

周波數 領域-適應 필터 알고리즘에 관한 研究

(A Study on the Algorithm for the Frequency Domain-Adaptive Filter)

辛潤杰*, 李鍾珏**

(Yoon Ki Shin and Chong Kak Lee)

要 約

周波數 領域-適應 필터는 時間 領域-適應 필터에 비하여 필터 次數가 一定值 以上으로 높아졌을 경우에는 計算量에 있어서 有利하게 된다. 本 論文에서는 周波數 領域-適應 필터 알고리즘에 관하여 μ -FLMS 알고리즘이라는 하나의 새로운 形態를 提示하였으며, 이 알고리즘과 時間 領域-適應 필터 μ -LMS 알고리즘의 特性을 比較하였다. 두 필터의 特性을 比較한 結果, 同一한 收斂速度下에서 周波數 領域-適應 필터가 計算量에서 有利하였다.

Abstract

Above certain filter order, the frequency domain-adaptive filter is superior to the time domain-adaptive filter in computational complexity. In this paper a new type algorithm, μ -FLMs algorithm, is proposed for the frequency domain-adaptive filter and the characteristics of the proposed algorithm is compared with that of the time domain-adaptive filter algorithm (μ -LMS algorithm). The simulation results showed that under the same convergence rate, the frequency domain-adaptive filter is efficient in computational burden.

I. 序 論

適應 필터란 未知 시스템의 入力과 出力 信號를 데이터로 하여 未知의 시스템 파라미터를 찾아내는 것으로서, 最近까지는 데이터를 時間 領域上에서 처리하는 時間 領域-適應 필터가 사용되어 왔다. 그러나 適應 필터의 몇가지 應用 分野에서는 衝擊 應答(impulse response)이 매우 긴 適應 필터가 요구되므로, 이를 時間 領域上에서 처리하면 많은 計算量이 요구된다. 이때 時間 領域上에서 重疊(convolution)된 데이터를

FFT를 이용하여 周波數 領域上에서 變換 處理하면 計算量을 많이 절감시킬 수 있다. 周波數 領域-適應 필터는 이러한 原理를 이용한 것으로 이를 위한 몇가지 알고리즘들이 提示되어 왔다.^{1, 2} 本 論文에서는 參考 文獻[7], [8]에서 提示한 時間 領域-適應 필터에 관한 μ -LMS 알고리즘을 周波數 領域-適應 필터에도 擴張 應用할 수 있음을 보이고 이 擴張된 알고리즘과 μ -LMS 알고리즘 상호간의 特性을 比較하고자 한다.

II. 周波數 領域-適應 필터 알고리즘

다음의 III節에서 提案하고자 하는 本 論文의 알고리즘에 대한 이해를 돕기 위해 B. Widrow에 의한 時間 領域-LMS 알고리즘¹⁾과 D. Mansour, A.H. Gray에 의한 周波數 領域 LMS 알고리즘²⁾을 간단히 소개 하겠다. 아래의 그림 1은 時間 領域-LMS 適應 필터

*正會員, 부산대학교 電子工學科
(Dept. of Electronic Eng., Pusan National Univ.)

**正會員, 서울대학교 工科學 電子工學科
(Dept. of Electron. Eng., Seoul National Univ.)

接受日字: 1984年 8月 9日

의 구조를 나타내며 x_j, d_j, y_j 는 각각 入力, 出力, 推定 出力 信號들의 標本값을, $e_j = d_j - y_j$ 는 推定 誤차를 나타낸다.

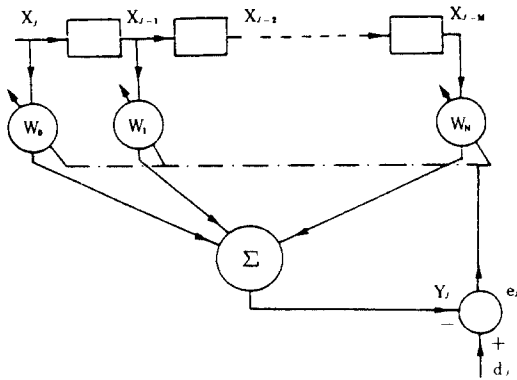


그림 1. 時間 領域-LMS 適應 필터
Fig. 1. Time domain LMS adaptive filter.

LMS 알고리즘은 아래와 같다.

$$\omega_{j+1} = \omega_j + 2\mu e_j x_j \quad (1)$$

$$\omega_j = [\omega_j(0), \omega_j(1), \dots, \omega_j(N)]^T: \text{무계 벡터} \quad (2)$$

$$x_j = [x(j), x(j-1), \dots, x(j-N)]^T: \text{入力 狀態 벡터} \quad (3)$$

$$y_j = X_j^T \omega_j: \text{推定 出力} \quad (4)$$

$$e_j = d_j - y_j: \text{推定 誤差} \quad (5)$$

式 (4)에서 y_j 는 아래와 같이 線形 重疊(linear convolution)으로 表示할 수 있다. 여기서 j 는 데이터 샘플 갯수를 기준으로한 適應 回數를 나타낸다.

$$y_j = \sum_{i=0}^N \omega_i(i) x(j-i) = \omega_j(j) * x(j) \quad (6)$$

式 (6)을 DFT 變換을 하여 周波數 領域上的 곱셈으로 表示할 수 있다. 그러나 DET는 循環 重疊(circular convolution)을 이용하므로 overlap-save 방식에 의한 循環 重疊으로 表示하기 위해 아래와 같이 무계 벡터에 零點 插入(zero augument)을 行한다. (式(7),(8))

$$\omega(i) = \omega(i), \quad i=0, 1, \dots, N \quad (7)$$

$$\omega(i) = 0, \quad i=N+1, \dots, 2N-1 \quad (8)$$

$$x_k(n) = x(KN+n), \quad n=0, \dots, 2N-1, \\ K=0, 1, \dots, \infty \quad (9)$$

式 (6)을 式 (7)~(9)를 이용하여 循環重疊으로 表示하기 위해 아래와 같이 入力 信號에 대한 循環 行列(circulant matrix) X_k 와 DFT 行列 F 를 定義한다. 여기서 K 는 데이터 블록을 기준으로한 適應 回數를 나타낸다.

