

# 볼츠만방정식을 이용한 氣體放電의 Simulation

白 龍 鉉  
(仁荷大 工大 教授)

■ 차 례 ■

- 1. 緒論
  - 2. 本論
    - 2.1 電子群
    - 2.2 電子와 氣體分子사이의 衝突項
    - 2.3 볼츠만 방정식의 球座標에 의한 展開
    - 2.4 볼츠만 방정식의 解法(I)
    - 2.5 볼츠만 방정식의 解法(II)
  - 3. 結論
- 參考文獻

## 1 緒 論

氣體中の 방전현상을 微視的(原子的)인 입장으로 취급하면 상호충돌을 되풀이하는 많은 粒子(電子, 原子, 分子, 光子)들로 되어 있다. 따라서 放電現象의 特性을 이와 같은 충돌과정의 性質을 토대로 하여 밝히는 것이 原理的으로 가능하다고 생각된다. 그러므로 氣體放電現象의 解析 및 豫測을 컴퓨터를 이용하여, 電氣傳導의 基礎的 단계인 전자, 이온群의 운동특성, 절연과피에서의 擴散Glow 단계에 이르기까지의 過程 등을 이론적으로 해석할 수 있으며, 이 분야에 대한 연구가 많이 이루어져 왔다.<sup>1,5)</sup> 이들중에서 대표적인 것은 다음과 같다. 粒子 개개에 대한 운동의 確率的인 측면을 모의적으로 취급하는 Monte Carlo Simulation, 電子流나 이온流에 대한 連續의 식에 의한 절연과피과정의 Simulation, Laser방전의 Simulation, 電子群中の 電子가 시간에 따라 변화하는 位置函數 및 速度函數로 표시되는 볼츠만방정식을 이용한 Simulation 등 여러가지가 있다.

볼츠만방정식은 다수의 입자를 포함한 電子流를 취급하기 때문에, 충돌의 확률적 성질에 의하여 기인되는 Swarm 발달의 統計的 變動이 일어나지 않고, 전자군의 거동특성에 대한 演繹的인 통찰이 가능하고 또한 계산시간이 짧은 등의 잇점이 있으

므로 衝突斷面積으로부터 Swarm Parameter를 구하는 방법으로 현재 가장 많이 이용되고 있다.

이러한 점을 고려하여 전자群의 운동 특성을 해석하기 위하여 볼츠만방정식을 구하는 방법, 해법, 계산에 등에 대하여 기술하고자 한다.

## 2 本 論

어느 기체중에 荷電粒子가 단위체적당  $n$ 개 포함되어 있다고 하자. 이들의 電子粒子는 기체중에서 움직이고 있기 때문에 熱平衡狀態인 경우를 제외하고는 位置  $\vec{r}$ 와 時間  $t$ 에 대하여 函數的으로 변화한다고 볼 수 있으므로

$$n = n(\vec{r}, t) \tag{1}$$

라 표현할 수 있다. 또 하전입자 개개의 속도는 일반적으로 각각 다르며 시간에 따라 변화한다. 따라서 位置空間과 速度空間을 취하는 位相空間을 생각할 필요가 있다. 식(1)의  $n$ 중에서  $\vec{r}$ 에 대한 미소체적  $d\vec{r}$ ,  $\vec{v}$ 에 대한 미소체적  $d\vec{v}$ 에 존재하는 전자수를  $f(\vec{v}, \vec{r}, t) d\vec{r} d\vec{v}$  라 하면

$$dn = f(\vec{v}, \vec{r}, t) d\vec{r} d\vec{v} \tag{2}$$

라 쓸 수 있다. 식(2)에서 나타낸 確率密度函數  $f(\vec{v}, \vec{r}, t)$ 를 速度分布函數(velocity distribution)이라 한다.<sup>11,2)</sup>

미소시간  $dt$  후에 하전입자의 위치, 속도는 입자 자신의 운동과 外力의 작용에 의하여  $\vec{r} + \vec{v}dt$ ,

$\bar{v} + \bar{a}dt$ 로 이동하게 되며, 새로운 상태를 만족하는 하전입자의 수  $n'$ 는

$$dn' = f(\bar{v} + \bar{a}dt, \bar{r} + \bar{v}dt, t + dt) d\bar{r} d\bar{v} \quad (3)$$

으로 된다.

