

---

 論 文
 

---

大韓造船學會誌  
 第22卷 第1號 1985年 3月  
 Journal of the Society of  
 Naval Architects of Korea  
 Vol. 22, No.1, March 1985

## 増分形 有限要素法에 의한 軸對稱 Shell構造의 挫屈解析

金 載 福\* · 金 昌 烈\*\*

## Buckling Analysis of Axisymmetric Shells by Incremental Finite Element Method

by

J.B. Kim\* · C.Y. Kim\*\*

**Abstract**

This paper deals with the buckling as well as postbuckling analysis of axisymmetric shells taking the initial deflection effects into account.

Incremental equilibrium equations, based on the principle of virtual work, were derived by the finite element approach. For the large deformation analysis of shells and the determination of the load-displacement configuration in the prebuckling range as well as the postbuckling range by the finite element method, the successive step-by-step Newton-Raphson iterative technique was adopted.

To define the transition pattern of postbuckling behavior from the prebuckling state more accurately, a simple solution method was developed, i.e. the critical load was calculated by the load extrapolation method with the determinant of tangent stiffness matrix and the equilibrium configuration in the immediate postbuckling stage was obtained by perturbation scheme and eigenvalue analysis.

Degenerated isoparametric shell elements were used to analyse the axisymmetric shell of revolution. And by the method developed in this paper, the computer program applicable to the nonlinear analysis of both thin and moderately thick shells was constructed.

To verify the capabilities and accuracies of the present solution method, the computed results were compared with the results of analytical solutions. These results coincided fairly well in both the small deflection and large deflection ranges.

Various numerical analyses were done to show the effect of initial deflection and shape of shells on buckling load and postbuckling behavior.

Futhermore, corrected directions of applied loads at every increment steps were used to determine the actual effects of large deflection in non-conservative load systems such as hydrostatic pressure load.

The following conclusions can be obtained.

- (1) The method described in this paper was found to be both economic and effective in calculating

---

接受日字：1985年 3月 5日，再接受日字：1985年 4月 18日

\* 正會員，海軍士官學校 造船工學科

\*\* 正會員，釜山大學校 工科大學 造船工學科

buckling load and postbuckling behavior of shell structure.

- (2) Buckling and postbuckling behavior of spherical caps is critically dependent upon their geometric configuration, i.e. the shape of spherical cap and quantities of the initial deflection.
- (3) In the analysis of large deflection problems of shells by the incremental method, corrections of the applied load directions are needed at every incremental step to compensate the follower force effects.

### 1. 序 論

최근 고성능 전자계산기의 등장에 힘입은 우수한 數值計算法의 개발로, 선체구조의 非線形 거동 문제를 비롯한 중전의 難題들의 해결이 급진적인 발전을 보이고 있다.

그러나 shell 구조의 경우, 挫屈點 근방에서의 變形樣相이 고차의 非線形으로 될 뿐 아니라 挫屈荷重點은 特異가 되어, 많은 반복 계산 과정을 거친 뒤에도 근사적인 해석결과만을 얻게 되고, 특히 挫屈後의 거동과 初期變形의 효과를 포함한 해석은 얻지 못하고 있으며, 이러한 문제의 해결을 위해 荷重이나 變位の 단순 増分法[1]으로 부터, 全體 剛性率 行列의 determinant法[2], 剛性係數法[3]과 多項式에 의한 外插法[4] 등이 제안되어 있으나 어느 방법도 많은 회수의 반복 계산과 계산의 노력에 비하여 그 정확도의 보장에는 아직 많은 문제를 지니고 있는 실정이다.

따라서 본 연구에서는 外壓을 받는 軸對稱 shell 구조의 挫屈荷重點과 挫屈後 거동을 보다 간편하고 정확하게 해석하기 위해, shell의 변형 이론에 따른 非線形支配方程式을 degenerated isoparametric shell 要素에 의한 増分形 有限要素法으로 正式化시켜 증분법에 의한 일관된 계산만으로 挫屈荷重點을 결정할 수 있도록 하였으며, 이 계산 과정에서 얻어지는 固有值 方程式을 풀어 挫屈 모우드를 찾아낼 수 있는 계산 방법을 제시하였다.

아울러 이러한 増分 계산법을 이용하여 해양 구조물에서와 같이 非保存力인 靜水壓을 外力으로 받는 경우의 追從力의 효과를 포함시킬 수 있는 계산법의 개발과 이 追從力의 효과, shell의 形狀, 初期變形量의 크기가 挫屈 舉動에 미치는 영향을 살펴보았다.

## 2. 有限要素法에 의한 増分形 平衡方程式

### 2.1. 要素의 形狀과 變位式

가. 요소의 형상

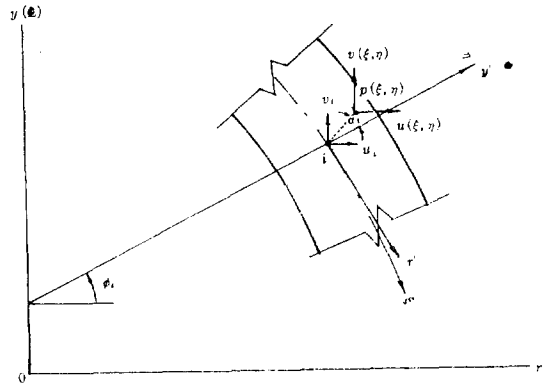


Fig. 1 Displacements in an axisymmetric shell element

Ahmad 등[5]이 isoparametric 要素의 장점을 살리면서 3차원 입체 요소로부터 軸對稱 shell의 해석에 적합하게 변형시킨 shell 要素를 취하기로 한다. 이때 要素座標系를 Fig. 1과 같이 잡으면, 요소의 형상은 中央面상의 節點 i의 좌표  $(r_i, y_i)$  및 두께  $t_i$ 와, 절점 위치각  $\phi_i$ 로써 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} r(\xi, \eta) \\ y(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \sum_i^m N_i(\xi) \begin{Bmatrix} r_i \\ y_i \end{Bmatrix} + \frac{t_i}{2} \begin{Bmatrix} \cos \phi_i \\ \sin \phi_i \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

여기서  $N_i$ 는 절점  $i$ 에 대한 形狀函數로서  $\xi$ 만으로 구성되고,  $m$ 은 한 요소당의 節點數이며,  $(r, y)$ 는 全體座標系,  $(\xi, \eta)$ 는 要素座標系를 나타낸다.