$$X_k = \begin{bmatrix} x_k(0), x_k(1), \dots, x_k(2N-1) \\ x_k(2N-1), x_k(0), \dots, x_k(2N-2) \\ \vdots \\ x_k(1), x_k(2), \dots, x_k(0) \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$F : F_{l,j} = \exp[-i(2\pi/2N)lK_j] : 2N \times 2N \text{ DFT 行列} \quad (11)$$

$$F^{-1} = \frac{1}{2N} F^* : 2N \times 2N \text{ 逆 DFT 行列} \quad (12)$$

(* : 轉置 共軛 行列(transpose-conjugate matrix))
이상의 式 (7)~(12)를 바탕으로 아래와 같이 각 벡터, 行列의 DFT를 定義한다.

$$d_k = [d_k(0), d_k(1), \dots, d_k(2N-1)]^T \quad (13)$$

단 $d_k(i) = d(KN+i)$

$$\omega_k = [\omega_k(0), \omega_k(1), \dots, \omega_k(2N-1)]^T \quad (14)$$

$$h = \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} : 2N \times 2N \text{ 行列}, \quad \Pi : N \times N \text{ 單位 行列} \quad (15)$$

$$e_k = h \Pi d_k - X_k \omega_k \quad (16)$$

$$y_k = [y_k(0), y_k(1), \dots, y_k(2N-1)]^T \quad (17)$$

단 $y_k(i) = y(KN+i)$

$$\text{DFT} \left\{ \begin{aligned} D_k &= F d_k & (18) \\ W_k &= F \omega_k & (19) \\ H &= F h F^{-1} & (20) \\ E_k &= F e_k & (21) \\ &= H(D_k - X_k W_k) & (21) \\ Y_k &= F y_k = X_k W_k & (22) \end{aligned} \right.$$

式 (21), (22)에서 行列 X_k 는 對角線 因子가 循環 行列 X_k 의 첫번째 行의 DFT를 나타내는 對角線 行列로서 아래와 같이 定義된다.

$$X_k = F X_k F^{-1} \quad (23)$$

위의 式 (7)~(23)을 바탕으로 周波數 領域의 誤差自乘 平均 $E\{E_k^T E_k\}$ 을 最小로 向하게 하는 알고리즘은 아래와 같다.¹²⁾

$$W_{k+1} = W_k + \mu_F (-\nabla W_k) \quad (24)$$

$\nabla W_k = -2 E\{X_k^* H D_k\} + 2 E\{X_k^* H X_k\} W_k$
 $E\{\cdot\}$ 은 期待值(expectation value)를 의미한다. 알고리즘 (24)의 時間 領域上的 等價를 구하기 위해 (24)의 各變에 F^{-1} 行列을 곱한다.

$$F^{-1} W_{k+1} = F^{-1} W_k - \mu_F F^{-1} (\nabla W_k) \quad (25)$$

$$F^{-1} (\nabla W_k) = -2 E\{F^{-1} (F^{-1})^* X_k F^* (F h F^{-1}) (F d_k)\} \\ + 2 E\{F^{-1} (F^{-1})^* X_k F^* (F h F^{-1}) (F X_k F^{-1})\} F \omega_k \\ = -2 E\{(h X_k)^T d_k\} + 2 E\{(h X_k)^T (h X_k)\} \omega_k \quad (26)$$

$$\therefore \omega_{k+1} = \omega_k + \mu_F (-\nabla \omega_k) \\ \nabla \omega_k = -2 E\{X_k d_k\} + 2 E\{X_k X_k^T\} \omega_k \\ X_k = h X_k \quad (27)$$

실제 適應 필터에서는 計算量을 줄이기 위해 式 (24)

의 기울기 벡터 ∇W_k 대신에 推定 기울기 벡터 $\hat{\nabla} W_k$ 를 사용한다.^[2]

$$\begin{aligned} \hat{\nabla} W_k &= -2 X_k^* H D_k + 2 X_k^* H X_k W_k \\ &= -2 X_k^* (H D_k - H X_k W_k) \\ &= -2 X_k^* E_k \end{aligned} \quad (28)$$

∇W_k 를 $\hat{\nabla} W_k$ 로 대체하면 아래의 周波數 領域 LMS 알고리즘이 된다.

$$\left. \begin{aligned} W_{k+1} &= W_k + \mu_F (-\hat{\nabla} W_k) \\ \hat{\nabla} W_k &= -2 X_k^* E_k \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

알고리즘 (29)의 時間 領域上的 等價는 아래와 같음을 쉽게 알 수 있다.

$$\left. \begin{aligned} w_{k+1} &= w_k + \mu_F (-\hat{\nabla} w_k) \\ \hat{\nabla} w_k &= -2 X_k e_k \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

그림 2는 周波數 領域-LMS 適應 필터의 구조를 나타낸다.

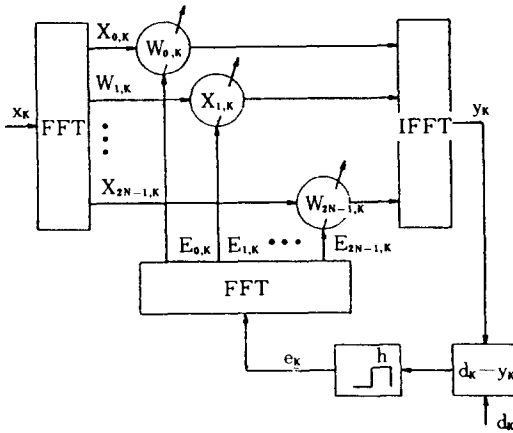


그림 2. 周波數 領域-LMS 適應 필터
Fig. 2. Frequency domain-LMS adaptive filter.