따라서  $dt$ 시간의 경과에 따른 입자수의 변화는 식(3)을 Talor級數展開式중 1次項까지만 고려하면

$$\begin{aligned} dn' - dn &= \{f(\bar{v} + d\bar{v}, \bar{r} + d\bar{r}, t + dt) \\ &\quad - f(\bar{v}, \bar{r}, t)\} d\bar{r} d\bar{v} \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{r}} + \alpha \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{v}} \right) f(\bar{v}, \bar{r}, t) \\ &\quad d\bar{r} \cdot d\bar{v} \cdot dt \end{aligned} \quad (4)$$

으로 된다.

체적  $d\bar{v} d\bar{r}$ 내에서 충돌에 의한 입자의 流入, 流出이 없다고 가정하면 좌변은 당연히 0가 되지만, 일반적으로 충돌에 의하면 입자수에 변화가 생기므로 이는  $\bar{J}(f, g) d\bar{v} d\bar{r} dt$ 로 되며,  $\bar{J}(f, g)$ 를 충돌항이라 한다. 여기서  $g = g(\bar{v}_g, \bar{r}, t)$ 는 기체분자의 속도분포함수이다.

결국 하전입자의 속도분포함수  $f(\bar{v}, \bar{r}, t)$ 의 시간적 변화는

$$\frac{\partial}{\partial t} f + \bar{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{r}} f + \alpha \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{v}} f = \bar{J}(f, g) \quad (5)$$

로 표현된다. 이방정식을 볼츠만방정식이라 부른다.<sup>3)</sup> 여기에서 중요하고, 관심의 대상은 충돌항이므로  $\bar{J}(f, g)$ 에 대하여 생각해 보자.

어느 종류  $k$ 의 충돌에 의해 미소체적  $d\bar{v} d\bar{r}$ 에 유입하는 하전입자의 수는 충돌시의 하전입자, 기체분자의 속도를  $\bar{v}$ ,  $\bar{V}_g$ 에 대하여 각도  $(\omega, \chi)$  방향의 미소입체각  $d\Omega$ 로 산란되어지는 확률을

$$\begin{aligned} \sigma_k(|\bar{v} - \bar{V}_g|, \omega, \chi) d\Omega \text{라 하면} \\ \int_{\Omega} \int_{\bar{v}_g} f(\bar{v}, \bar{r}, t) g(\bar{v}_g, \bar{r}, t) \cdot |\bar{v} - \bar{V}_g| \\ (|\bar{v} - \bar{V}_g|, \omega, \chi) \cdot d\Omega d\bar{V}_g d\bar{r} d\bar{v} dt \end{aligned} \quad (6)$$

라 쓸 수 있다. 또한 유출되어지는 하전입자의 수도 같은 방법으로

$$\int_{\Omega} \int_{\bar{v}_g} f(\bar{v}, \bar{r}, t) g(\bar{v}_g, \bar{r}, t) |\bar{V}_g - \bar{v}| \cdot \sigma_k(|\bar{v} - \bar{V}_g|, \omega, \chi) \cdot d\Omega d\bar{V}_g d\bar{r} d\bar{v} dt \quad (7)$$

로 된다. 따라서 모든 충돌을 고려한 충돌항은

$$\begin{aligned} \bar{J}(f, g) d\bar{r} d\bar{v} dt = \sum_k \int_{\Omega} \int_{\bar{v}_g} f(\bar{v}, \bar{r}, t) \cdot g(\bar{V}_g, \bar{r}, t) \\ |\bar{v} - \bar{V}_g| \cdot \sigma_k(|\bar{v} - \bar{V}_g|, \omega, \chi) \\ \cdot d\Omega d\bar{V}_g d\bar{r} d\bar{v} dt - \sum_k \int_{\Omega} \int_{\bar{v}_g} \\ f(\bar{v}, \bar{r}, t) \cdot (\bar{V}_g, \bar{r}, t) \cdot |\bar{v} - \bar{V}_g| \\ \cdot \sigma_k(|\bar{v} - \bar{V}_g|, \omega, \chi) \cdot d\Omega d\bar{V}_g d\bar{r} \\ d\bar{v} dt \end{aligned} \quad (8)$$

로 된다. 이와 같이 충돌항이 적분형태를 하고 있

으므로 충돌적분(collision integral)이라고도 부른다.

