

나머지 多項式的 再構成에 依한 디컨볼루션

(Deconvolution Based on the Reconstruction of Residue Polynomials)

劉 守 鉉*, 金 在 功*

(Soo H. Yoo and Jae K. Kim)

要 約

대부분의 工學 問題에서 線形 시스템의 出力은 有限 入力과 임펄스 應答의 컨볼루션으로 表現된다. 임펄스 應答 또는 시스템 入力を 算出하기 위해 나머지 多項式的 再構成을 利用한 디컨볼루션을 檢討하였다. 行列과 유클리드 알고리즘을 利用한 두 方法을 檢討하였고 例로써 證明하였다. 例의 경우 RMS 誤차가 約 10^{-10} 인 高精度의 結果를 얻었다.

Abstract

In most engineering problems the output of linear system could be expressed by a convolution of finite input and impulse response. In this paper, the deconvolution algorithm based on the reconstruction of residue polynomials to get a convolution factor, impulse response or system input, were considered. Two techniques, using a matrix and Euclid's algorithm were discussed. In the illustrated examples, the result showed high accuracy about 10^{-10} RMS error.

I. 序 論

舉論되고 있는 대부분의 工學問題에서 시스템 出力은 有限入力和 시스템의 임펄스 應答에 依한 컨볼루션(convolution)으로 나타난다. 특히 線形 시스템에서 임펄스 應答 $h(n)$ 과 入力 $x(n)$ 의 週期가 N 일 때 出力 $y(n)$ 은 다음과 같다.

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) h(n-k) \quad (1)$$

여기서 $n=0, 1, \dots, N-1$

(1)式으로 부터

(i) 入力和 出力이 주어질 때 임펄스 應答을 決定하거나

(ii) 임펄스 應答과 出力이 주어질 때 入力を 決定하는 컨볼루션 要素의 除去, 即 逆컨볼루션을 첨가 디컨볼루션(deconvolution)이라 하며 두 경우 數學的인 조작은 同--하고 그 應用은 等化作用, 影像處理, 시스템 合成 等에서 쉽게 찾을 수가 있다.¹⁾ 특히 文献^{2, 3)}은 地震波 信號의 具體的 여러 應用을 言及하고 있다. DFT 方法⁴⁾은 出力의 작은 반올림 誤差에도 敏感하여 正確도가 問題로 되고 특히 分母가 零이면 不可能해진다.^{5, 6)} FFT 方法은 곱셈數의 改善 以外엔 DFT와 크게 다를 바가 없다. 反復法⁵⁾을 利用한 kernel splitting 方法⁷⁻⁹⁾은 kernel의 첫 項이 零이어서 는 안되며 外插行列에 依한 信號再生 方法¹⁰⁾은 再生될 信號의 時間領域과 周波數領域에서 制限 帶域을 미리 알아야 한다. 이들과는 달리 (1)式을 多項式으로 變換한 後 서로 素(relatively prime)인 小 모듈러스(modules)로 分解하여 이들 모듈러스로써 並列處理한 다음 나머지 多項式的 再構成에 依해 임펄스 應答 또는 入力を

*正會員, 東國大學校 電子工學科
(Dept. of Electron. Eng., Dong Guk Univ.)
接受日字: 1985年 4月 22日

分離한다면 高精度의 結果를 얻을 수 있으리라 展望된다. 따라서 本 論文에서는 (i) 行列과 (ii) 유클리드 (Euclid) 알고리즘을 利用한 두 方法을 檢討하고 임펄스 應答의 分離와 雜音 入力의 分離를 各各 例로 든다.

II. 시스템 函數 H(Z) 의 表現

(1)式에서 入力 x(n) 및 出力 y(n)가 주어질 때 임펄스 應答 h(n)의 決定은 (1)式의 解가 된다. (1)式을 多項式 變換하면

$$Y(Z) = \sum_{n=0}^{N-1} y(n) Z^n \tag{2-1}$$

$$= X(Z) H(Z) \text{ mod } (Z^N - 1) \tag{2-2}$$

여기서 H(Z) 및 X(Z)은 h(n) 및 x(n)의 多項式으로서 Z는 單位 遲延을 意味한다.

$$H(Z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) Z^n \tag{3}$$

$$X(Z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) Z^n \tag{4}$$

(2)~(4)式의 物理的 意味은 Z變換과 同一하나 Z變換아닌 多項式 表現은 $Z^{-n} = 1/Z^n$ 과 같은 表現을 포함으로써 演算의 簡單化를 위해서이다.¹¹⁾ (2-2)式으로부터 (3)式을 誘導함에 있어 먼저 Z^{N-1} 을 週期 $N = 2^r$ (r는 陽의 整數)를 만족하는 r+1個의 서로素인 小 모듈러스로 分解한다.

$$\begin{aligned} Z^{2^r-1} &= (Z^{N/2^r} + 1) (Z^{N/2^{r-1}} + 1) (Z^{N/2^{r-2}} + 1) \\ &\dots\dots (Z^{N/2^2} + 1) (Z - 1) \\ &\triangleq P_1(Z) P_2(Z) P_3(Z) \dots\dots P_r(Z) P_* \\ &= P_* \prod_{i=1}^r P_i(Z) \end{aligned} \tag{5}$$

但 $P_* = Z - 1$

(3)式의 H(Z)에 對한 $P_i(Z)$ ($i=1, 2, \dots, r$)와 P_* 의 mod演算을 各各 다음과 같이 定義하면

$$H_i(Z) \equiv H(Z) \text{ mod } P_i(Z) \quad i=1, 2, \dots, r \tag{6}$$

$$H_* \equiv H(Z) \text{ mod } P_* \tag{7}$$

(6)式에서 $(H(Z) - H_i(Z))/P_i(Z)$ 는 나머지 없이 나누어짐으로 H(Z)와 $H_i(Z)$ 는 mod $P_i(Z)$ 에 對해 合同이고 CRT (Chinese Remainder Theorem)에 依해 H(Z)는 (6)式과 (7)式의 唯一解로써 다음과 같이 나타난다.

$$H(Z) \equiv \sum_{i=1}^r S_i(Z) H_i(Z) + S_* H_* \text{ mod } (Z^N - 1) \tag{8}$$

여기서

$$\begin{aligned} S_i(Z) &= \left(-\frac{1}{2^i}\right) \frac{Z^N - 1}{P_i(Z)} \\ &\equiv \begin{cases} 1 & \text{mod } P_i(Z) \\ 0 & \text{其 外} \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, r \end{aligned} \tag{9}$$

$$S_* = \left(\frac{1}{2^r}\right) \frac{Z^N - 1}{P_*}$$

$$\equiv \begin{cases} 1 & \text{mod } P_* \\ 0 & \text{其 外} \end{cases} \tag{10}$$

以上の 過程을 그림으로 나타내면 그림 1과 같다.