Ⅲ. 高收斂性 周波數 領域 LMS 알고리즘

LMS 알고리즘의 收斂 速度 改善을 위해 [7, 8]에서 提示한 μ -LMS 알고리즘의 原理를 式 (29)에 應用하여 周波數 領域 LMS 알고리즘의 收斂 速度 改善을 꾀하고자 한다. 式 (29)에서 適應 利得 μ_F 를 時間의 函數로 표시하기 위해 μ_{FK} 로 표시하여 式 (29)를 다시 써보면 아래와 같다.

$$\left. \begin{aligned} W_{k+1} &= W_k + 2 \mu_{FK} X_k^* E_k \\ E_k &= H(D_k - X_k W_k) \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

式 (31)에서 K번째 適應時 W_k, X_k, E_k 는 주어진므로 μ_{FK} 를 變數로 하여 K+1번째 適應時的 $|E_{k+1}|^2$ 이 最小가 되는 方向으로 μ_{FK} 를 調整하도록 한다.

$$\begin{aligned} |E_{k+1}|^2 &= E_{k+1}^* E_{k+1} \\ &= (D_{k+1} - X_{k+1} W_{k+1})^* H^* H (D_{k+1} - X_{k+1} W_{k+1}) \end{aligned} \quad (32)$$

式 (31)을 (32)에 代入하여 정리하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} |E_{k+1}|^2 &= (D_{k+1}^* - W_{k+1}^* X_{k+1} - 2 \mu_{FK} E_k^* X_{k+1}^*) \\ &H (D_{k+1} - X_{k+1} W_{k+1} - 2 \mu_{FK} X_{k+1} X_k^* E_k) \\ &(\because HH^* = H) \end{aligned} \quad (33)$$

$|E_{k+1}|^2$ 이 最小로 향하는 μ_{FK} 를 구하기 위해 $|E_{k+1}|^2$ 을 μ_{FK} 로 편미분하여 정리한다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial |E_{k+1}|^2}{\partial \mu_{FK}} &= -2 (E_k^* X_k X_{k+1}^*) H (D_{k+1} - X_{k+1} W_k - 2 \mu_{FK} \\ &X_{k+1} X_k^* E_k) \\ &- 2 (D_{k+1}^* - W_k^* X_{k+1}^* - 2 \mu_{FK} E_k^* X_{k+1}^*) \\ &H (X_{k+1} X_k^* E_k) \\ &= -2 E_k^* X_k X_{k+1}^* E_{k+1} - 2 E_k^* X_{k+1} X_k^* E_k \\ &= -2 \{ \hat{\nabla}^* W_k \cdot \hat{\nabla} W_{k+1} + (\hat{\nabla} W_k \cdot \hat{\nabla} W_{k+1})^* \} \\ &= -4 \text{Re} \{ \hat{\nabla}^* W_k \cdot \hat{\nabla} W_{k+1} \} \end{aligned} \quad (34)$$

$\hat{\nabla} W_k = X_k^* E_k$ 이며 X_k, E_k 는 모두 實數 데이터들의 DFT이므로 DFT에서는 陰의 周波數 成分과 陽의 周波數 成分은 共軛 複素數의 關係가 있으므로 $\hat{\nabla}^* W_k \cdot \hat{\nabla} W_{k+1}$ 의 虛數部는 自然히 0이 된다. 따라서 $\text{Re} \{ \hat{\nabla}^* W_k \cdot \hat{\nabla} W_{k+1} \} = \hat{\nabla}^* W_k \cdot \hat{\nabla} W_{k+1}$ 이 된다. $|E_{k+1}|^2$ 은 μ_{FK} 에 대하여 유니모달(unimodal)하므로 式 (34)로부터 (steepest-descent)方式에 의해 μ_{FK} 는 아래와 같이 適應 된다.

$$\begin{aligned} \mu_{FK+1} &= \mu_{FK} + \rho_F \left(- \frac{\partial |E_{k+1}|^2}{\partial \mu_{FK}} \right) \\ &= \mu_{FK} + 4 \rho_F (\hat{\nabla}^* W_{k-1} \cdot \hat{\nabla} W_k) \\ &= \mu_{FK} + \rho_F (\hat{\nabla}^* W_{k-1} \cdot \hat{\nabla} W_k) \end{aligned} \quad (35)$$

式 (35)에서 ρ_F 는 μ_{FK} 에 대한 適應 利得이다. 式 (31), (35)로부터 아래의 알고리즘이 유도된다.

$$\left. \begin{aligned} W_{k+1} &= W_k + \mu_{FK} (-\hat{\nabla} W_k) \\ \mu_{FK} &= \mu_{FK-1} + \rho_F \hat{\nabla}^* W_{k-1} \cdot \hat{\nabla} W_k \\ \hat{\nabla} W_k &= -2 X_k^* E_k \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

알고리즘 (36)은 μ -LMS 알고리즘의 周波數 領域 形態이므로 편의상 μ -FLMS 알고리즘이라 부르기 로 하겠다. μ -LMS 알고리즘과 μ -FLMS 알고리즘의 收斂 狀態를 比較하기 위해 알고리즘 (36)의 각 변에 行列 F^{-1} 을 곱하여 μ -FLMS 알고리즘의 時間 領域上的 等價 알고리즘을 아래와 같이 얻는다.

$$\left. \begin{aligned} w_{k+1} &= w_k + \mu_{FK} (-\hat{\nabla} w_k) \\ \mu_{FK} &= \mu_{FK-1} + \rho_F \hat{\nabla}^T w_{k-1} \cdot \hat{\nabla} w_k \\ \hat{\nabla} w_k &= F^{-1} (\hat{\nabla} W_k) = -2 X_k e_k \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