나. 요소의 變位式

지금 軸對稱 shell 구조가 軸對稱 變形을 한다고 가정하면, 요소내의 임의의 點  $p$ 에서의 변위는 중앙면에 위치한 절점  $i$ 의  $r, y$ 방향 변위  $u_i, v_i$ 와 中央면에 수직한 평면의 回轉變位  $\alpha_i$ 로써 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \sum_i^m N_i \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} + \sum_i^m N_i \frac{t_i}{2} \begin{Bmatrix} \cos \phi_i & -\sin \phi_i \\ \sin \phi_i & \cos \phi_i \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -(1 - \cos \alpha_i) \\ \sin \alpha_i \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

다. 要素 變形率 관계식

지금 軸對稱 shell의 軸對稱 變形의 가정에 따라, 全體座標系에서의 Green의 變形率-變位 관계식은 彈性

理論으로 부터 다음과 같이 나타낼 수 있다[6].

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_y \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_{r,y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u, r \\ v, y \\ u/r \\ v, r + u, y \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u, r^2 + v, r^2 \\ u, y^2 + v, y^2 \\ (u/r)^2 \\ 2(u, r u, y + v, r v, y) \end{Bmatrix}$$

$$= \{\epsilon^0\} + \{\epsilon^l\} \quad (2.3)$$

여기서  $\epsilon^0$ 는 變形率의 線形部,  $\epsilon^l$ 은 非線形部를 나타내고,  $u, r = \frac{\partial u}{\partial r}$ ,  $v, y = \frac{\partial v}{\partial y}$  ...이다.

또 식 (2.3)은 다음과 같이 行列형태로 고쳐 쓸 수 있다.

線形部  $\{\epsilon^0\}$ 는

$$\{\epsilon^0\} = \begin{Bmatrix} u, r \\ u, y \\ u/r \\ u, y + v, r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u, r \\ v, r \\ u, y \\ v, y \\ u/r \end{Bmatrix}$$

$$= [H][G] \quad (2.4)$$

그리고 變形率의 非線形部  $\{\epsilon^l\}$ 은

$$\{\epsilon^l\} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u, r v, r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u, y v, y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u/r \\ u, y v, y & u, r v, r & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u, r \\ v, r \\ u, y \\ v, y \\ u/r \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} [A][Q] \quad (2.5)$$

이러한 變形率은 要素座標系에 대한 값이어야 하므로 다음과 같은 座標變換이 필요하다.

$$\begin{Bmatrix} u', r \\ u', y \end{Bmatrix} = [T]^T \begin{Bmatrix} u, r \\ u, y \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

여기서 行列  $[T]$ 는  $r, y$ 軸의 方向餘弦의 行列이며, Fig. 1로 부터 다음과 같이 된다.

$$[T] = \frac{1}{\sqrt{r^2 + y^2}} \begin{bmatrix} -y, \xi & -r, \xi \\ r, \xi & -y, \xi \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

또 미분의 chain rule로 부터 다음의 관계가 성립한다.

$$\begin{Bmatrix} u, r \\ u, y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi, r & \eta, r \\ \xi, y & \eta, y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u, \xi \\ u, \eta \end{Bmatrix}$$

$$= [J]^{-1} \begin{Bmatrix} u, \xi \\ u, \eta \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

단 Jacobian 行列은

$$[J] = \begin{bmatrix} r, \xi & y, \xi \\ r, \eta & y, \eta \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

## 2.2. 有限要素法の 적용

가. 増分形 平衡方程式

大變形 문제를 포함한 非線形 해석 문제는 假想의

원리에 의한 變分 理論의 적용으로 増分 구간별 線形化가 가능하고, 有限要素式으로 쉽게 正式化될 뿐 아니라, 行列 方程式으로 간결하고 일반성 있게 표시되므로 전산 프로그램의 작성도 용이하게 된다.

따라서 Kirchhoff의 應力과 이에 대응하는 Green의 變形率로써 평형방정식을 行列 형태로 나타내면 다음과 같이 된다.

$$\int_V \delta\{\epsilon\}^T \{\sigma\} dV - \int_A \delta\{d\}^T \{t\} dA = \{0\} \quad (2.10)$$

여기서

$\{d\}$ : 요소내 임의점의 變位 벡터

$\{\epsilon\}$ : 변위  $\{d\}$ 에 대응하는 Green의 變形率 벡터

$\{\sigma\}$ : 變形率  $\{\epsilon\}$ 에 따른 Kirchhoff의 應力 벡터

$\{t\}$ : 變位  $\{d\}$ 를 유발시키는 荷重 벡터

$dV, dA$ : 요소의 체적, 면적

나. 有限要素法에 의한 正式化

(1) 變位

식 (2.10)의 變位  $\{d\}$ 를 요소의 절점 변위  $\{d^e\}$ 로 나타내면

$$\{d\} = [N]\{d^e\} \quad (2.11)$$

여기서  $[N]$ 은 식 (2.1), (2.2)에서 사용된 形狀函數의 行列이다.

(2) 變形率

식 (2.4), (2.5)의 變形率-變位 관계식의 變分을 취해보면

$$\delta\{\epsilon^0\} = [H]\delta\{Q\} \quad (2.12)$$

$$\delta\{\epsilon^l\} = \frac{1}{2} \{(\delta[A])\{Q\} + [A](\delta\{Q\})\} = [A]\delta\{Q\} \quad (2.13)$$

또

$$\delta\{Q\} = [G]\delta\{d^e\} \quad (2.14)$$

로 두면

$$\begin{aligned} \delta\{\epsilon\} &= \delta(\{\epsilon^0\} + \{\epsilon^l\}) = ([H] + [A])\delta\{Q\} \\ &= ([H] + [A])[G]\delta\{d^e\} \\ &= ([B^0] + [B^l])\delta\{d^e\} \\ &= [B]\delta\{d^e\} \end{aligned} \quad (2.15)$$

여기서  $[B]$ 는

$$\begin{aligned} [B^0] &= [H][G] \\ [B^l] &= [A][G] \\ [B] &= [B^0] + [B^l] \end{aligned} \quad (2.16)$$

(3) 平衡方程式

식 (2.11)~(2.16)을 식 (2.10)에 대입하고 정리하면

$$\delta\{d^e\} \left( \int_V [B]^T \{\sigma\} dV - \int_A [N]^T \{t\} dA \right) = \{0\} \quad (2.17)$$

여기서  $\delta\{d^e\}$ 는 절점 변위의 假想量이므로  $\delta\{d^e\} \neq \{0\}$

이다.