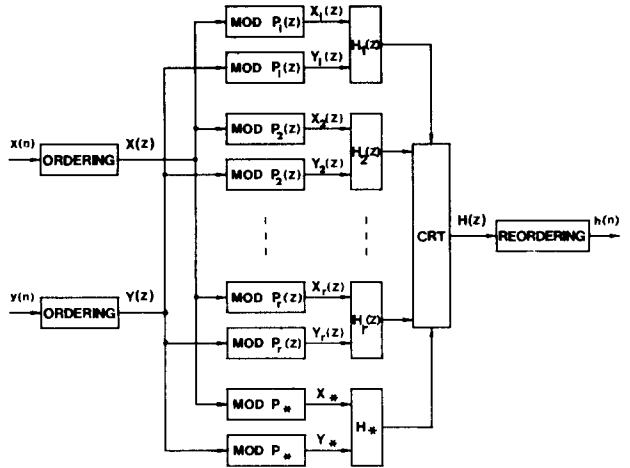


그림 1. 임펄스 應答 h(n)의 算出 過程
Fig. 1. The separation procedure of impulse response h(n).

즉 入力 x(n)과 出力 y(n)은 各各 多項式 表現된後 (r+1)個의 並列經路를 通해 $H_i(Z)$ 와 H_* 를 決定한 다음 (8)式의 시스템 函數 H(Z)의 分離로 부터 (1)式을 滿足하는 h(n)가 算出된다.

III. 임펄스 應答 h(n) 分離

(8)式에서 $S_i(Z)$ 와 S_* 는 (9), (10)式으로 주어지므로 (8)式을 (3)式 形態로 나타내기 위해서는 $H_i(Z)$ 와 H_* 가 決定되어야 한다. $H_i(Z)$ 와 H_* 는 (6), (7)式으로 規定된 바 있으나 두 式 모두가 誘導 對象인 H(Z)를 포함하고 있으므로 이들에 의한 直接的인 方法은 物理的인 表現 以外엔 $H_i(Z)$ 와 H_* 의 決定에 도움을 주지 못한다. 그러나 $H_i(Z)$ 와 H_* 는 H(Z)의 mod $P_i(Z)$ 演算 및 mod P_* 演算이므로 $H_i(Z)$ 와 H_* 는 Y(Z), X(Z)에 對한 mod $P_i(Z)$ 및 mod P_* 에 依해 表現이 可能해질 수가 있다. 따라서 Y(Z) 및 X(Z)에 對한 mod P_* 結果로부터 먼저 H_* 를 구한다.

1. H_* 의 決定

(2-1)式과 (4)式의 mod P_* 演算結果를 다음과 같이 定義한다.

$$Y_* \equiv Y(Z) \text{ mod } P_* \tag{11}$$

$$X_* \equiv X(Z) \text{ mod } P_* \tag{12}$$

(11)式에 (2-2)式을 代入하면

$$\begin{aligned}
 Y_* &\equiv \{X(Z) H(Z) \bmod (Z^N - 1)\} \bmod P_* \\
 &= \{X(Z) H(Z)\} \bmod P_* \\
 &= X_* H_* \bmod P_* \\
 &= X_* H_* \tag{13}
 \end{aligned}$$

여기서 Y_* 와 X_* 는 (2-1)식과 (4)식을 $Z=1$ 로 취함으로써 다음과 같이 係數의 總으로 나타난다.

$$\begin{aligned}
 Y_* &= Y(Z) \bmod P_* \\
 &= Y(Z) |_{Z=1} \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} y(n) \tag{14}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 X_* &= X(Z) \bmod P_* \\
 &= X(Z) |_{Z=1} \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \tag{15}
 \end{aligned}$$

即 Y_* 와 X_* 는 常數이므로 H_* 또한 常數가 된다.

$$H_* = \frac{Y_*}{X_*} \tag{16}$$

2. $H_i(Z)$ 의 誘導

$H_i(Z)$ 의 誘導는 (i) 行列을 利用하거나 (ii) 유클리드 알고리즘을 利用하는 方法을 생각할 수가 있다.

(1) 行列에 依한 方法

$H_i(Z)$ 를 나타내기 위하여 $Y(Z)$ 와 $X(Z)$ 의 $\bmod P_i(Z)$ 演算을 各各 다음과 같이 定義한다.

$$Y_i(Z) \equiv Y(Z) \bmod P_i(Z) \quad i=1, 2, \dots, r \tag{17}$$

$$X_i(Z) \equiv X(Z) \bmod P_i(Z) \tag{18}$$

(17)식에 (2-2)식을 代入 하고(5)식에서 $Z^N - 1$ 은 $P_i(Z)$ 로 나누어 떨어짐으로 演算 順序를 바꾼 다음 演算 特性 $(a \cdot b) \bmod c = \{ (a \bmod c) \cdot (b \bmod c) \} \bmod c$ 를 利用하면

$$\begin{aligned}
 Y_i(Z) &= \{X(Z) H(Z) \bmod (Z^N - 1)\} \bmod P_i(Z) \\
 &= \{X(Z) H(Z)\} \bmod P_i(Z) \\
 &= \{ (X(Z) \bmod P_i(Z)) (H(Z) \bmod P_i(Z)) \} \\
 &\quad \bmod P_i(Z) \\
 &= X_i(Z) H_i(Z) \bmod P_i(Z) \tag{19}
 \end{aligned}$$