式 (37)에서

$$\begin{aligned} \hat{\nabla}^T \omega_{k-1} \hat{\nabla} \omega_k &= (F^{-1} \hat{\nabla} W_{k-1})^* (F^{-1} \hat{\nabla} W_k) \\ &= \hat{\nabla}^* W_{k-1} (F^{-1})^* (F^{-1}) \cdot \hat{\nabla} W_k \\ &= \frac{1}{2N} \hat{\nabla}^* W_{k-1} \hat{\nabla} W_k \end{aligned} \quad (38)$$

이므로 (36), (37)이 等價가 되기 위해서는 ρ_F 와 ρ_T 는 아래와 같은 관계를 가져야 한다.

$$\rho_T = \frac{\rho_F}{2N} \quad (39)$$

μ -FLMS 알고리즘의 時間 領域上的 等價 알고리즘 (37)은 次后로 μ -LMS 알고리즘과 μ -FLMS 알고리즘의 收斂 狀態 比較에 사용된다.

IV. μ -LMS 알고리즘과 μ -LFMS 알고리즘의 收斂 狀態 및 適應 利得 比較

LMS 알고리즘 (1)에 대한 μ -LMS 알고리즘은 아래와 같다.

$$\left. \begin{aligned} \omega_{k-1} &= \omega_k + \mu (-\hat{\nabla} \omega_k) \\ \mu &= \mu_{k-1} + \rho \hat{\nabla}^T \omega_{k-1} \hat{\nabla} \omega_k \\ \hat{\nabla} \omega &= 2e_k X_k \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

알고리즘 (36)과 (40)의 平均的 收斂 狀態를 比較하기 위해 알고리즘 (36), (37), (40)에서의 推定 기울기 벡터 $\hat{\nabla} W_k$, $\hat{\nabla} \omega_k$, $\hat{\nabla} \omega_k$ 대신에 平均的 기울기 벡터 ∇W_k , $\nabla \omega_k$, $\nabla \omega_k$ 로 대체하여 다시 써보면 아래와 같다.

$$\left. \begin{aligned} W_{k+1} &= W_k + \mu_{FK} (-\nabla W_k) \\ \mu_{FK} &= \mu_{FK-1} + \rho_F \nabla^* W_{k-1} \nabla W_k \\ \nabla W_k &= -2P_F + 2R_F W_k \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

$$\text{단, } R_F = E\{X_k^* H X_k\} = Q_F \wedge_F Q_F^{-1} = Q_F \wedge_F Q_F^* \quad (42)$$

$$P_F = E\{X_k^* H d_k\} = E\{X_k^* H X_k\} W^* = R_F W^* \quad (43)$$

W^* : W_k 의 最適 Wiener解

알고리즘 (37)로 부터

$$\left. \begin{aligned} \omega_{k+1} &= \omega_k + \mu_{TK} (-\nabla \omega_k) \\ \mu_{TK} &= \mu_{TK-1} + \rho_T \nabla^T \omega_{k-1} \nabla \omega_k \\ \nabla \omega_k &= -2P_T + 2R_T \omega_k \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

$$\text{단 } R_T = E\{X_k^T X_k\} = Q_T \wedge_T Q_T^{-1} = Q_T \wedge_T Q_T^T \quad (45)$$

$$P_T = E\{X_k^T d_k\} = E\{X_k^T X_k \omega^*\} = R_T \omega^* \quad (46)$$

($\because X_k^T X_k = X_k^T X_k$)

ω^* : ω_k 의 最適 Wiener解

알고리즘 (40)으로 부터

$$\left. \begin{aligned} \omega_{k+1} &= \omega_k + \mu_k (-\nabla \omega_k) \\ \mu_k &= \mu_{k-1} + \rho \nabla^T \omega_{k-1} \nabla \omega_k \\ \nabla \omega_k &= -2P + 2R \omega_k \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

$$\text{단 } R = E\{X_k X_k^T\} = Q \wedge Q = Q \wedge Q^T \quad (48)$$

$$P = E\{X_k d_k\} = E\{X_k X_k^T \omega^*\} = R \omega^* \quad (49)$$

1. μ -FLMS 알고리즘과 μ -LMS 알고리즘의 適應 利得 初期值 比較

두 알고리즘 (36), (40)의 適應 利得 初期值 μ_{F0} 와 μ_0 를 比較하기 위해 이 두 알고리즘의 平均的 收斂 狀態를 나타내는 式 (41), (47)에서 $\rho_F = \rho = 0$ 로 한다. $\rho = 0$ 일때 LMS 알고리즘의 適應 利得 μ_0 는 入力 信號의 相關 行列(input signal correlation matrix)의 特性值(eigenvalue)에 의해 결정된다는 사실은 잘 알려져 있다.¹¹⁾ 즉 $0 < \mu_0 < 1/2 \lambda_{\max}$ 을 만족해야 한다. 여기서 λ_{\max} 는 行列 R의 最大 特性值를 나타낸다.