이와 같은 볼츠만방정식의 적용가능한 영역을 알기 위하여 식(5)의 物理的 意味를 알아보면, 좌변의 제1항은 분포함수의 시간적 변화, 제2항은 입자의 운동에 의한 擴散, 제3항은 外力의 영향, 그리고 우변은 충돌항을 각각 나타내고 있다. 따라서 분포함수의 시간적 변화는 擴散, 外力, 衝突 効果의 3과정으로 나누어 생각할 수 있으며, 2體衝突에 기인된 近距離力이 작용하는 영역에서 본 식이 유용하다.<sup>1)</sup>

### 2.1 電子群

전자의 중성기체분자와만의 충돌, 이른바 弱電離 氣體領域( $N \gg N_{ex}$ ,  $N$ ,  $N_{ex}$ 는 중성분자, 여기분자 수 밀도)에서 전자는 분자와의 彈性, 勵起, 電離, 附着 等의 각 충돌을 일으킨다. 전자의 질량  $m$ 은 중성기체분자의 질량  $M$ 에 비하여 대단히 적으며, 기체분자속도  $\bar{V}_g$ 도 전자속도  $\bar{v}$ 에 비하여 매우 적어 충돌시 정지하고 있는 것으로 보면

$$\bar{v} - \bar{V}_g \approx \bar{v} \quad (9)$$

$$g(\bar{V}_g) \approx \delta(\bar{V}_g) \quad (\delta: \text{delta 함수}) \quad (10)$$

로 近似化시킬 수 있다.

### 2.2 電子와 氣體分子사이의 衝突項<sup>4), 9), 11)</sup>

충돌시 散亂角중에서 方位角  $\chi$ 는 有極性分子의 경우를 제외하고는 等方的 分布를 하고 있으므로 微分斷面積은

$$\sigma_k(\varepsilon, \omega, \chi) = \sigma_k(\varepsilon, \omega) \quad (11)$$

로 된다.

충돌항  $\bar{J}(f, g)$ 를 식(9), (10)을 써서 간단화시키면,

$$\begin{aligned} \bar{J}(f) d\bar{r} d\bar{v} dt = \sum_k N \left\{ \int_{\Omega} f(\bar{v}, \bar{r}, t) v \sigma_k(v, \omega) d\Omega \right. \\ \left. d\bar{r} d\bar{v} dt - \int_{\Omega} f(\bar{v}, \bar{r}, t) v \sigma_k \right. \\ \left. (v, \omega) d\Omega d\bar{r} d\bar{v} dt \right\} \quad (12) \end{aligned}$$

로 되며 散亂후의 전자의 속도는 충돌시 에너지보존의 법칙에 따라 결정되며, 충돌전후의 속도를  $v', v$ 라 하면 일반적으로

$$v = \zeta \omega v', \omega \quad (13)$$

로 쓸 수 있으므로 식(12)의 우변 제1항은

$$\sum_k N \int_{\Omega} \int_{\bar{v}} f(\bar{v}, \bar{r}, t) v' \sigma_k(v', \omega) d\Omega \delta(\zeta \omega v', \omega) - v \\ dv d\bar{r} d\bar{v} dt \quad (14)$$

로 된다.

또한 속도공간의 체적요소  $d\bar{v} = v^2 d\Omega dv$ 의 관계

를 적용하면  $dv \, d\bar{v} = \left(\frac{v'}{v}\right)^2 \cdot \frac{d\Omega'}{d\Omega} dv' \, d\bar{v}'$  인 관계가 있으므로 식(14)는

$$\sum_k N \int_{\bar{v}} \int_{v'} f(\bar{v}', \bar{r}, t) v' \sigma_k(v', \omega) \cdot \frac{\partial v'}{\partial \xi_k} \left(\frac{v'}{v}\right)^2 d\Omega' \, d\bar{r} \, d\bar{v} \, dt \quad (15)$$

로 된다. 결국 전자와 기체분자사이의 충돌에 의

한 전자수의 실제 증가량은

$$J(f) = \sum_k N \left\{ \int_{\Omega} f(\bar{v}, \bar{r}, t) v' \sigma_k(v', \omega) \left(\frac{v'}{v}\right)^2 \cdot \frac{\partial v'}{\partial \xi_k} d\Omega - \int_{\Omega} f(\bar{v}, \bar{r}, t) v \sigma_k(v, \omega) d\Omega \right\} \quad (16)$$