윗 式에서 $(Z^N - 1)$ 次數가 $P_i(Z)$ 의 次數보다 크기 때문에 $\bmod (Z^N - 1)$ 가 省略된다. (17)식에 (2-1)식을 代入 하면

$$Y_i(Z) = \{ \sum_{n=0}^{N-1} y(n) Z^n \} \bmod P_i(Z) \tag{20}$$

$N_i \triangleq N/2^i$ 로 놓으면 $P_i(Z)$ 의 次數는 N_i 가 되고 (20)식의 最高 次數는 $N_i - 1$ 로 된다. 이때 係數를 $y_i(n)$ 이라 놓고 (19)식을 다시 쓰면

$$Y_i(Z) = \sum_{n=0}^{N_i-1} y_i(n) Z^n \tag{21}$$

같은 方法으로

$$H_i(Z) = \sum_{n=0}^{N_i-1} h_i(n) Z^n \tag{22}$$

$$X_i(Z) = \sum_{n=0}^{N_i-1} x_i(n) Z^n \tag{23}$$

(21), (22), (23)식을 (19)식에 代入 하면

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{N_i-1} y_i(n) Z^n &= \{ \sum_{n=0}^{N_i-1} x_i(n) Z^n \} \\
 &\quad \{ \sum_{n=0}^{N_i-1} h_i(n) Z^n \} \bmod P_i(Z) \tag{24-1}
 \end{aligned}$$

윗 式을 行列로 表現하면

$$\bar{Y}_i = \bar{X}_i \bar{H}_i \tag{24-2}$$

따라서

$$\bar{H}_i = \bar{X}_i^{-1} \bar{Y}_i \tag{25}$$

가 나타난다.

여기서 \bar{H}_i, \bar{X}_i 및 \bar{Y}_i 는 i 번째 모듈러스에 對應하는 多項式 $H_i(Z), X_i(Z)$ 및 $Y_i(Z)$ 의 要素 벡터이다.

$$\begin{aligned}
 \bar{H}_i &= \begin{bmatrix} h_i(0) \\ h_i(1) \\ h_i(2) \\ \vdots \\ h_i(N_i-1) \end{bmatrix} & \bar{Y}_i &= \begin{bmatrix} y_i(0) \\ y_i(1) \\ y_i(2) \\ \vdots \\ y_i(N_i-1) \end{bmatrix} \\
 \bar{X}_i &= \begin{bmatrix} x_i(0) & -x_i(N_i-1) & -x_i(N_i-2) & \dots & -x_i(2) & -x_i(1) \\ x_i(1) & x_i(0) & -x_i(N_i-1) & \dots & -x_i(3) & -x_i(2) \\ x_i(2) & x_i(1) & x_i(0) & \dots & -x_i(4) & -x_i(3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_i(N_i-2) & x_i(N_i-3) & x_i(N_i-4) & \dots & x_i(0) & -x_i(N_i-1) \\ x_i(N_i-1) & x_i(N_i-2) & x_i(N_i-3) & \dots & x_i(1) & x_i(0) \end{bmatrix} \tag{26}
 \end{aligned}$$

(25)식을 풀기 위해서 먼저 \bar{X}_i 를 下三角行列(Lower Triangular)과 上三角行列(Upper Triangular)로 分解한다. 그 理由는 (25)식 逆行列 \bar{X}_i^{-1} 의 冪乘數를 줄이기 위함이다. \bar{X}_i 를 이같이 分解하여 下半을 L_i , 上半을 U_i 라 表現하면

$$L_i = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{N_i-11} & l_{N_i-12} & l_{N_i-13} & \dots & l_{N_i-1, N_i-1} & 0 \\ l_{N_i1} & l_{N_i2} & l_{N_i3} & \dots & l_{N_i, N_i-1} & l_{N_i, N_i} \end{bmatrix} \tag{27}$$

$$U_i = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1, N_i-1} & u_{1, N_i} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2, N_i-1} & u_{2, N_i} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3, N_i-1} & u_{3, N_i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{N_i-1, N_i-1} & u_{N_i-1, N_i} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & u_{N_i, N_i} \end{bmatrix} \tag{28}$$

따라서 行列 L_i 의 要素 l_{mj} 와 U_i 의 要素 u_{jm} 가 다음과 같이 決定된다.^[13]

$$l_{mj} = x_{mj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{mk} u_{kj} \tag{29}$$

$$u_{jm} = \{x_{jm} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk} u_{km}\} / l_{jj} \quad (30)$$

$j = 1, 2, \dots, N_1$
 $m = j, j+1, \dots, N_1$

여기서 x_{mj} 는 \bar{X}_i 行列의 要素이다. (27)式과 (28)式에 依해 (24-2)式을 다시쓰면

$$\bar{Y}_i = (L_i U_i) \bar{H}_i \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (31)$$

또는

$$U_i \bar{H}_i = L_i^{-1} \bar{Y}_i \quad (32-1)$$

따라서 (25)式은

$$\bar{H}_i = U_i^{-1} L_i^{-1} \bar{Y}_i \quad (32-2)$$

(32-1)式을 만족하는 行列을 \bar{A}_i 라 하면 \bar{A}_i 의 要素 a_m 은 (32-1)式의 右邊으로 부터

$$a_m = \{y_m - \sum_{k=1}^{m-1} l_{mk} a_k\} / l_{mm}, m = 1, 2, \dots, N_1 \quad (33)$$

여기서 y_m 은 \bar{Y}_i 의 要素이다. 따라서 (32-2)式의 좌邊 $\bar{H}_i = U_i^{-1} \bar{A}_i$ 를 滿足하는 (25)式 \bar{H}_i 의 要素

$$h_i(m-1) = a_m - \sum_{k=m,1}^{N_1} u_{mk} h_i(k-1) \quad (34)$$

$m = N_1, \dots, 2, 1 \quad i = 1, 2, \dots, r$

가 나타난다. 이를 (22)式에 代入 하면

$$H_i(Z) = h_i(0) + h_i(1)Z + h_i(2)Z^2 + \dots + h_i(N_1-1)Z^{N_1-1} \quad (35)$$

윗 式을 (16)式의 H_* 와 함께 (8)式에 代入 하면 (3)式의 시스템 函數 $H(Z)$ 가 求해지므로 이로부터 임펄스 應答 $h(n)$ 이 分離된다. [附錄 3]