따라서

$$\int_V [B]^T \{\sigma\} dV - \int_A [N]^T \{t\} dA = \{0\} \quad (2.18)$$

식 (2.18)에서 右邊은, 外力 및 內力에 의해 완전 평형일 때에  $\{0\}$ 가 되나 통상 數式化 과정에서의 高次項 생략, 계산 과정에서의 오차로 인하여 완전 평형이 이루어 지지 않으므로, 이를 不平衡力으로 보아  $\{R\}$ 로 두어 増分形으로 고쳐 나타내 보면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \Delta \left( \int_V [B]^T \{\sigma\} dV - \int_A [N]^T \{t\} dA \right) \\ = \int_V \Delta [B]^T \Delta \{\sigma\} dV + \int_V \Delta [B]^T \{\sigma\} dV \\ - \int_A \Delta [N]^T \Delta \{t\} dA = \{R\} \end{aligned} \quad (2.19)$$

여기에  $\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\}$ 의 관계와 식 (2.11)~(2.15)를 대입하면 식 (2.19)의 첫항은

$$\begin{aligned} \int_V [B]^T \Delta \{\sigma\} dV &= \int_V [B]^T [D] [B] dV \Delta \{d^e\} \\ &= \int_V ([B^0] + [B^1])^T [D] ([B^0] + [B^1]) dV \Delta \{d^e\} \\ &= ([K_0] + [K_L]) \Delta \{d^e\} \end{aligned} \quad (2.20)$$

단

$$[K_0] = \int_V [B^0]^T [D] [B^0] dV \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} [K_L] &= \int_V [B^0]^T [D] [B^1] dV + \int_V [B^1]^T [D] [B^0] dV \\ &\quad + \int_V [B^1]^T [D] [B^1] dV \end{aligned} \quad (2.22)$$

또 식 (2.19)의 둘째항도 다음과 같이 고쳐진다.

$$\begin{aligned} \int_V \Delta [B]^T \{\sigma\} dV &= \int_V \Delta ([B^0] + [B^1])^T \{\sigma\} dV \\ &= \int_V \Delta ([H][G] + [A][G])^T \{\sigma\} dV \\ &= \int_V (\Delta [G]^T [H]^T + \Delta [G]^T [A]^T \\ &\quad + [G]^T \Delta [A]^T) \{\sigma\} dV \\ &= ([K_{\sigma_1}] + [K_{\sigma_2}] + [K_{\sigma_3}]) \Delta \{d^e\} \end{aligned} \quad (2.23)$$

단

$$\begin{aligned} [K_{\sigma_1}] \Delta \{d^e\} &= \int_V \Delta [G]^T [H]^T \{\sigma\} dV \\ [K_{\sigma_2}] \Delta \{d^e\} &= \int_V \Delta [G]^T [A]^T \{\sigma\} dV \\ [K_{\sigma_3}] \Delta \{d^e\} &= \int_V [G]^T \Delta [A]^T \{\sigma\} dV \end{aligned} \quad (2.24)$$

또 식 (2.19)의 좌변 셋째항은 하중의 増分項으로서 다음과 같이 들 수 있다.

$$\Delta [P] = \int_A [N]^T \Delta \{t\} dA \quad (2.25)$$

식 (2.20)~(2.25)를 식 (2.19)에 대입하면 최종적

인 평형방정식이 다음과 같이 얻어진다.

$$[K_T] \Delta \{d^e\} - \Delta [P] = \{R\} \quad (2.26)$$

단

$$[K_T] = [K_0] + [K_L] + [K_{\sigma_1}] + [K_{\sigma_2}] + [K_{\sigma_3}] \quad (2.27)$$

여기서  $[K_T]$ 는 임의 増分 단계에서의 全體 剛性率 行列 또는 接線 剛性率 行列이다.

따라서 要素座標系에 의한 各 要素의  $[K_T]$ 가 계산되면 이를 全體座標系로 변환 후 이들의 중첩을 통해 임의 増分 단계에서의 全體 構造에 대한 평형방정식이 구성되고, 境界조건과 荷重조건을 加하여, 각 절점에 있어서의 變位 増分量이 얻어지면 이로부터 變形率과 應力の 増分量이 계산되어 前 増分 단계의 값에 합하여 現 増分 단계에서의 모든 값들을 얻을 수 있다.

이 때  $\{R\}$ 의 값이  $\{0\}$ 이 되도록 每 増分 단계마다 반복 계산이 요구되나 修正 Newton-Raphson法을 이용하면 편리한 경우도 있다[7].

### 2.3. 荷重과 初期變形

가. 荷重

지금 임의 변형 상태에서의 작용 하중으로는 要素의 中央面에 靜的으로 작용하는 表面力 뿐이라고 가정하면, 要素의 임의점에 작용하는 荷重의 크기  $\{P\}$ 는 節點力  $\{P^e\}$ 에 의해 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$P = \sum_j N_j P_j^e = [N] \{P^e\} \quad (2.28)$$

또 식 (2.28)에서 表面에 작용하는 하중  $\{P\}$ 에 의한 임의점의 수직 하중 벡터를  $\{\bar{T}\}$ 라 하면

$$\{\bar{T}\} = \{n\} P \quad (2.29)$$

여기서  $\{n\}$ 은 Fig. 2에 표시된 shell 구조의 표면상의 임의의 微少 要素에서 잡은 요소좌표계  $\xi, \eta$ 로 부터 다음과 같이 나타내어질 수 있다.

$$\{n\} = \frac{[k] \times [d\xi]}{|[k] \times [d\xi]|} \quad (2.30)$$

단  $[k] = \{0 \ 0 \ 1\}^T$ ,  $[d\xi] = \{x, \xi \ y, \xi \ 0\}^T$

따라서 수직 하중  $\{\bar{T}\}$ 에 의한 요소의 等價 節點 荷重 벡터  $\{T\}$ 는 다음과 같이 고칠 수 있다.

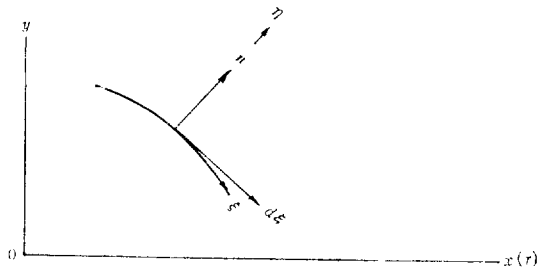


Fig. 2 Global and reference coordinate systems

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} = \int_A [N]^T \{\bar{T}\} dA \quad (2.31)$$

또  $\{T\}$ 은  $\{P^e\}$ 로서 數値계산에 용이하게 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\{T\} = \int [N]^T \begin{Bmatrix} -y \\ x, y \end{Bmatrix} \{N\} \{P^e\} dA \quad (2.32)$$

이 때 한 増分 단계에서는 하중의 작용 방향이 일정하다고 본다.