반면에 알고리즘 (36)의 時間 領域上的 等價인 (37)의 入力 相關 行列 R_T 는 $R_T = E\{X_k^T X_k\}$ 이므로 $X_k = h X_k$ 에 의해 R_T 의 對角線 因子들은 行列 R의 對角線 因子의 N배가 된다. 따라서 相關度가 적은 入力 信號에 대하여서는 μ_{F0} 는 μ_0 의 1/N이 되어야 두 알고리즘의 收斂 速度가 같아진다.

$$\therefore \mu_{F0} \approx \frac{\mu_0}{N} \quad (50)$$

그러나 알고리즘 (36)에서는 파라미터 W가 1 데이터 群마다, 즉 N개의 入力 데이터마다 1번씩 適應이 되므로 入力 데이터 갯수를 기준으로 알고리즘 (40)과 같은 收斂 收斂 速度를 갖기 위해서는 1 데이터 群마다 같은 데이터들로써 파라미터 W를 N번 反復 適應시킨다. 알고리즘 (36)의 入力 相關 行列인 式 (42)의 行列 $R_F = E\{X_k^* H X_k\}$ 의 最大 特性值를 $\lambda_{F\max}$ 라 할때 알고리즘 (36)이 充分히 안정된 收斂을 하기 위한 조건인, $\mu_F < 1/2 \lambda_{F\max}$, $N \mu_F < 1/2 \lambda_{F\max}$ 을 만족할 때는 위의 N번 反復 適應 過程은 아래와 같이 近似化할 수 있다.

K번째 데이터 群에서 N번 反復適應할때 i번째 適應時 파라미터의 平均值 및 推定 誤差를 벡터를 각각 $W_{k,i}$, $E_{k,i}$ 로 表示하며 동시에 $W_{k,i}$ 와 K번째 데이터 群의 入力 데이터 DFT인 X_k 는 서로 獨立的이라 가정할 후 아래의 近似化 過程을 거친다.

$$W_{k,1} = W_{k,0} + 2 \mu_{F0} E\{X_k^* E_{k,0}\} \quad (51)$$

$$= W_{k,0} + 2 \mu_{F0} E\{X_k^* H d_k\} - 2 \mu_{F0} E\{X_k^* H X_k\} W_{k,0}$$

$$= [\text{I} - 2 \mu_{F0} E\{X_k^* H X_k\}] W_{k,0} + 2 \mu_{F0} E\{X_k^* H d_k\}$$

$$\begin{aligned} W_{k,2} &= W_{k,1} + 2 \mu_{F0} E\{X_k^* E_{k,1}\} \\ &= [\text{I} - 2 \mu_{F0} E\{X_k^* H X_k\}] W_{k,0} + [\text{I} - 2 \mu_{F0} E\{X_k^* H X_k\}] \\ &\quad + 2 \mu_{F0} E\{X_k^* H d_k\} \end{aligned} \quad (52)$$

\vdots

$$W_{k,N} = W_{k,N-1} + 2 \mu_{F0} E\{X_k^* E_{k,N-1}\} \quad (53)$$

$$= [\text{I} - 2 \mu_{F0} E\{X_k^* H X_k\}]^N W_{k,0}$$

$$+ \sum_{i=0}^{N-1} [\text{I} - 2 \mu_{F0} E\{X_k^* H X_k\}]^i \cdot 2 \mu_{F0} E\{X_k^* H d_k\}$$

式 (42)에 의해 $R_F = E\{X_k^* H X_k\} = Q_F \wedge Q_F^*$ 로 對角線 行列化한다. 收斂 條件에 의해 $2 \mu_{F0} \lambda_{F\max} < 1$, $2N \mu_{F0}$

$\lambda_{F\max} < 1$ 이 주어졌으므로, 이를 이용하여 아래의近似式을 얻는다.

$$\begin{aligned} [\Pi - 2\mu_{F0} \in \{X_k^* H X_k\}] &= [\Pi - Q_F (2\mu_{F0} \wedge_F) Q_F^*]^N \\ &= Q_F [\Pi - 2\mu_{F0} \wedge_F]^N Q_F^* \\ &\approx Q_F [\Pi - 2N\mu_{F0} \wedge_F] Q_F^* \end{aligned} \quad (54)$$

式(54)를式(53)의우변두번째항에대입하면아래와같다.

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{N-1} [\Pi - 2\mu_{F0} \in \{X_k^* H X_k\}]^i \\ &= Q_F \left[\sum_{i=0}^{N-1} (\Pi - 2\mu_{F0} \wedge_F)^i \right] Q_F^* \\ &= Q_F \cdot \text{diag} \left[\frac{1 - \{1 - 2\mu_{F0} \lambda_F(i)\}^N}{1 - \{1 - 2\mu_{F0} \lambda_F(i)\}} \right] Q_F^* \\ &\approx Q_F \cdot \text{diag}[N] Q_F^* \\ &= N\Pi \end{aligned} \quad (55)$$

式(54), (55)를(53)에대입하면 $W_{k,N}$ 에대한近似式은아래와같이된다.

$$\begin{aligned} W_{k,N} &= Q_F (\Pi - 2N\mu_{F0} \wedge_F) Q_F^* W_{k,0} + 2N\mu_{F0} \in \\ &\quad \{X_k^* H D_k\} \\ &= (\Pi - 2N\mu_{F0} Q_F \wedge_F Q_F^*) W_{k,0} + 2N\mu_{F0} \in \\ &\quad \{X_k^* H D_k\} \\ &= W_{k,0} + 2N\mu_{F0} \in \{X_k^* H D_k\} - 2N\mu_{F0} \in \\ &\quad \{X_k^* H X_k\} W_{k,0} \\ &= W_{k,0} + 2N\mu_{F0} \in \{X_k^* H (D_k - X_k W_{k,0})\} \\ &= W_{k,0} + 2N\mu_{F0} \in \{X_k^* E_{k,0}\} \end{aligned} \quad (56)$$

즉, 1 데이터 群으로서 N번 反復 適應한다는 것은 結論 近似的으로 μ_{F0} 를 N배로 하여 1회 適應시키는 것과 同一함을式(56)으로부터알수있다. 따라서式(50), (56)으로부터아래의관계를얻을수있다.

$$\mu_{F0} \approx \mu_0 \quad (57)$$

2. μ -LMS 알고리즘과 μ -FLMS 알고리즘의 ρ 및 ρ_F 의 비교

μ -LMS 알고리즘과 μ -FLMS 알고리즘이 入力 데이터 갯수를 기준으로 같은 收斂 速度를 얻기 위해서 두 알고리즘의 ρ 및 ρ_F 의 관계를 해석하고자 한다.