(2) 유클리드 알고리즘에 依한 方法

(8)式의 $H_i(Z)$ 引出은 유클리드 알고리즘^{11), 12)}을 適用하여도 可能하다. 유클리드 알고리즘이란 임의의 두 整數의 最大 公約數(G. C. D.)가 두 整數의 線形 結合을 뜻하므로 (19)式을 다음과 같이 diophantine 方程式 形態로 고쳐쓴다.

$$H_i(Z)X_i(Z) - P_i(Z)Q_i(Z) = Y_i(Z) \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (36)$$

여기서 $Q_i(Z)$ 는 임의의 몫이고 이 式이 成立하기 위해서는 $X_i(Z)$ 와 $P_i(Z)$ 의 公通 因數의 次數가 零보다 적어야 한다. 즉 $X_i(Z)$ 와 $P_i(Z)$ 의 G. C. D.가 常數이어야 한다. $N = 2^r$ 이므로 (5)式의 $P_i(Z)$ 는 $X_i(Z)$ 와는 서로素가 된다. 따라서 (36)式의 우변은 $Y_i(Z) = 1$ 이 된다.

$$H_i(Z)X_i(Z) - P_i(Z)Q_i(Z) = 1 \quad (37)$$

윗 式의 解 즉 $H_i(Z)$ 를 求하기 위해서 먼저 $P_i(Z)/X_i(Z)$ 를 연분수 展開한다.

$$\frac{P_i(Z)}{X_i(Z)} = C_0(Z) + \frac{1}{C_1(Z) + \frac{1}{C_2(Z) + \frac{1}{\vdots + \frac{1}{C_u(Z)}}}} \quad (38)$$

다음의 두 多項式 $\Psi_j(Z), \theta_j(Z) (j=0, 1, \dots, u)$

$$\begin{aligned} \Psi_0(Z) &= C_0(Z) \\ \Psi_1(Z) &= C_0(Z)C_1(Z) + 1 \\ \Psi_2(Z) &= C_2(Z)[C_0(Z)C_1(Z) + 1] + C_0(Z) \\ \Psi_3(Z) &= C_3(Z)[C_2(Z)(C_0(Z)C_1(Z) + 1) + C_0(Z)] \\ &\vdots \\ \Psi_j(Z) &= C_j(Z)\Psi_{j-1}(Z) + \Psi_{j-2}(Z) \end{aligned} \quad (39)$$

및

$$\begin{aligned} \theta_0(Z) &= 1 \\ \theta_1(Z) &= C_1(Z) \\ \theta_2(Z) &= C_2(Z)C_1(Z) + 1 \\ \theta_3(Z) &= C_3(Z)(C_2(Z)C_1(Z) + 1)C_1(Z) \\ &\vdots \\ \theta_j(Z) &= C_j(Z)\theta_{j-1}(Z) + \theta_{j-2}(Z) \end{aligned} \quad (40)$$

을 導入하여 (38)式을 다시 쓰면

$$\begin{aligned} \frac{\Psi_0(Z)}{\theta_0(Z)} &= C_0 \\ \frac{\Psi_1(Z)}{\theta_1(Z)} &= C_0(Z) + \frac{1}{C_1(Z)} \\ \frac{\Psi_2(Z)}{\theta_2(Z)} &= C_0(Z) + \frac{1}{C_1(Z) + \frac{1}{C_2(Z)}} \\ &\vdots \\ \frac{\Psi_u(Z)}{\theta_u(Z)} &= \frac{P_i(Z)}{X_i(Z)} \end{aligned} \quad (41)$$

(39), (40)式으로 부터 다음 等式이 誘導된다.

$$\begin{aligned} \theta_1(Z)\Psi_0(Z) - \Psi_1(Z)\theta_0(Z) &= C_1(Z)C_0(Z) - \{C_0(Z)C_1(Z) + 1\} \cdot 1 = -1 \\ \theta_2(Z)\Psi_1(Z) - \Psi_2(Z)\theta_1(Z) &= \{C_2(Z)C_1(Z) + 1\}\{C_0(Z)C_1(Z) + 1\} \\ &\quad - \{C_2(Z)[C_0(Z)C_1(Z) + 1] + C_0(Z)\} \cdot \{C_1(Z)\} = 1 \\ \theta_3(Z)\Psi_2(Z) - \Psi_3(Z)\theta_2(Z) &= \{C_3(Z)[C_2(Z)C_1(Z) + 1] + C_1(Z)\} \\ &\quad \{C_2(Z)[C_0(Z)C_1(Z) + 1] + C_0(Z)\} \\ &\quad - \{C_3(Z)[C_2(Z)(C_0(Z)C_1(Z) + 1) + C_0(Z)] + \{C_2(Z)C_1(Z) + 1\}\} = -1 \\ &\vdots \\ \theta_j(Z)\Psi_{j-1}(Z) - \Psi_j(Z)\theta_{j-1}(Z) &= (-1)^j \end{aligned} \quad (42)$$

따라서 $j=u$ 일 때 (42)式은

$$\theta_u(Z)\Psi_{u-1}(Z) - \Psi_u(Z)\theta_{u-1}(Z) = (-1)^u \quad (43)$$

윗 式에서 $(-1)^u$ 는 常數이므로 $\Psi_u(Z)$ 와 $\theta_u(Z)$ 의 公通因數 또한 常數임을 알 수 있다. 즉 $P_i(Z)$ 와 $X_i(Z)$ 가 서로 소이므로 誘導常數 K 를 導入하여 (41)式을 다시 쓰면

$$\Psi_u(Z) = K \cdot P_i(Z) \quad (44)$$

$$\theta_u(Z) = K \cdot X_i(Z) \quad i=1, 2, \dots, r \quad (45)$$

두 式을 (43)式에 代入 하고 양변에 $(-1)^u$ 를 곱한 다음 $(-1)^u \cdot K \cdot \Psi_{u-1}(Z) \cdot X_i(Z) - P_i(Z) \cdot (-1)^u \cdot K \cdot \theta_{u-1}(Z) = (-1)^{2u} = 1$

양변에 $Y_i(Z) \bmod P_i(Z)$ 를 다시 곱하면

$$\begin{aligned} & [(-1)^u K \Psi_{u-1}(Z) Y_i(Z) \bmod P_i(Z)] X_i(Z) \\ & - P_i(Z) [(-1)^u K \theta_{u-1}(Z) \cdot Y_i(Z) \bmod P_i(Z)] \\ & = Y_i(Z) \bmod P_i(Z) \\ & = Y_i(Z) \end{aligned} \quad (46)$$