나. 初期變形

초기변형이 강도에 미치는 영향을 고려하기 위하여 初期變形의 形狀은 軸對稱의이며, 그 크기는 두께 정도 이내이고, 이에 따른 初期變形률과 應力을 각각  $\{d_I\}$ ,  $\{\varepsilon_I\}$ ,  $\{\sigma_I\}$ 라고 가정하면 식 (2.18)은 다음과 같이 고쳐진다.

$$\int [B]^T (\{\sigma\} - \{\sigma_I\}) dV - \int [N]^T \{t\} dA = \{0\} \quad (2.33)$$

여기서  $\{\varepsilon_I\}$ ,  $\{\sigma_I\}$ 는 초기변위  $\{d_I\}$ 에 의한 값이므로 식 (2.27)의 전체 강성을 행렬은 결국 다음과 같이 고쳐진다.

$$\begin{aligned} [K_T] &= [K_0] + [K_L] + [K_\sigma] - [K_{\sigma_I}] \\ &= ([K_0] - [K_{\sigma_I}]) + ([K_L] + [K_\sigma]) \end{aligned} \quad (2.34)$$

따라서 増分 계산의 첫 단계에서  $([K_0] - [K_{\sigma_I}])$ 를 한번 계산해 두면, 이후 계산은 初期變形이 없는 경우와 동일한 과정을 따를 수 있다.

### 3. 増分 계산법에 의한 挫屈 解析

#### 3.1. 개 요

増分법에 의한 平衡方程式의 해석시, 荷重의 계속된 増분에 의해 누적된 하중의 크기가 어느 臨界值에 이르면, 그 구조의 全體 剛性率 行列  $[K_T]$ 가 特異값을 갖게 되어 평형방정식의 解를 얻을 수 없게 된다.

이러한 문제의 해결을 위해 제안된 여러 방법들 중, 특히 増分 계산법을 이용한 挫屈 荷重의 계산에는  $[K_T]$ 의 determinant( $\det K_T$ )법이 널리 채택되어 왔으나[8] 挫屈 하중 근방에서 하중 増分量의 계산에 많은 주의를 요할 뿐 아니라 여러 차례의 반복 계산을 행하여야 한다. 따라서 Surana[9] 등은 하중의 増分 과정에서 臨界 荷重에 이르면 절점의 變位나 荷重을 임의로 増分시켜 特異點을 피하였지만, 이 방법은 増分시킨 自由도와 増分量의 선정이 어려운 단점이 있다. 또 Sharif 등[10]은 하중을 받는 自由도에 假想 스프링을 달아  $[K_T]$ 를 조정시켜 特異點을 피하도록 하였고, Horrigoe[3] 등은 剛性係數의 도입에 의한 하중의 自動 増加法으로, Larsen[2]은 變位 増分の 반복 계산법으로

挫屈 荷重은 각각 알고 있다. 이와 달리 Gallagher[4]는 挫屈 荷重點을 찾기 위해 荷重-變位 曲線상의 4점을 잡아 多項式 형태의 荷重-變位 曲線을 外挿法으로 추정하여, 이 曲線의 變曲點을 挫屈 荷重으로 취하기도 하였으며, Kiciman[11]은  $\det K_T$ 에 의한 固有值 방정식을 유도하여 挫屈 舉動을 해석하였으나 이 방법들은 모두 수차의 反復 계산이나 복잡한 數式에 의존하고 있는 실정이다.

#### 3.2. 挫屈 荷重의 결정

구조물의 安定性 판별의 여러 방법중 變形 에너지법[12]에 의하면 임의 하중 상태에서의  $[K_T]$ 가 positive definite인 때는 安定 상태이나, 차츰 하중을 증가시켜 가면 剛性이 감소해 나간다. 마침내 하중의 臨界值에 도달하게 되어  $[K_T]$ 가 特異값을 갖게 된다. 특히 増分법에 의한 非線形 방정식의 해석시에는 每 増分 단계마다 구성되는  $[K_T]$ 가 帶狀의 對稱形이 되고, Gauss 消去法에 의하면  $\det K_T$ 가 쉽게 결정되므로  $\det K_T$ 법에 의한 구조의 安定性 판단법이 有用하게 적용되어 지고 있으나, 이 때 挫屈點에서는  $\det K_T=0$ 가 되므로  $\det K_T=0$ 인 하중은 실제로 계산할 수 없기 때문에 본 연구에서는 每 増分 단계마다  $[K_T]$ 의 norm을 구하여 다음 값을 계산하기로 한다.

$$\left| \frac{\det K_T^{n-1} - \det K_T^n}{\det K_T^n} \right| < \text{Toler } 1 \quad (3.1)$$

여기서  $n$ : 반복 계산 회수

Toler 1: 허용 범위

식 (3.1)로부터 Toler 1이 0에 가까운 일정 범위에 들어올 때의 하중을 挫屈 荷重으로 취할 수 있을 것이다. 그러나 荷重 増分법에 의한 계산의 경우, 増分시켜야 할 荷重의 크기를 결정하기 위해서는 많은 회수의 増分 계산이나 試行錯誤에 의한 계산에 따른 경우가 많다. 따라서 여기에서는 식 (3.1)의 Toler 1을 어느 정도 크게 잡은 일정 범위 까지는 하중을 적당히 増分시켜 나가다가 일정 범위 이내로 들어오게 되면 荷重의 増分量을 Toler 2에 의해 조정할 수 있도록 수정한 식 (3.2)와 같은 방법을 적용하기로 한다.

$$P^{n+1} = P^n + \Delta P^n \quad (3.2a)$$

$$\Delta P^n = \frac{P^n - P^{n-1}}{\det K_T^{n-1} - \det K_T^n} \det K_T^n \quad (3.2b)$$

여기서

$$\Delta P < \text{Toler } 2$$

단 Toler 2도 허용 범위이다.

이 경우 Toler 2의 크기를 적당히 잡으면 挫屈 荷重의 결정이 가능하게 되고 Toler 1의 값에 따라 식 (3.1)의 收斂을 위한 반복 계산 회수가 결정되므로,

하중 増分法의 일관된 계산 과정을 통해 비교적 적은 전체적인 계산 회수의 수행으로 正解에 가까운 挫屈 荷重을 얻을 수 있는 큰 장점이 있다.

