin(kx \cos \mu) dx \\ &\quad + \omega \eta_0 \int_{-L/2}^{L/2} (x - x_G) N_H e^{-kT_m} \sin(kx \cos \mu) dx \\ &\quad - U \omega \eta_0 [(x - x_G) M_H e^{-kT_m} \sin(kx \cos \mu)]_{-L/2}^{L/2} \\ &\quad + \omega \eta_0 \int_{-L/2}^{L/2} (x - x_G) \frac{\partial M_H}{\partial t} e^{-kT_m} \sin(kx \cos \mu) dx \\ M_s &= -\omega \omega_c \eta_0 \int_{-L/2}^{L/2} (x - x_G) M_H e^{-kT_m} \sin(kx \cos \mu) dx \\ &\quad + U \omega \eta_0 \int_{-L/2}^{L/2} M_H e^{-kT_m} \cos(kx \cos \mu) dx \\ &\quad + \omega \eta_0 \int_{-L/2}^{L/2} (x - x_G) N_H e^{-kT_m} \cos(kx \cos \mu) dx \\ &\quad - U \omega \eta_0 [(x - x_G) M_H e^{-kT_m} \cos(kx \cos \mu)]_{-L/2}^{L/2} \\ &\quad + \omega \eta_0 \int_{-L/2}^{L/2} (x - x_G) \frac{\partial M_H}{\partial t} e^{-kT_m} \cos(kx \cos \mu) dx \\ F(t) &= \rho g \int_{-L/2}^{L/2} A' dx - W \\ M(t) &= -f g \int_{-L/2}^{L/2} (x - x_G) A' dx \end{aligned}$$

W 는 선체 중량이고, I 는 관성 모멘트이며, 계수 중 M_H , N_H , A' 은 시간에 따라 변화하는 항들이다.

— 항들은 부가질량의 시간적 변화에 따른 충격력에 관계 되는 항들이다.