윗 式의 우변에서 $P_i(Z)$ 의 次數는 $Y_i(Z)$ 의 次數보다 크므로 $\bmod P_i(Z)$ 가 省略된다. (36)式과 (46)式을 갈게 놓으면 $H_i(Z)$ 가 다음과 같이 나타난다.

$$H_i(Z) = (-1)^u \cdot K \cdot \Psi_{u-1}(Z) Y_i(Z) \bmod P_i(Z) \quad i=1, 2, \dots, r \quad (47)$$

(47)式을 (16)式과 함께 (8)式에 代入 하면 시스템 函數가 $H(Z)$ 가 求해진다. [附錄 3]

IV. 곱셈數의 比較

길이 N 의 入力과 出力으로 부터 임펄스 應答을 分離할 때 DFT 및 FFT와 提案된 方法과의 곱셈數를 比較한다.

(1) DFT 및 FFT

잘 알려진 바와 같이 임의의 시퀀스 $g(n)$ ($n=0, 1, \dots, N-1$)의 DFT와 그 逆變換式은 다음과 같다.

$$G(k) = \sum_{n=0}^{N-1} g(n) e^{-j2\pi nk/N} \quad (48-1)$$

$$g(n) = \sum_{k=0}^{N-1} G(k) e^{j2\pi nk/N} \quad (48-2)$$

$H(K) = Y(K)/X(K)$ 를 결정함에 있어 한번의 나눗셈을 한번의 곱셈으로 간주한다면 필요한 곱셈수는 두 차례의 DFT에 $2(N^2)$, $H(K)$ 계산에 N , $h(n)$ 算出을 위한 한번의 逆變換에 $2N^2$, 따라서 총 計算 數는

$$2(2N^2) + N + 2N^2 = N(6N+1) \quad (49)$$

FFT의 경우 (49)式의 $2N^2$ 대신 $N \log_2 N$ 을 代入 하면 要求된 총 곱셈 數는

$$N(3 \log_2 N + 1) \quad (50)$$

(2) 提案된 方法

多項式 mod 演算에는 곱셈이 필요없으며 (8)式의 構成은 쉬프트와 덧셈으로만 計算 可能하므로 $H_r(Z)$ 와 H_* 決定에 各各 단 한번의 나눗셈과 $H_i(Z)$ 計算에만 곱셈이 필요하다. $H_i(Z)$ 決定에 필요한 곱셈數는 提案된 두 方法에 따라 各各 다음과 같다.

(i) 行列에 依한 方法

行列 L_i 의 要素 計算에 $\sum_{k=1}^{N_i-1} K(N_i-K)$ 번 行列 U_i 의 要素 計算에 $\sum_{k=1}^{N_i-1} K(N_i-K+1)$ 번

行列 \bar{A}_i 와 $h_i(n)$ 計算에 N_i^2 의 곱셈이 필요하다. 따라서 총 곱셈 數는

$$\sum_{i=1}^{r-1} \left\{ \sum_{k=1}^{N_i-1} k(N_i-k) + \sum_{k=1}^{N_i} k(N_i-k+1) + N_i^2 \right\} + 2; \quad N_i = N/2^i \quad (51)$$

(ii) 유클리드 알고리즘에 依한 方法

$C_i(Z)$ 計算에 $N_i(N_i+1)$ 번

$\Psi_{u-1}(Z)$ 計算에 $N_i(N_i-1)-2$ 번

$H_i(Z)$ 計算에 $(2N_i-r-1+i)$ 번이 필요하므로

총 곱셈數는

$$\sum_{i=1}^{r-1} \{ N_i(N_i+1) + N_i(N_i-1) - 2 + 2N_i - r - 1 + i \} + 2; \quad N_i = 2^i \quad (52)$$

以上을 圖表化 하면 表 1과 같다.

표 1. 곱셈數

Table 1. Number of Multiplications.

N	方法	DFT	FFT	提案한 方法	
				行列	유클리드 알고리즘
2^4		1552	208	327	183
2^5		6176	512	2079	720
2^6		24640	1216	14543	2824
2^7		98432	2816	108079	11135
2^8		393472	6400	831727	44149
2^9		1573376	14336	65224709	175722
2^{10}		6292480	31744	51655023	701022

V. 應用例

提案된 方法의 妥當性을 檢討하기 위하여 다음의 두 例를 導入 한다.

(1) 低域通過 필터의 임펄스 應答

잘 알려진 바와 같이 Hamming Window는 FIR 필터 合成 方法의 하나이다. 이에 依하면 임펄스 應答 $h_H(n)$ 은 다음과 같다.

$$h_H(n) = h(n) \cdot w(n)$$

$$\text{여기서 } h(n) = \frac{\sin \left[\omega_c \cdot \left(n - \frac{N-1}{2} \right) \right]}{\left(n - \frac{N-1}{2} \right) \cdot \pi}, \quad \omega_c = \frac{2\pi f_c}{f_s}$$

$$\omega(n) = 0.54 - 0.46 \cdot \cos \left(\frac{2\pi n}{N-1} \right)$$

여기서 遮繼 週波數 $f_c = 3\text{KHz}$, 샘플링 周波數 $f_s = 32\text{KHz}$ 및 $N=32$ 로 擇하면 (53)式은 그림 2의 實線과 같고 여기에 週期 $T=10^{-3}$ 秒의 三角波를 印加한 出力으로 부터 $h(n)$ 을 分離하면 그림 2의 點線과 같게 된다. 이때 RMS 誤差는 約 0.512×10^{-11} 이었다.

(2) 不規則 入力 信號의 推定

아래 그림은 OXFORD의 NAG 作成 프로그램 GO5

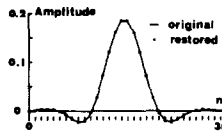


그림 2. 임펄스 應答
Fig. 2. Impulse response.

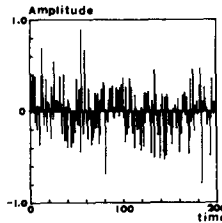


그림 3. 가우스 雜音(平均 0, 分散 0.0625)
Fig. 3. Gauss noise (zero mean, variance 0.0625).