로 된다. 충돌항의 구체적인 예를 표 1에 표시한

표 1. 電子-分子衝突項의 具體的인 例

충돌의종류k	충돌전후의보존법칙	$\partial v' / \partial \xi$	충돌항 J
탄성	$v = v' \left\{ 1 - \frac{m}{M} (1 - \cos \omega) \right\}$	$\frac{v'}{v}$	$J_{ei} = N \int_{\Omega} f(\bar{v}, \bar{r}, t) v' \left(\frac{v'}{v}\right)^3 \sigma_{ei}(v', \omega) d\Omega - N \int_{\Omega} f(\bar{v}, \bar{r}, t) v \sigma_{ei}(v, \omega) d\Omega$
j準位로의 勵起	$v^2 = v'^2 - v_j^2$	$\frac{v'}{v}$	$J_j = \sum_j N \int_{\Omega} f(\bar{v}, \bar{r}, t) v' \frac{v'}{v} \sigma_{ej}^j(v', \omega) d\Omega - N \int_{\Omega} f(\bar{v}, \bar{r}, t) v \sigma_{ej}^j(v, \omega) d\Omega$
전리	전리후, 2전자로의 에너지가 확률 $P(v, \Delta)$ 로 $(1-\Delta) : \Delta$ 로 분배된다라고 가정 $v_1^2 + v_2^2 = v'^2 - v_i^2$ $v_1^2 = (1-\Delta) v_i^2 / \Delta$	$\frac{1}{\Delta} \cdot \frac{v'}{v}$ 혹은 $\frac{1}{1-\Delta} \cdot \frac{v'}{v}$	$J_i = \int_0^1 N \left\{ \frac{1}{1-\Delta} \int_{\Omega} f(\bar{v}, \bar{r}, t) v' \frac{v'}{v} \sigma_i(v', \omega) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{\Delta} f(\bar{v}, \bar{r}, t) v' \frac{v'}{v} \sigma_i(v', \omega) d\Omega \right\} P(v, \Delta) d\Delta - N \int_{\Omega} f(\bar{v}, \bar{r}, t) v \sigma_i(v, \omega) d\Omega$
부착			$J_a = -N \int_{\Omega} f(\bar{v}, \bar{r}, t) v \sigma_a(v, \omega) d\Omega$

2.3 볼츠만방정식의 球座標에 의한 展開<sup>8),9)</sup>

볼츠만방정식이 微積分方程式의 형을 하고 있으므로 일반적인 解析解를 구하는 것은 그리 용이하지 않다. 여기에서는 Legendre 多項式에 의한 展開를 이용하여 구해본다.<sup>1)</sup>

그림 1의 좌표계를 써서 간단화를 위하여 전자의 밀도 변화가 電界  $\bar{E}$ 의 방향(z축)으로만 있고, 분포함수가 z축을 중심으로 대칭성을 가지는 경우에 대하여 알아본다.  $f(\bar{v}, \bar{r}, t)$ 를 대칭축과  $\bar{v}$ 와 이루는 각  $\theta$ 를 變數로 하여 Legendre 多項式으로 級數展開하면

$$f(\bar{v}, \bar{r}, t) = \sum_l P_l(\cos \theta) f_l(v, \bar{r}, t) \quad (17)$$

$$f(\bar{v}', \bar{r}, t) = \sum_l P_l(\cos \theta') f_l(v', \bar{r}, t) \quad (17')$$

로 되며,  $\theta, \theta'$ 는 散亂에 있어서 잘 알려진

$$\cos \theta' = \cos \theta \cos \omega + \sin \theta \sin \theta \sin \omega \quad (18)$$

의 관계가 있고,  $P_l(\cos \theta)$ 와  $P_l(\cos \theta')$ 는 球函數의 加法定理에 따라

$$P_l(\cos \theta') = P_l(\cos \theta) P_l(\cos \omega) + 2 \sum_{m=1}^l \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} P_l^m(\cos \theta) P_l^m(\cos \omega) \cos m\alpha \quad (19)$$

로 된다.