μ -FLMS 알고리즘은 周波數 領域 알고리즘이므로 이 알고리즘의 時間 領域 等價인式(40)과(41)을비교한다. 式(46)에의해式(44)의기울기 벡터 $\nabla \omega_k$ 는아래와같이表示된다.

$$\begin{aligned} \nabla \omega_k &= -2P_T + 2R_T \omega_k = -2R_T \omega^* + 2R_T \omega_k \\ &= -2R_T (\omega_k - \omega^*) = -2R_T V_k \end{aligned} \quad (58)$$

$$V_k = \omega_k - \omega^* : \text{파라미터 誤差 벡터} \quad (59)$$

式(44)의첫번째式의양변으로부터 ω^* 를뺀후양변에行列 Q_T 를곱한다음정리하면아래와같이얻을수있다.

$$\begin{aligned} V_{k+1} &= (\Pi - 2\mu_{FK} \wedge_T) V_k \\ \mu_{FK} &= \mu_{FK-1} + 4\rho (V_{k-1})^T \wedge_T^* V_k \\ V_k &= Q_T^{-1} V_k : \text{變形된 파라미터 誤差 벡터} \end{aligned} \quad (60)$$

[7, 8]에의하면 μ -LMS 알고리즘의變形된 파라미터 誤差 벡터 V_k 에관한循環式도위의式(60)과同一形態로아래와같다.

$$\begin{aligned} V_{j+1} &= (\Pi - 2\mu_j \wedge) V_j \\ \mu_j &= \mu_{j-1} + 4\rho (V_{j-1})^T \wedge^2 V_j \\ V_j &= Q^{-1} V_j \end{aligned} \quad (61)$$

式(60)의첨자 K는 1 데이터 群(N 데이터 샘플)을單位로한 適應 回數이며式(61)의첨자 j는 入力 데이터 갯수를單位로한 適應 回數를 나타낸다. μ -LMS 알고리즘에관한파라미터 誤差 벡터 循環式(61)에서 V_j 의 p 번째 因子 $v_j^{(p)}$ 의減衰率 r_p 는아래와같이유도된다.^[1]

$$\begin{aligned} (r_p)_{\mu-LMS} &= \frac{v_j^{(p)}(p)}{v_{j-1}^{(p)}(p)} = 1 - 2\mu_{j-1} \lambda(p) \\ &= 1 - 2 \left[\mu_0 + \sum_{i=0}^N C_i \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{2(j-1)}{\tau_i}\right) \right\} \right] \lambda(p) \end{aligned} \quad (62)$$

$\lambda(p)$: 對角線 行列 \wedge 의 p 번째 因子

$$C_i = 2\rho \tau_i \exp\left(-\frac{1}{\tau_i}\right) |v_0^{(i)} \lambda(i)|^2 > 0 \quad (63)$$

τ_i : $v_j^{(i)}$ 의指數 減少 時定數

따라서 μ -FLMS 알고리즘의 파라미터 誤差 벡터 循環式(60)에서부터도 r_p 를아래와같이표시할수있다.

$$\begin{aligned} (r_p)_{\mu-FLMS} &= \frac{v_k^{(p)}(p)}{v_{k-1}^{(p)}(p)} = 1 - 2\mu_{FK-1} \lambda_T(p) \\ &= 1 - 2 \left[\mu_{F0} + \sum_{i=0}^{2N-1} C_i \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{2(K-1)}{\tau_i}\right) \right\} \right] \lambda_T(p) \end{aligned} \quad (64)$$

$\lambda_T(p)$: 對角線 行列 \wedge_T 의 p 번째 因子

$$C_i = 2\rho_T \tau_i \exp\left(-\frac{1}{\tau_i}\right) |v_1^{(i)} \lambda_T(i)|^2 > 0 \quad (65)$$

τ_i : $v_k^{(i)}$ 의指數 減少 時定數

ρ 와 ρ_F 의 관계는 상당히 복잡하므로 入力 信號가無相關(uncorrelated)인 경우에 한정하여 ρ 와 ρ_F 의 관계를 해석하고자 한다.

入力 信號가無相關일 경우, 式(45), (48)의行列 R_T , R 은 각각 對角線 行列이 되며 R_T 는 R 의 N배가 된다. 이때式(63), (65)의 $\lambda(i)$, C_i , τ_i 및 $\lambda_T(i)$, C_i , τ_i 는 각각 i에 관계없이 동일하게 되므로 이 값들을 λ_{avg} , C_{avg} , τ_{avg} 및 λ_{Tavg} , C'_{avg} , τ'_{avg} 로 대체시킨다.

$$\lambda_{Tavg} = N \lambda_{avg} \quad (66)$$

지금 μ -FLMS 알고리즘이 入力 데이터 갯수를 기준으로 μ -LMS 알고리즘과 같은 收斂 速度를 갖기 위해서는, 1 데이터 群마다의 適應 回數 K를 기준으로

볼때 μ -LMS 알고리즘에 비해 N배의 收斂 速度를 가지게 된다.

$$\text{즉 } K=j/N \tag{67}$$

$$\tau_{avg} = \tau_{avg}/N \tag{68}$$

式 (67), (68)에 의해 式 (62), (64)는 아래와 같이 된다.