DDF에서 얻은 가우스 雜音¹⁵⁾이다. 이를 시스템

$$H(Z) = \frac{1}{1 - 1.72Z^{-1} + 0.722Z^{-2}} \quad (54)$$

에 印加하여 出力과 (54)式的 $h(n)$ 으로 부터 分離한 入力과 원래의 入力 間의 RMS 誤差는 約 0.216×10^{-10} 이었다. 이때 出力의 길이를 2^9 으로 擇했다.

VI. 結 論

나머지 多項式的 再構成에 依해 線形 시스템의 入力과 出力으로 부터 임펄스 應答를 決定하는 디컨볼루션에 關해 검토하였다. 먼저 入力과 임펄스 應答의 컨볼루션 表現을 多項式으로 變換한 다음 $\text{mod}(Z^n - 1)$ 項을 $r+1$ 個의 서로 素인 多項式으로 分解하여 (i) 行列과 (ii) 유클리드 알고리즘에 依해 임펄스 應答 $h(n)$ 을 算出하였다.

DFT 및 FFT와 곱셈數를 比較하였으며 두 例題의 경우 RMS 誤差는 約 10^{-10} 程度로써 高精度의 特性이 完연하다. 샘플 數가 증가함에 따라 곱셈 數는 유클리드 알고리즘의 경우 FFT보다 約 22배 증가하고 DFT에 比해서는 約 10배의 改善을 나타낸다. 特히 分母가 零인 때의 DFT, FFT와 첫항이 零인 때의 Kernel Splitting 方法의 不適이 지닌 문제점의 극복과 例에서 보여준 高精度性은 長點이라 하겠다.

VII. 附 錄

1. 例 題

提案된 두 方法의 타당성을 立證하기 위하여 다음

의 例를 導入한다. 函數

$$x(k) = \begin{cases} 1 + \cos\left(\frac{\pi}{6}k\right) & [0, \pi] \\ 0 & \text{其 外} \end{cases}$$

를 $k=0, 1, \dots, 7$ 까지 取하여 入力 x 와 임펄스 應答 h 라 하면

$$\{x(n)\} = \{h(n)\} = \{2, 1.866, 1.5, 1, 0.5, 0.314, 0, 0\} \quad (A-1)$$

이들의 週期 컨볼루션은 (1)式에 依해

$$\{y(n)\} = \{4.518, 7.598, 9.499912, 9.598, 7.982, 5.402, 3.000088, 1.402\} \quad (A-2)$$

(1) 먼저 行列方法에 依해 $h(n)$ 을 求한다.

$N=2^3$ 이므로 (5)식은

$$Z^8 - 1 = (Z^4 + 1)(Z^2 + 1)(Z + 1)(Z - 1) \\ \triangleq P_1(Z)P_2(Z)P_3(Z)P_4 \quad (A-3)$$

$x(n)$ 과 $y(n)$ 을 多項式 表現하면

$$X(Z) = \sum_{n=0}^7 x(n)Z^n \quad (A-4)$$

$$Y(Z) = \sum_{n=0}^7 y(n)Z^n \quad (A-5)$$

$X(Z)$ 와 $Y(Z)$ 를 各各 $\text{mod } P_4$ 와 $\text{mod } P_i(Z)$ ($i=1, 2, 3$) 演算하면 (14), (15)式에 依해

$$Y_* \equiv Y(Z) \text{ mod } P_4 \\ = Y(Z)|_{z=1} = 49 \\ X_* \equiv X(Z) \text{ mod } P_4 \\ = X(Z)|_{z=1} = 7$$

Y_* 와 X_* 로 부터 (16)式에 依해

$$H_* = Y_*/X_* = 49/7 = 7 \quad (A-6)$$

(17), (18)式에 依해

$$X_1(Z) \equiv X(Z) \text{ mod } P_1(Z) \\ = 1.5 + 1.732Z + 1.5Z^2 + Z^3 \\ Y_1(Z) \equiv Y(Z) \text{ mod } P_1(Z) \\ = -3.464 + 2.196Z + 6.499824Z^2 \\ + 8.196Z^3$$

$$X_2(Z) \equiv X(Z) \text{ mod } P_2(Z) \\ = 1 + Z$$

$$Y_2(Z) \equiv Y(Z) \text{ mod } P_2(Z) \\ = 2Z$$

$$X_3(Z) \equiv X(Z) \text{ mod } P_3(Z) \\ = 1$$

$i=1$ 일 때 $H_1(Z)$ 는 (20-2)式으로 부터

$$\bar{H}_1 = \begin{bmatrix} h_1(0) \\ h_1(1) \\ h_1(2) \\ h_1(3) \end{bmatrix} = \bar{X}_1^{-1} \bar{Y}_1 = \begin{bmatrix} 1.5 & -1 & -1.5 \\ 1.732 & 1.5 & -1 \\ 1.5 & 1.732 & 1.5 \\ 1 & 1.5 & 1.732 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1.732 \\ -1.5 \\ -1 \\ 1.5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -3.464 \\ 2.196 \\ 6.499824 \\ 8.196 \end{bmatrix} \quad (A-7)$$

(27), (28)式에 의해

$$\bar{X}_1 = L_1 U_1 = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 0 & 0 \\ 1.735 & 2.6546 & 0 & 0 \\ 1.5 & 2.732 & 2.24667604 & 0 \\ 1 & 2.166 & 2.13456153 & 2.03997736 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0.66 & -1 & -1.1546 \\ 0 & 1 & 0.27540834 & 0.183303365 \\ 0 & 0 & 1 & 0.0968142575 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (A-8)$$

$\bar{A}_1 \triangleq L_1^{-1} \bar{Y}_1$ 를 滿足하는 行列 \bar{A}_1 가

$$\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} -2.30933 \\ 2.33391462 \\ 1.59683426 \\ 1.0 \end{bmatrix} \quad (A-9)$$

가 나타나고 (32-2)式에 의해 임펄스 應答 $h_1(m)$ ($m=0, 1, 2, 3$)가 구해진다.

$$\bar{H}_1 = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.732 \\ 1.5 \\ 1.0 \end{bmatrix} \quad (A-10)$$

$$H_1(Z) = 1.5 + 1.732 Z + 1.5 Z^2 + Z^3 \quad (A-11)$$

$i=2$ 일 때 $H_2(Z)$ 는

$$\begin{aligned} \bar{H}_2 = \begin{bmatrix} h_2(0) \\ h_2(1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (A-12)$$