뿐만 아니라 본 연구의  $\det K_T$ 법과 挫屈點 근방에서, 식 (3.2)의 하중의 자동 增加法에 의한 증가시킬 하중의 계산법은, 다음 절에 설명하게 될 挫屈後 거동의 계산에 필요한 固有值 방정식을 挫屈 荷重의 계산 과정중에 바로 구성시킬 수 있는 잇점을 갖게 된다.

3.3. 挫屈後 舉動의 해석

구조물의 挫屈點에서는 엄밀히 動的 變形이 일어나나, 본 연구에서는 挫屈 순간의 變形이 靜的으로 일어난다고 가정하고 荷重의  $\det K_T$ 법과 식 (3.2)의 하중 자동 增加法을 적용하여 挫屈 荷重과 挫屈後 거동의 규명을 위한 다음과 같은 近似 解法을 적용키로 한다.

지금 3.2 절에서 구한 近似 挫屈 荷重을  $\hat{p}_1$ , 그 직접 増分 단계의 하중을  $\hat{p}_2$  라 하고, 이  $\hat{p}_1, \hat{p}_2$  는 정확한 挫

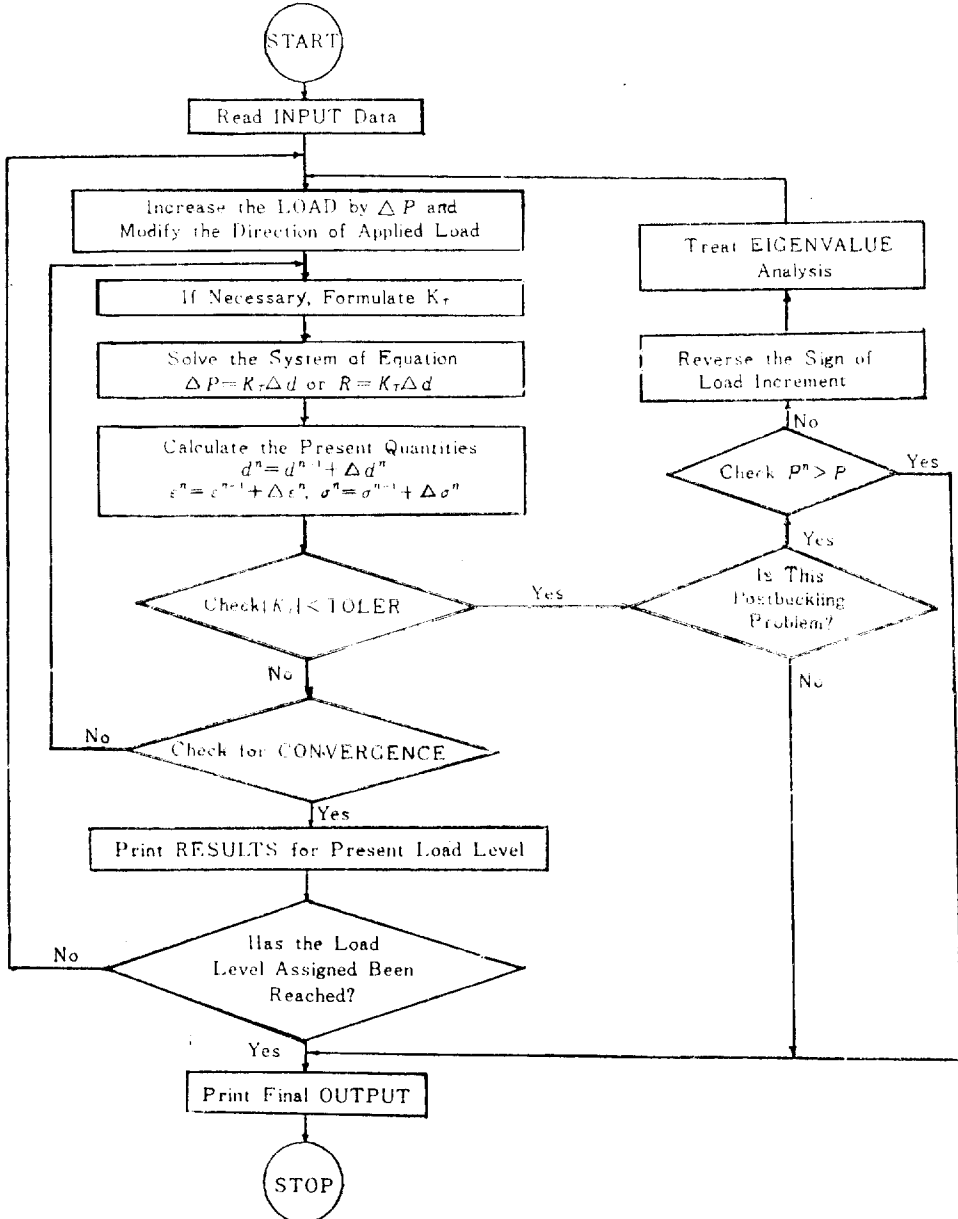


Fig. 3 Flow chart

屈荷重  $\hat{p}_0$ 에 아주 가까운 값이라고 보면, 이들 하중에 대응하는 剛性率 行列을 각각  $[K_1^0]$ ,  $[K_2^0]$ ,  $[K_3^0]$ 로 둘 수 있고, 이들 사이에는 다음의 관계가 성립될 수 있다.

$$[K_3^0] - [K_1^0] = [\epsilon] \quad (3.3)$$

여기서  $[K_3^0]$ 는 挫屈點에서의 接線 剛性 行列로서 特異가 되어 정확한 行列을 구성시킬 수가 없으며,  $[\epsilon]$  行列 역시 未知인 perturbation 行列이다. 따라서 식 (3.3)의  $[\epsilon]$ 를 다음과 같이 가정하기로 한다.

$$[\epsilon] = \bar{\lambda}([K_1^0] - [K_2^0]) = \bar{\lambda}A([K_1^0]) = -\bar{\lambda}A([K_2^0]) \quad (3.4)$$

또 變形 에너지를 이용한 安定性 판정법에 의한 挫屈點에서는 임의 變位  $\delta\{d\}$ 에 의해 다음 조건이 만족된다[12].

$$\delta\{d\}^T [K_3^0] \delta\{d\} = 0 \quad (3.5)$$

이 식은 다음과 같이 변형되며, 이 때의  $\delta\{d\}$ 를 固有 벡터로 볼 수 있다.

$$[K_3^0] \delta\{d\} = 0 \quad (3.6)$$

따라서 식 (3.3), (3.4)로부터 식 (3.6)은 다음과 같이 고쳐진다.

$$([K_1^0] - \bar{\lambda}A([K_1^0])) \delta\{d\} = 0 \quad (3.7)$$

식 (3.7)로부터 固有值  $\bar{\lambda}$ 와 이  $\bar{\lambda}$ 중의 最少值에 대한 固有 벡터  $\delta\{d\}$ 를 얻을 수 있다.