$$\begin{aligned} (r_{\rho})_{\mu-LMS} &= 1-2\left[\mu_0 + \left\{1 - \exp\left(-\frac{2(j-1)}{\tau_{avg}}\right)\right\}\right] \cdot \\ &\quad (N+1) C_{avg} \lambda_{avg} \\ &= (r)_{\mu-LMS} \tag{69} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (r_{\rho})_{\mu-FLMS} &= 1-2\left[\mu_{F0} + \left\{1 - \exp\left(-\frac{2(K-1)}{\tau_{avg}}\right)\right\}\right] \cdot \\ &\quad 2N \cdot C_{avg} \lambda_{Tavg} \\ &\approx 1-2\left[\mu_0 + \left\{1 - \exp\left(-\frac{2(j-1)}{\tau_{avg}}\right)\right\}\right] \cdot \\ &\quad 2N \cdot C_{avg} N \lambda_{avg} \\ &= 1-2N\left[\mu_0 + \left\{1 - \exp\left(-\frac{2(j-1)}{\tau_{avg}}\right)\right\}\right] \cdot \\ &\quad 2N \cdot C_{avg} \lambda_{avg} \\ &\approx [1-2\left[\mu_0 + \left\{1 - \exp\left(-\frac{2(j-1)}{\tau_{avg}}\right)\right\}\right]] \cdot \\ &\quad 2N \cdot C_{avg} \cdot \lambda_{avg}^N \\ &= (r)_{\mu-FLMS} \tag{70} \end{aligned}$$

μ -FLMS 알고리즘이 入力 데이터 갯수를 기준으로 μ -LMS 알고리즘과 같은 收斂 速度를 가지기 위해서는 $(r)_{\mu-LMS}$ 와 $(r)_{\mu-FLMS}$ 의 관계는 아래와 같다.

$$(r)_{\mu-FLMS} = \frac{v_k}{v_{k-1}} \approx \left(\frac{v'_j}{v'_{j-1}}\right)^N = \left[(r)_{\mu-LMS}\right]^N \tag{71}$$

따라서 式 (69), (70), (71)로부터 아래의 관계식을 얻는다.

$$\begin{aligned} &1-2\left[\mu_0 + \left\{1 - \exp\left(-\frac{2(j-1)}{\tau_{avg}}\right)\right\}\right] (N+1) \cdot C_{avg} \lambda_{avg} \\ &= 1-2\left[\mu_0 + \left\{1 - \exp\left(-\frac{2(j-1)}{\tau_{avg}}\right)\right\}\right] \cdot 2N \cdot C_{avg} \lambda_{avg} \tag{72} \end{aligned}$$

$$\therefore C_{avg} = \frac{N+1}{2N} C_{avg} \approx \frac{1}{2} C_{avg} (\because N \gg 1) \tag{73}$$

式 (63), (65)로부터 C_{avg} , C'_{avg} 는 아래와 같이 된다.

$$C_{avg} = 2 \rho \tau_{avg} \cdot \exp\left(-\frac{1}{\tau_{avg}}\right) |v'_{0avg} \lambda_{avg}|^2 \tag{74}$$

$$\begin{aligned} C'_{avg} &= 2 \rho_T \tau'_{avg} \cdot \exp\left(-\frac{1}{\tau'_{avg}}\right) |v'_{0avg} \lambda_{Tavg}|^2 \\ &= 2 \rho_T \cdot N \tau_{avg} \cdot \exp\left(-\frac{N}{\tau_{avg}}\right) |v'_{0avg} \lambda_{avg}|^2 \tag{75} \end{aligned}$$

따라서 式 (73), (74), (75)로부터 ρ_T 와 ρ 의 관계식은 아래와 같다.

$$\rho_T \approx \frac{\exp\left(\frac{N-1}{\tau_{avg}}\right)}{2N} \cdot \rho \tag{76}$$

式 (39)로부터 $\rho_f = \rho/2N$ 의 관계가 있으므로 式 (39),

(76)으로부터 μ -LMS 알고리즘의 ρ 와 μ -FLMS 알고리즘의 ρ_f 는 두 알고리즘이 入力 데이터 갯수를 기준으로 같은 수렴속도를 갖기위해 아래와 같은 관계를 갖는다.

$$\begin{aligned} \rho_f &= \frac{\exp\left(\frac{N-1}{\tau_{avg}}\right)}{(2N)^2} \cdot \rho \\ &= \frac{\alpha}{N^2} \cdot \rho \tag{77} \end{aligned}$$

$$\alpha > \frac{1}{4} \tag{78}$$

즉 이상을 종합하면, 無相關 入力에 대하여서는 μ -LMS 알고리즘과 μ -FLMS 알고리즘의 適應 利得 初期值를 같게 하고 μ -FLMS 알고리즘의 ρ_f 는 μ -LMS 알고리즘의 ρ 의 $1/N^2$ 에 비례하게 設定한다.

V. 알고리즘의 計算量

μ -LMS 알고리즘은 每適應時 N 次의 필터에 대하여 $2N+3$ 번의 곱셈이 필요하다. μ -FLMS 알고리즘은 3번의 $2N$ basis FFT를 요구하며 複素數 파라미터 W를 適應시키기 위해 $2N$ 개의 複素數 곱셈 및 $\nabla * W_{k-1} \cdot \nabla W_k$ 를 계산하기 위해 $2N$ 개의 複素數 곱셈을 필요로 한다. 그러나 入力 信號와 무게 벡터가 實數인 경우는 그들의 FFT는 對線 共軛 성질을 가지므로 이를 이용하면 N을 $N/2$ 으로 줄이는 효과를 얻을 수 있다. 1개의 複素數 곱셈이 4개의 實數 곱셈에 해당한다고 보면 μ -FLMS 알고리즘의 전체 곱셈 수는 $N(6 \log N/2 + 21)$ 이 필요하다. 入力 데이터 갯수를 기준으로 같은 收斂 速度를 가지기 위해서는 μ -FLMS 알고리즘의 1번 適應은 μ -LMS 알고리즘에 의한 N번 適應에 해당하므로 두 알고리즘의 전체적인 計算量의 比 r는 아래와 같다.

$$r = \frac{N(6 \log \frac{N}{2} + 21)}{N(2N+3)} = \frac{6 \log \frac{N}{2} + 21}{2N+3} \tag{79}$$

$N > 32$ 인 경우 필터 次數가 증가할 수록 μ -FLMS 알고리즘이 計算量에서 훨씬 有利해진다.