따라서

$$H_2(Z) = 1 + Z \quad (A-13)$$

$H_3(Z)$ 는 常數이므로

$$H_3(Z) = Y_3(Z) / X_3(Z) = 1/1 = 1 \quad (A-14)$$

$H_1(Z), H_2(Z), H_3(Z), H_*$ 를 (8)式에 代入하면 시스템 函數

$$H(Z) = 2 + 1.866 Z + 1.5 Z^2 + Z^3 + 0.5 Z^4 + 0.134 Z^5 + 0 Z^6 + 0 Z^7 \quad (A-15)$$

가 나타나고, 여기서 임펄스 應答

$$\{h(n)\} = \{2, 1.866, 1.5, 1, 0.5, 0.134, 0, 0\} \quad (A-16)$$

을 얻게 된다. 이는 (A-1)式과 一致한다.

(2) 유클리드 알고리즘을 利用하여 例(1)을 反復한다.

(A-1)부터 (A-6)式까지의 結果는 同一하다.

(38)式에 依해

$$\begin{aligned} \frac{P_1(Z)}{X_1(Z)} &= \frac{Z^4 + 1}{Z^3 + 1.5Z^2 + 1.732Z + 1.5} \\ &= C_0(Z) + \frac{1}{C_1(Z) + \frac{1}{C_2(Z) + \frac{1}{C_3(Z)}}} \end{aligned}$$

$$C_0(Z) = Z - 1.5$$

$$C_1(Z) = 1.9350193Z - 1.1963149$$

$$C_2(Z) = -0.160442176Z - 0.607455296$$

$$C_3(Z) = -0.495313403Z + 0.825410628 \quad (A-17)$$

(39)式에 依해

$$\Psi_0(Z) = Z - 1.5$$

$$\Psi_1(Z) = -4.0920678Z + 2.79447236$$

$$\begin{aligned} \Psi_2(Z) &= -0.30973393Z^2 - 0.516153361Z^2 + \\ &+ 3.03739703 - 3.19751703 \end{aligned}$$

$$\Psi^2(Z) = K \cdot P_1(Z) = 0.153415367(Z^4 + 1) \quad (A-18)$$

(47)式에 의해

$$\begin{aligned} H_1(Z) &= \{-K \Psi_2(Z) Y_1(Z)\} \bmod (Z^4 + 1) \\ &= 1.5 + 1.732Z + 1.5Z^2 + Z^3 \end{aligned} \quad (A-19)$$

같은 方法으로 $H_2(Z)$ 는

$$\begin{aligned} \frac{P_2(Z)}{X_2(Z)} &= \frac{Z^2 + 1}{Z + 1} \\ &= Z - 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}(Z + 1)} \end{aligned} \quad (A-20)$$

여기서

$$C_0(Z) = Z - 1, \quad C_1(Z) = 1/2(Z + 1) \quad (A-21)$$

로 놓으면 $k=1/2, u=1$

$$\Psi_0(Z) = Z - 1, \quad \theta_0(Z) = 1$$

$$\Psi_1(Z) = \frac{1}{2}(Z^2 + 1), \quad \theta_1(Z) = \frac{1}{2}(Z + 1) \quad (A-22)$$

(47)式에 의해

$$\begin{aligned} H_2(Z) &= \{(-1)^u \cdot K \cdot \Psi_0(Z) \cdot Y_2(Z)\} \bmod P_2(Z) \\ &= \{(-1)^1 \cdot \frac{1}{2} \cdot (Z - 1) \cdot 2Z\} \bmod (Z^2 + 1) \\ &= Z + 1 \end{aligned} \quad (A-23)$$

따라서 $H_1(Z), H_2(Z), H_3(Z), H_*$ 를 (8)式에 代入하면

$$H(Z) = 2 + 1.866Z + 1.5Z^2 + Z^3 + 0.5Z^4 + 0.134Z^5 \quad (A-24)$$

가 求해지고 이는 行列에 依한 結果 (A-15)式과 完全 一致한다.