이 때  $\hat{p}_1$  값이  $\hat{p}_0$ 에 가까우면 가까울수록 固有 벡터  $\delta\{d\}$ 도 정확한 挫屈點에서의 挫屈 樣相에 가깝게 되며, 일단  $\delta\{d\}$ 가 얻어지면 이 벡터를 正規化시킨 후 이 값을  $\hat{p}_1$ 에 대응하는 挫屈 직전의 變位量에 더하여 挫屈 직후의 變形 樣相을 결정한다.

### 4. 解析 結果와 檢討

#### 4.1. 是律解析

가. 非線形 構成 方程式의 數值 解法

増分法에 의해 區間別로 線形化시킨 非線形方程式의 여러 數值 解法들중에 本 연구에서는 2nd modified Newton-Raphson法을 적용한다[13].

나. 數值 解析 프로그램의 구성

數值 解析을 위하여, 2nd modified Newton-Raphson法에 의한 大變形 解析 프로그램을 기본으로 하고, 여기에 挫屈 荷重과 挫屈後 거동을 결정하는 副 프로그램을 추가하여 UNIVAC 1100/60 system 電算機에 적

합하도록 전체 프로그램을 구성하였으며, 이 프로그램의 개략적인 흐름도는 Fig. 3과 같다.

#### 4.2. 解析上의 考慮

가. 解析의 制限

軸對稱 shell의 挫屈 擧動의 解析을 위해 다음과 같은 制限을 설정하여 本 연구의 계산 범위를 한정시킨다.

(1) 荷重은 軸對稱인 表面力만 작용한다.

(2) shell의 形狀은 挫屈 變形 擧動이 軸對稱인 部分球型이다.

(3) 初期變形의 形狀( $W_0$ )은 Fig. 4와 같고, 中央部の 最大 처짐량  $\delta_0$ 에 의해 식 (4.1)과 같이 나타내진다.

$$W_0 = \delta_0(1 - S^2)^2 \quad (4.1)$$

여기서

$$S = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \alpha = 0 \sim \beta$$

나. 解析 모델

shell의 形狀別 挫屈 荷重과 挫屈後 擧動을 조사하기 위하여 Fig. 4와 같이 均一 分布 荷重이 작용하는 둘레가 고정된 部分球型 形狀을 계산 모델로 택하고, 다음과 같은 形狀係數  $\lambda$ 로써 形狀을 정의한다.

$$\lambda = \sqrt[3]{12(1-\nu^2)} \sqrt{R/t} \sin \beta \quad (4.2)$$

여기서  $R$ : 部分球型의 半徑

$t$ : 部分球型의 두께

$\beta$ : 中央部와 고정端 사이角

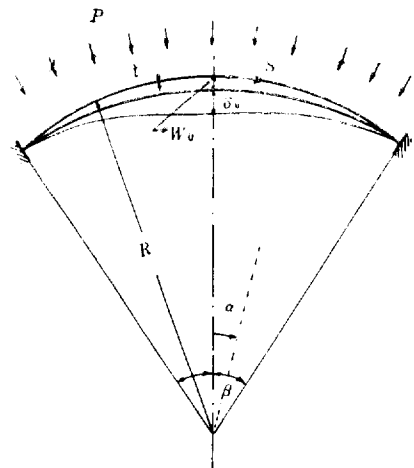


Fig. 4 Model of clamped spherical cap and shape of initial deflection

4.3. 本 研究 方法의 檢證

가. 數值 解析 結果의 精確도 比較

(1) Weinitzschke의 理論解와 比較

본 연구의 解法에 의한 挫屈 荷重과 挫屈後 거동을 Weinitzschke[14]의 級數解에 의한 해석 結果와의 比較는 Fig. 5 과 같다.

이때 계산 모델은 Weinitzschke가 택한 것과 동일한 均一 分布 外壓을 받는 球型이 支持된  $\lambda^2=10$ 의 部分球型으로, 挫屈 荷重과 挫屈後 擧動은 精確한 값으로 알려져 있는 Weinitzschke의 理論解의 거의 一致되는 좋은 結果를 보여준다.

(2) Uemura의 理論解와 比較

Fig. 4 와 같이 均一 分布 荷重이 작용하는 球型이 固定된 部分球型을 계산 모델로 하고  $\lambda$ 가 3, 4, 5 인 때의 挫屈 擧動은 Uemura[15]의 理論 解析 結果와의 比較 結果는 Fig. 6 와 같다.

이 경우에도 初期 挫屈과 後挫屈 荷重은 Uemura의

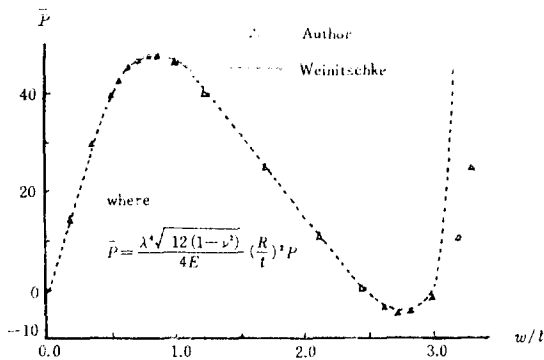


Fig. 5 Postbuckling behavior of the simply supported spherical cap under uniform external load  $\lambda^2=10$

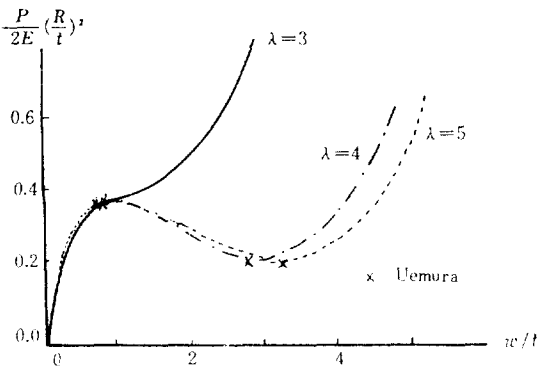


Fig. 6 Load-deflection curves of clamped spherical cap under uniform external load

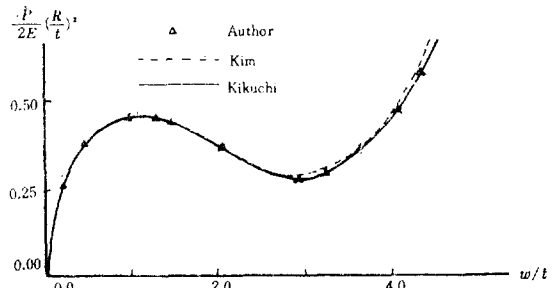


Fig. 7 Comparison of the postbuckling behaviors of the clamped spherical cap under uniform external load  $\lambda=4$

계산값과도 잘 一致하고 있다.