VI. 電算 시뮬레이션

適應 필터의 收斂 狀態 판단 기준으로서 파라미터 誤差 벡터의 norm을 정규화한 것을 사용하였으며 편 의상 모든 필터의 계수를 1로 設定하였다. 필터의 入力 信號로서는 平均이 0이며 標準 偏差가 1.0인 정규 분포 特性을 갖는 불규칙 信號를 사용하였다. 필터 次數가 32次, 64次인 경우의 시뮬레이션 결과가 각각 그림3, 4에 나타나 있다. 필터 次數가 32次인 경우 (그림3) μ -LMS 알고리즘과 μ -FLMS 알고리즘의

適應 利得 初期值를 10^{-4} 으로 하였고, $\rho = \rho_r = 0$ 인 경우의 결과를 그래프 ①, ②에, $\rho = 10^{-4}$, $\rho_r = \rho/N^2$ ($\alpha = 1$)인 경우의 결과를 그래프 ③, ④에 각각 도시하였다. 다음으로 필터 次數가 64次인 경우의 시뮬레이션 결과가 그림 4에 도시되어 있다. 이 경우에는 두 알고리즘의 適應 利得 初期值를 10^{-4} 으로 하였고 $\rho = \rho_r = 0$ 인 경우의 결과를 그래프 ①, ②에, $\rho = 0.25 \times 10^{-4}$, $\rho_r = 4 \cdot \rho/N^2$ ($\alpha = 4$)인 경우의 결과를 그래프 ③, ④에 각각 도시하고 있다. 이상의 시뮬레이션 결과는 앞에서 豫測한 것과 비교적 일치하였다. μ -LMS 알고리즘과 μ -FLMS 알고리즘의 시뮬레이션 計算 時間의 比較는 式 (79)에 表示되어 있다.

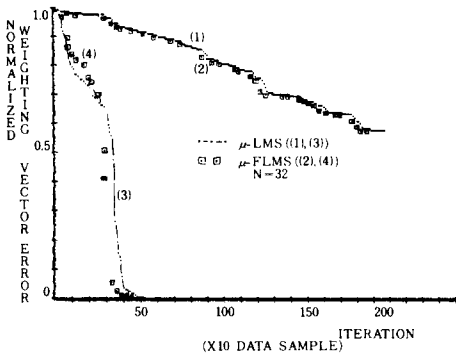


그림 3. 32次 필터의 收斂 狀態
Fig 3. Convergency state of 32 order filter.

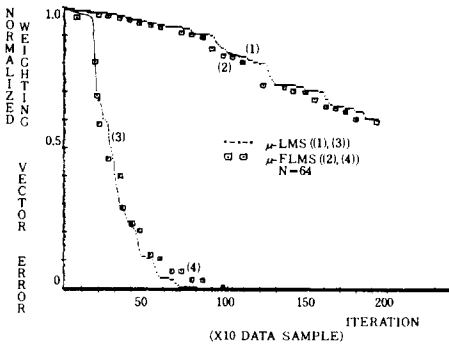


그림 4. 64次 필터의 收斂 狀態
Fig 4. Convergency state of 64 order filter.

Ⅶ. 結 論

周波數 領域-LMS 適應 필터에 時間 領域-適應

필터의 μ -LMS 알고리즘 原理를 擴張 適用하여 周波數 領域 μ -LMS 알고리즘을 提示하였다. 새로 提示된 本論文의 알고리즘과 종래의 LMS 알고리즘들의 特性을 無相關 入力下에서 比較하였던 바 收斂 速度 및 計算量에서 有利함을 확인하였다. 또한 이 結果들은 앞에서 豫測한 것과 대체로 符合하였다. 끝으로 相關度가 큰 入力 信號의 경우 入力 相關 行列의 特性值가 넓게 分布됨에 따라 이 點이 本論文의 알고리즘 收斂 狀態에 미치는 영향에 대하여 앞으로 좀 더 高찰할 필요가 있을 것으로 생각한다.

參 考 文 獻

- [1] B. Widrow, J.M. McCool, M.G. Larimore, C.R. Johnson, "Stationary and nonstationary learning characteristics of the LMS adaptive filter," *Proc. IEEE*, vol. 64, no. 8, pp. 1151-1162 Aug. 1976.
- [2] D. Mansour, A.H. Gray, JR., "Unconstrained frequency domain adaptive filter," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-30, pp. 726-734, Oct. 1982.
- [3] E.R. Ferrara, "Fast implementation of LMS adaptive filter," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-28, Aug. 1980.
- [4] B. Widrow, J. McCool, M. Ball, The Complex LMS Algorithm, *Proceedings of the IEEE*, April 1975.
- [5] M. Dentino, J. McCool, B. Widrow, "Adaptive filtering in the frequency domain," *Proceedings of the IEEE*, vol. 66, no. 12, Dec. 1978.
- [6] S. Shankar Narayan, A.M Peterson, M.J. Narasimha, "Transform domain LMS algorithm," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. ASSP-31, no. 3 June 1983.
- [7] 辛潤杰, 李鍾珪, "LMS 適應 필터 設計를 위한 高速收斂 알고리즘에 관한 研究," *電子工學會誌* 第 19卷 第 5號 pp. 13-19, 10月 1982年.
- [8] 辛潤杰, 金春成, 申宰浩, 李鍾珪, "LMS 알고리즘의 2次元 適應 필터에의 應用에 관한 研究," *電子工學會誌* 第 21卷 第 2號, pp. 29-34 3月 1984年.