Legendre 다항식의 漸化式<sup>1)</sup>

$$(2\ell+1) \mu P_\ell(\mu) = (\ell+1) P_{\ell+1}(\mu) + \ell P_{\ell-1}(\mu) \quad (20)$$

$$(2\ell+1)(1-\mu^2) \cdot \frac{dP_\ell(\mu)}{d\mu} = \ell(\ell+1) \{ P_{\ell+1}(\mu) - P_{\ell-1}(\mu) \} \quad (21)$$

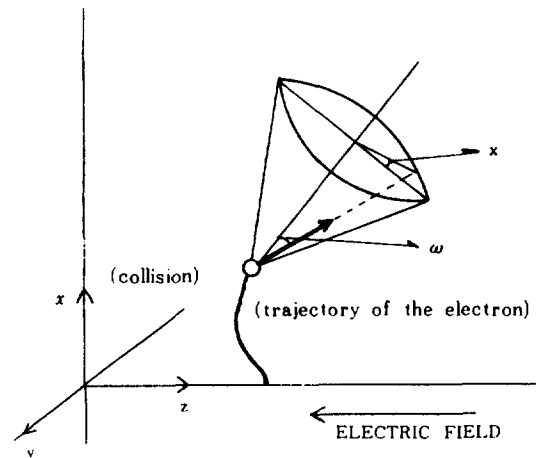


그림 1. 衝突后의 電子軌道表示

(단,  $\mu = \cos \theta$ )인 관계를 적용한다.

구체적으로 볼츠만방정식을 각 항목별로 전개해 보면

時間項 :

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\bar{v}, \bar{r}, t) = \sum_i P_i(\cos \theta) \frac{\partial}{\partial t} f_i(v, \bar{r}, t) \quad (22)$$

位置空間項 :

$$\begin{aligned} \bar{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{r}} f(\bar{v}, \bar{r}, t) &= \sum_i v \cos \theta P_i(\cos \theta) \cdot \frac{\partial}{\partial z} f_i(v, \bar{r}, t) \\ &= v \sum_i \left( \frac{1}{2\ell-1} P_i(\mu) \frac{\partial}{\partial z} f_{i-1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\ell+1}{2\ell+3} P_i(\mu) \frac{\partial}{\partial z} f_{i+1} \right) \quad (23) \end{aligned}$$

速度空間項 : 加速度  $\bar{a} \left( \frac{e\bar{E}}{m} \right)$  는 z축성분만을 가지

므로  $\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}$  는  $\frac{\partial f}{\partial v_z}$  로 되어  $\frac{\partial}{\partial v_z} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\sin \theta}{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \cos \theta}$  를 적용하면

$$\begin{aligned} \bar{a} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{v}} f(\bar{v}, \bar{r}, t) &= \alpha \sum_i \frac{\partial}{\partial v_z} P_i(\mu) f_i(v, \bar{r}, t) \\ &= \alpha \sum_i \left( P_i(\mu) \frac{\partial}{\partial v} f_i + \frac{f_i}{v} (1-\mu^2) \right. \\ &\quad \cdot \frac{\partial P_i(\mu)}{\partial \mu} \Big| = \alpha \sum_i \left[ \frac{\ell}{2\ell-1} v^{i-1} \right. \\ &\quad \cdot \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{f_{i-1}}{v^{i-1}} \right) + \frac{\ell+1}{2\ell+3} \cdot \frac{1}{v^{i+2}} \\ &\quad \left. \left. \left( v^{i+2} f_{i+1} \right) \right] P_i(\mu) \quad (24) \end{aligned}$$

彈性衝突項 : 流出入의 項을 加法定理을 적용하여 整理하면

$$\begin{aligned} J_{ei} &= \sum_i \left[ N \int_{\Omega} P_i(\cos \theta') f_i(v', \bar{r}, t) v' \cdot \left( \frac{v'}{v} \right)^3 \sigma_{ei}(v', \omega) \right. \\ &\quad \left. d\Omega - N \int_{\Omega} P_i(\cos \theta) f_i(v, \bar{r}, t) \cdot v \sigma_{ei}(v, \omega) d\Omega \right] \\ &= \sum_i N v P_i(\mu) \left[ \int_{\Omega} f(v', \bar{r}, t) \cdot \left( \frac{v'}{v} \right)^4 \sigma_{ei}(v', \omega) P_i \right. \\ &\quad \left. (\cos \omega) d\Omega - \int_{\Omega} f(v, \bar{r}, t) \sigma_{ei}(v, \omega) d\Omega \right] \quad (25) \end{aligned}$$