(3) 數值 解析 結果와 比較

均一 外壓을 받는 球型이 고정된  $\lambda=4$ 의 部分球型에 대하여, hybrid變位法을 사용한 Kikuchi[16]의 해석 結果 및  $\det K_T$ 法과 挫屈點에서 變位 増分法에 의한 金[8]의 계산 結果와의 比較는 Fig. 7 와 같고, 본 연구 結果는 이들의 挫屈後 擧動까지도 잘 一致하고 있다.

나. 본 연구법의 특성

본 연구의 挫屈 擧動 해석법은 増分 계산만으로 종래의 복잡한 理論解와 거의 一致하는 좋은 結果를 얻을 수 있었을 뿐 아니라 挫屈 荷重의 결단 정도에 해당하는 하중으로 부터 挫屈 荷重 까지의 반복 계산 회수가 종래의  $\det K_T$ 法의 2/3 정도에서, 같은 挫屈 荷重을 얻을 수 있었고, 挫屈點 부근에서 増分시킬 하중의 크기를 식 (3.2)로 부터 자동적으로 계산해 낼 수 있어, 근사적인 増分量의 추정을 위한 복잡한 계산을 피할 수 있으며, 이 増分 계산의 마지막 두 단계에서 구정되는 固有值 식으로 부터 挫屈 모우드의 결정이 가능하며, 挫屈點에서의 挫屈 모우드 결정을 위한 強制 變位 増分量의 가정이라는 어려운 문제가 없게 된다.

4.4. 挫屈 擧動의 檢討

가. shell의 形狀에 따른 挫屈 擧動

Fig. 4 의 계산 모델에 대한  $\lambda=3, 4, 5$  인 shell 形狀別 挫屈 擧動의 계산 結果는 Fig. 6 와 같다. 形狀이 다른 경우에도 相對 挫屈 荷重값은 거의 비슷하나 挫屈後 擧動은 크게 달라지고 있음을 알 수 있다.

나. 初期變形에 따른 挫屈 擧動

初期變形의 分布 形狀을 Fig. 4 와 같이 가정하여 식 (4.1)로 나타내고, 中央部의 최대 처짐량  $\delta_0$ 와 두께  $t$ 와 의 比로서 初期 처짐량의 크기를 정의하며, 이 때에 初期變形의 크기에 따른 挫屈 荷重과 挫屈後 擧動을 계



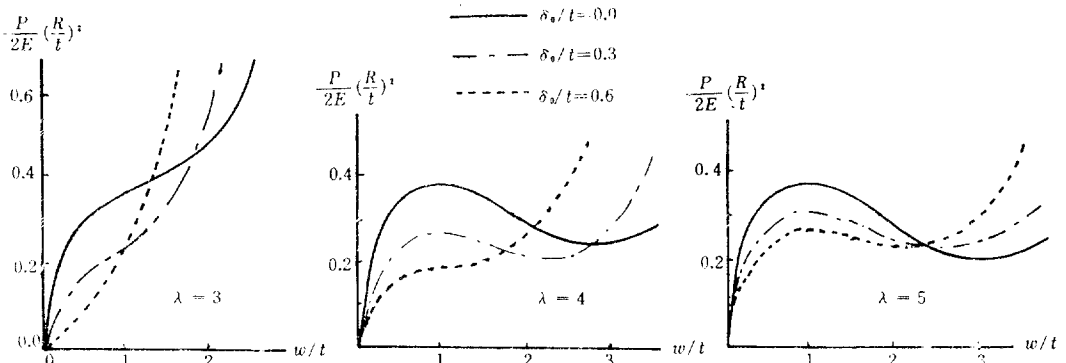


Fig. 8 Load-deflection curves of clamped spherical cap under uniform external load taking initial deflection into account

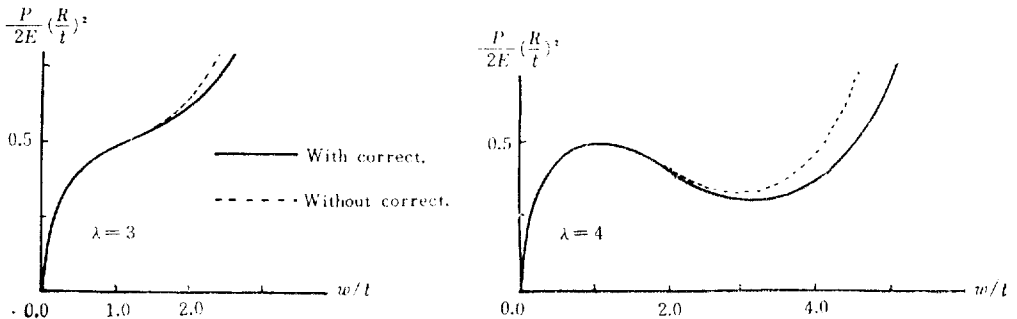


Fig. 9 Comparison of load-deflection curves of clamped spherical cap under uniform external load with and without correction of load direction  $\delta_0=0$

산한 결과는 Fig. 8 과 같다.  $\lambda=3$  일 때는 어떤 경우에도 中央點의 처짐이 外力의 증가와 더불어 단조롭게 증가하나,  $\lambda=4$  인 形狀이  $\delta_0/t=0.6$  정도의 初期變形을 갖게 되면, 오히려 膜應力의 효과로 shell은 安定 상태가 되어 shell 구조에서 初期變形의 영향은 shell의 幾何學的 조건 및 初期 처짐량의 크기에 따라 그 變形 경향이 크게 달라질 수 있음을 알 수 있다.