2. (8)式에 의한 (3)式的 誘導

$$\begin{aligned} H(Z) &= \left[\frac{1}{2^r} \frac{Z^N - 1}{Z - 1} H_* - \frac{1}{2^r} \frac{Z^N - 1}{Z + 1} H_r(Z) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2^{r-1}} \frac{Z^N - 1}{Z^2 + 1} (h_{r-1}(0) + h_{r-1}(1)Z) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2^{r-2}} \frac{Z^N - 1}{Z^4 + 1} (h_{r-2}(0) + h_{r-2}(1)Z) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + h_{r-2}(2) Z^2 + h_{r-3}(3) Z^3 - \dots \\
 & \quad \vdots \\
 & - \frac{1}{2} \frac{Z^N - 1}{Z^{N/2} + 1} (h_1(0) + h(1)Z + h_1(2)Z^2 \\
 & + h_1(3)Z^3 + \dots + h_1\left(\frac{N}{2} - 1\right) Z^{N/2-1}) \\
 & \quad \text{mod}(Z^{N-1}) \\
 = & \frac{1}{N} \{ [H_* + H_r(Z) + 2 \cdot h_{r-1}(0) + 2^2 \cdot h_{r-2}(0) + \\
 & \dots + 2^{r-2} h_2(0) + 2^{r-1} h_1(0)] Z^0 \\
 & + [H_* - H_r(Z) + 2 \cdot h_{r-1}(1) + 2^2 \cdot h_{r-2}(1) \\
 & + \dots + 2^{r-2} h_2(1) + 2^{r-1} h_1(1)] Z \\
 & + [H_* + H_r(Z) - 2 \cdot h_{r-1}(0) + 2^2 \cdot h_{r-2}(2) \\
 & + \dots + 2^{r-2} h_2(2) + 2^{r-1} h_1(2)] Z^2 \\
 & + [H_* - H_r(Z) - 2 \cdot h_{r-1}(1) + 2^2 h_{r-2}(3) \\
 & + \dots + 2^{r-2} h_2(3) + 2^{r-1} h_1(3)] Z^3 \\
 & + [H_* + H_r(Z) + 2 \cdot h_{r-1}(0) - 2^2 h_{r-2}(0) \\
 & + \dots + 2^{r-2} h_2(4) + 2^{r-1} h_1(4)] Z^4 \\
 & \quad \vdots \\
 & + [H_* - H_r(Z) - 2 \cdot h_{r-1}(1) - 2^2 h_{r-2}(3) \\
 & - \dots - 2^{r-2} h_2\left(\frac{N}{4} - 1\right) - 2^{r-1} \\
 & h_1\left(\frac{N}{2} - 1\right)] Z^{N-1} \} \\
 = & h(0) + h(1) Z^1 + h(2) Z^2 + \dots + h(N-2) Z^{N-2} \\
 & + h(N-1) Z^{N-1}
 \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned}
 h(0) &= \frac{1}{N} [H_* + H_r(Z) + 2 \cdot h_{r-1}(0) \\
 & \quad + 2^2 h_{r-2}(0) + \dots + 2^{r-2} h_2(0) \\
 & \quad + 2^{r-1} h_1(0)] \\
 h(1) &= \frac{1}{N} [H_* - H_r(Z) + 2 \cdot h_{r-1}(1) + 2^2 h_{r-2}(1) \\
 & \quad + \dots + 2^{r-2} h_2(1) + 2^{r-1} h_1(1)] \\
 h(2) &= \frac{1}{N} [H_* + H_r(Z) - 2 \cdot h_{r-1}(0) + 2^2 h_{r-2}(2) \\
 & \quad + \dots + 2^{r-2} h_2(2) + 2^{r-1} h_1(2)] \\
 h(3) &= \frac{1}{N} [H_* - H_r(Z) - 2 \cdot h_{r-1}(1) + 2^2 h_{r-2}(3) \\
 & \quad + \dots + 2^{r-2} h_2(3) + 2^{r-1} h_1(3)] \\
 & \quad \vdots \\
 h(N-2) &= \frac{1}{N} [H_* + H_r(Z) - 2 \cdot h_{r-1}(0) - 2^2 \cdot h_{r-2}(2) \\
 & \quad - \dots - 2^{r-2} h_2\left(\frac{N}{4} - 2\right) \\
 & \quad - 2^{r-1} h_1\left(\frac{N}{2} - 2\right)] \\
 h(N-1) &= \frac{1}{N} [H_* - H_r(Z) - 2 \cdot h_{r-1}(1) - 2^2 h_{r-2}(3) \\
 & \quad - \dots - 2^{r-2} h_2\left(\frac{N}{4} - 1\right) \\
 & \quad - 2^{r-1} h_1\left(\frac{N}{2} - 1\right)]
 \end{aligned}$$

参 考 文 献

[1] Alan. V. Oppenheim, R.W. Schaffer, *Ap- plication of Digital Signal Processing,*

Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall, 1975.

[2] V.K. Arya and J.K. Aggarwal, *Deconvolu- tion of Seismic Data,* Stroudsburg, Pa. Hutchinson Ross, 1982.

[3] J.H. Mendel, *Optimal Seismic Deconvolu- tion,* London, Academic Press, 1983.

[4] H.F. Silverman and A.E. Pearson, "On deconvolution using discrete Fourier trans- form," *IEEE Trans. Audio Electroacoust.,* vol. AU-21, no. 2, pp. 112-118, Apr. 1973.

[5] R.M. Mersereau and R.W. Schaffer, *Com- parative Study of Iterative Deconvolution Algorithms.* Proc. IEEE Int. Conf. ASSP, pp. 192-194, 1978.

[6] D. Achilles, *Deconvolution Algorithms Based on Spline Interpolation.* Proc. IEEE Int. Conf. ASSP, pp. 950-953, 1980.

[7] R. Prost and R. Goutte, *Kernel Splitting Method in Support Constrained Decon- volution for Super-Resolution.* Proc. IEEE Int. Conf. ASSP, pp. 1841-1844, 1982.

[8] R. Prost and R. Goutte, *In-time Non-Itera- tive Fast Algorithms for Support Con- strained Deconvolution.* Proc. IEEE Int. Conf. ASSP, pp. 647-650, 1983.

[9] R. Prost and R. Goutte, "Deconvolution when the convolution kernel has no in- verse," *IEEE Trans. Acoust., Speech and Signal Processing,* vol. ASSP-25, no. 6, pp. 542-548, Dec. 1977.

[10] M.S. Sabri and W. Steenaart, "An approach to band-limited signal extrapolation: The extrapolation matrix," *IEEE Trans. Circuit and Systems,* vol. CAS-25, no. 2, pp. 74-78, Feb. 1978.

[11] J.H. McClellan and C.M. Rader, *Number Theory in Digital Signal Processing,* Engle- wood Cliffs, N.J., Prentice Hall, 1979.

[12] H.J. Nussbaumer, *Fast Fourier Transform and Convolution Algorithms,* Heiderberg, Springer-Verlag, 1981.

[13] J.H. Wilkinson and C. Reinsch, *Linear Algebra,* Heiderberg, Springer-Verlag, 1971.

[14] S.H. Yoo and J.K. Kim, "Deconvolution using CRT for polynomial fields," *KIEE Conf.,* vol. 7, no. 2, Nov. 1984.

[15] Numerical Algorithm Group, *Gino Pack- age,* Oxford, England.

[16] E.A. Robinson and M.T. Silvia, *Digital*

- Foundation of Time Series Analysis, vol. 1, San Francisco, Holden-Day, 1979.
- [17] D.F. Elliot and K.R. Rao, *Fast Transforms, Algorithms, Analysis, Applications*, London, Academic Press, 1983.
- [18] N. Ahmed and K.R. Rao, *Orthogonal Transforms for Digital Signal Processing*, Heiderberg, Springer-Verlag, 1975.
- [19] L.R. Rabiner and B. Gold, *Theory and Application of Digital Signal Processing*, Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall, 1975.
- [20] E.O. Brigham, *The Fast Fourier Transform*, Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall, 1974.
- [21] D.M. Burton, *Elementary Number Theory*, Allyn and Bacon, 1980.
- [22] M.R. Schroeder, *Number Theory in Science and Communication*, Heiderberg, Springer-Verlag, 1984.
-