또 탄성충돌의 경우  $v = v' \left[ 1 - \frac{m}{M} (1 - \cos \omega) \right]$  에서 알 수 있듯이 v와 v'는 거의 같으므로

$\Delta v \approx v \cdot \frac{m}{M} (1 - \cos \omega)$  정도이므로

v'를 포함하는 항을 Taylor전개의 제1항까지만 취하면

$$\begin{aligned} f_i(v') v'^4 \sigma_{ei}(v', \omega) &\approx f_i(v) v^4 \sigma_{ei}(v, \omega) + \Delta v \frac{\partial}{\partial v} \\ &\quad \{ v^4 f_i(v) \sigma_{ei}(v, \omega) \} + O(\Delta v^2) \quad (26) \end{aligned}$$

이 되므로 (25) 식은

$$\begin{aligned} J_{ei} &= N v \sum_i (\mu) \left[ \int_{\Omega} f_i(v, \bar{r}, t) \sigma_{ei}(v, \omega) \{ P_i(\cos \omega) - 1 \} \right. \\ &\quad \left. d\Omega + \frac{m}{M} \cdot \frac{1}{v^3} \cdot \frac{\partial}{\partial v} \left[ \int_{\Omega} f_i(v, \bar{r}, t) \sigma_{ei}(v, \omega) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. (1 - \cos \omega) v^4 P_i(\cos \omega) d\Omega \right] \right] \quad (27) \end{aligned}$$

로 된다.

여기, 전리, 부착의 충돌항도 식 (25)를 구하는 방법과 같은 방법으로 구하면 된다. 따라서 Legendre 다항식에 의하여 급수전개된 볼츠만방정식의 일반항은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \sum_i P_i(\mu) \left[ \frac{\partial}{\partial t} f_i(v, z, t) + v \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\ell}{2\ell-1} f_{i-1}(v, z, t) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\ell+1}{2\ell+3} f_{i+1}(v, z, t) \right] + \alpha \left[ \frac{\ell}{2\ell-1} v^{i-1} \cdot \frac{\partial}{\partial v} \right. \right. \\ \left. \left. \left( \frac{f_{i-1}(v, z, t)}{v^{i-1}} \right) + \frac{\ell+1}{2\ell+3} \cdot \frac{1}{v^{i+2}} \cdot \frac{\partial}{\partial v} (v^{i+2} f_{i+1}(v, z, t)) \right] \right] \\ = \sum_i P_i(\mu) \left[ N \int_{\Omega} f_i(v, z, t) v \sigma_{ei}(v, \omega) \{ P_i(\cos \omega) - 1 \} d\Omega \right. \\ \left. + \sum_j \left[ N \int_{\Omega} f_j(v', z, t) \frac{v^2}{v} \cdot \sigma_{ex}(v', \omega) P_i(\cos \omega) d\Omega \right. \right. \\ \left. \left. - N \int_{\Omega} f(v, z, t) v \sigma_{ex}(v, \omega) d\Omega \right] + \int_0^1 P(\epsilon, \Delta) \left[ \frac{N}{1-\Delta} \right. \right. \\ \left. \left. \int_{\Omega} f_i(v', z, t) \cdot \frac{v^2}{v} \alpha(v', \omega) P_i(\cos \omega) d\Omega + \frac{N}{\Delta} \int_{\Omega} f_i(v'', \right. \right. \\ \left. \left. z, t) \frac{v^2}{v} \alpha(v'', \omega) \times P_i(\cos \omega) d\Omega \right] d\Delta - N \int_{\Omega} f_i(v, z, \right. \\ \left. t) v \sigma_i(v, \omega) d\Omega - N \int_{\Omega} f_i(v, z, t) v \sigma_a(v, \omega) d\Omega \right] \quad (28) \end{aligned}$$

비교적 낮은 E/N영역에서는 전자의 열운동속도가 이동속도에 비하여 매우 크므로 속도분포함수를 等方的이라고 볼 수 있으므로

$$f(\bar{v}, z, t) = f_0(v, z, t) + \cos \theta f_1(v, z, t) \quad (29)$$

로 표현할 수 있다. 여기에서는  $\ell=0, 1$ 인 제 2항까지만을 고려하는 Lorentz近似에 대하여 고찰해 본다.