다. 追從力의 효과에 의한 捩屈 舉動

靜水壓을 外力으로 생각하면, 이 힘은 非保存力이 되어 항상 物體表面에 수직으로 작용하므로, 荷重이 變位の 함수가 되어 變形 과정마다 追從力의 효과를 포함시켜야하기 때문에 계산이 매우 복잡하게 된다 [7]. 특히 非線形 구조 해석시는 방대한 계산량이 요구되어 많은 경우, 保存力으로 가정한 계산을 수행해 오고 있으나, 본 연구에서는 每 増分 단계마다 變形된 shell表面에 荷重이 수직으로 작용하도록 荷重 작용 방향의 수정을 통해 追從力의 효과를 포함할 수 있도록 하여 増分 계산법의 利點을 최대한으로 활용토록 하였다. 지금 Fig. 9의  $\lambda=3,4$  인 계산 모델에 대한 하중

작용 방향의 수정 계산 결과와 保存力으로 가정하여 계산된 결과와의 비교로 부터, 靜水壓을 非保存力으로 보아 追從力의 효과를 포함시킨 본 연구 결과는 捩屈 荷重 및 捩屈後의 荷重이 약간씩 낮게 나타나고 있으며, 처짐이 두께 정도 이상의 大變形에서는 상당히 차이가 있고,  $\lambda$  값이 클수록 그 차이가 심한 것을 볼 수 있다.

5. 結 論

軸對稱 shell 構造의 보다 정확한 變形 舉動을 해석하기 위하여, 平衡方程式을 degenerated isoparametric shell要素에 의한 増分形 有限要素式으로 正式化한 다음, 増分形의 一貫된 計算法과 數值 解析 프로그램을 개발하여, 均一 外壓을 받는 球體가 固定된 部分球型 계산 모델에의 적용을 통해 다음과 같은 結論을 얻었다.

1. 本 研究의 捩屈 荷重, 捩屈 모우드의 計算法은 一貫된 増分 計算法을 따르기 때문에 比較的 간편한 계산만으로도 거의 精確한 捩屈 荷重과 捩屈 모우드를

얻을 수 있는 解析法임이 數値解析을 통해 확인되었다.

2. 均一 外壓을 받는 軸對稱 shell의 挫屈 舉動은 shell의 形狀과 初期變形의 크기에 따라 크게 달라지며, 初期變形의 存在는 그 크기와 shell의 形狀에 따라 挫屈 強度를 증가시킬 경우도 있다.

3. 靜水壓과 같은 非保存力에 의한 追從力의 효과는 挫屈後 變形을 증가시키도록하며, 이러한 追從力의 效果를 増分 계산 단계의 하중 작용 방향의 수정으로 보상시킨 본 연구의 방법은, 増分 계산만으로 挫屈 舉動을 해석할 수 있을 뿐 아니라 追從力의 효과를 포함한 실제 shell의 거동에도 상당히 접근할 것으로 생각되며, 이 점에 대해서는 계속적인 연구가 있어야 할 것이다.

4. 앞으로 軸對稱 하중 상태에서도 非軸對稱的 挫屈 變形이 일어날 수 있는 軸對稱 shell의 形狀에 대한 본 연구의 적용과 非軸對稱 荷重, 補剛材를 갖는 shell에 대한 해석 등의 연구로도 확장되어야 할 것이다.

## 後 記

이 論文은 峨山社會福祉事業財團의 1983年度 研究費 支援에 의하여 研究되었으며, 이에 감사사를 드립니다.

## 參 考 文 獻

- [1] J.T. Oden, "Finite Element Applications in Nonlinear Structural Analysis", presented at the ASCE Symp. on Application of F.E.M. in Civil Engineering, Nashville, 1969.
- [2] P.K. Larsen, E.P. Popov, "A Note on Incremental Equation and Approximate Constitutive Relations in Large Inelastic Deformations", *Acta Mechanica*, Vol. 19, 1974, pp.1-14.
- [3] G. Horrigmoe, "Finite Element Instability Analysis of Free-Form Shells", Report No. 77-2, Div. of Struct. Mech., The Norwegian Inst. of Tech., Trondheim, 1977.
- [4] R.H. Gallagher, "The Finite Element Method in Shell Stability Analysis", *Comp. Struct.*, Vol. 3, 1973, pp.543-557.
- [5] S. Ahmad, B.M. Irons, O.C. Zienkiewicz,

"Curved Thick Shell and Membrane Elements with Particular Reference to Axisymmetric Problems", *Proc. 2nd Conf. on Matrix Meth. in Struct. Mech.*, AFFDL-TR-68-150, 1968, pp. 539-572.

- [6] L.E. Malvern, *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice-Hall, 1969.
- [7] R.D. Wood, *The Application of Finite Element Methods to Geometrical Nonlinear Structural Analysis*, Ph. D. Thesis, Univ. of Wales, Swansea 1973.
- [8] 金昌烈, 金載福, 有限要素法에 의한 軸對稱 Shell의 非線型 解析", 釜山大學校 工科大学 研究報告, 26輯, 1983, pp.345-355.
- [9] K. Surana, "Geometrically Nonlinear Formulation for the Axisymmetric Shell Elements", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 16, 1982, pp. 477-502.
- [10] P. Sharif, E.P. Popov, "Nonlinear Buckling Analysis of Sandwich Arches", *ASCE*, Vol. 97, EM5, 1971, pp.1397-1412.
- [11] Ö.K. Kiciman, *Postbuckling Analysis of Shells with Applications to Cylindrical Segments*, Ph. D. Dissert., Univ. of California, Berkeley, 1975.
- [12] 岩田耕司, 山田嘉昭, "有限要素法による 構造物 非線型 安定性 解析", 日本 機械學會 論文集(第一部), 第42卷, 354號, 1976, pp.444-451.
- [13] 金載福, 金昌烈, "外壓을 받는 軸對稱 Shell의 限界荷重에 관한 研究", 大韓造船學誌, 第20卷, 第4號, 1983, pp.1-8.
- [14] H. Weinitschke, "On Asymmetric Buckling of Clamped Shallow Shells", *J. Mathemat., Phys.*, Vol. 44, 1965, pp.141-163.
- [15] M. Uemura, "Axisymmetrical Buckling of an Initially Deformed Shallow Spherical Shells under External Pressure", *Int. J. Non-Linear Mech.*, Vol. 6, 1971, pp.177-192.
- [16] F. Kikuchi, Y. Ando, "Application of Simplified Hybrid Displacement Method to Plate And Shell Problems", *2nd Int. Conf. on Struct. Mech. in Reactor Tech.*, 1973, Berlin, Germany