속도분포함수의 等方成分  $f_0$ 와 非等方成分  $f_1$ 은 식 (28)로부터

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f_0(v, z, t) + \frac{1}{3} v \cdot \frac{\partial}{\partial z} f_1(v, z, t) + \frac{1}{3} \alpha \cdot \frac{1}{v^2} \\ \frac{\partial}{\partial v} \left[ v^2 f_1(v, z, t) \right] = \frac{m}{M} \cdot \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial}{\partial v} \left[ N q_m(v) v' f_0 \right. \\ \left. (v, z, t) \right] + \sum_j \left[ f_0(v', z, t) \frac{v^2}{v} N q_{ex}(v') - f_0(v, z, t) \right. \\ \left. v N q_{ex}(v) \right] + \int_0^1 \left[ \frac{1}{1-\Delta} f_0(v', z, t) \cdot \frac{v^2}{v} q_i(v') \right. \\ \left. + \frac{1}{\Delta} f_0(v'', z, t) \cdot \frac{v^2}{v} N q_i(v'') \right] P(v, \Delta) d\Delta - f_0(v, z, t) \\ v N q_i(v) - f_0(v, z, t) v N q_a(v) \quad (30) \\ \frac{\partial}{\partial t} f_1(v, z, t) + v \frac{\partial}{\partial z} f_0(v, z, t) + \alpha v \frac{\partial}{\partial v} f_0(v, z, t) \end{aligned}$$

$$= -f(v, z, t) \left\{ Nq_m(v) + \sum_j Nq_{jx}(v) + Nq_i(v) + Nq_a(v) \right\} \quad (31)$$

여기서  $q_m(v)$ ,  $q'_{ex}(v)$ ,  $q_i$ ,  $q_a(v)$ 는 각각 탄성충돌의 運動量變換斷面積,  $j$ 準位로의 勵起斷面積, 電離斷面積, 附着斷面積을 나타내고 있으며 다음과 같다.

$$q_m(v) = \int_a \sigma_{el}(v, \omega) (1 - \cos \omega) d\Omega \quad (32-1)$$

$$q'_{ex}(v) = \int_a \sigma'_{ex}(v, \omega) d\Omega \quad (32-2)$$

$$q_i(v) = \int_a \sigma_i(v, \omega) d\Omega \quad (32-3)$$

$$q_a(v) = \int_a \sigma_a(v, \omega) d\Omega \quad (32-4)$$

이제부터는

$q_x(v) = q_m(v) + \sum_j q'_{ex}(v) + q_i(v) + q_a(v)$ 로 표현한다.

속도공간에서의 식 (30), (31)를 에너지空間에서의 취급을 위하여 電子密度的 保存性

$$n_e(z, t) = \int_v f(v, \bar{r}, t) d\bar{v} = \int_\epsilon F(\epsilon, \bar{r}, t) d\epsilon \quad (33)$$

을 적용하여  $f(v, z, t)$ 를  $F(\epsilon, z, t)$ 로의 변환을 취하면

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} F_0(\epsilon, z, t) \\ &= \sqrt{\frac{2}{m}} \cdot \frac{2m}{M} \cdot \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left\{ Nq_m(\epsilon) \epsilon \sqrt{\epsilon} F_0(\epsilon, z, t) \right. \\ &+ \left. \frac{eEM\epsilon}{6mNq_x(\epsilon)} \left[ eE \frac{\partial}{\partial E} \left( \frac{F_0(\epsilon, z, t)}{\sqrt{\epsilon}} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{F_0(\epsilon, z, t)}{\sqrt{\epsilon}} \right) \right] \right\} + \sqrt{\frac{2}{m}} \frac{\epsilon}{3Nq_x(\epsilon)} \left\{ eE \frac{\partial^2}{\partial \epsilon \partial z} \right. \\ &\left( \frac{F_0(\epsilon, z, t)}{\sqrt{\epsilon}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{F_0(\epsilon, z, t)}{\sqrt{\epsilon}} \right) \right\} + \sum_j \sqrt{\frac{2}{m}} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \\ &\int_\epsilon^{\epsilon+\epsilon_j} \sqrt{\epsilon} F_0(\epsilon, z, t) Nq'_{ex}(\epsilon) d\epsilon + \sqrt{\frac{2}{m}} \cdot \frac{\partial}{\partial \epsilon} \\ &\int_0^1 \left( \int_{\frac{1-\epsilon}{\Delta} + \epsilon}^{\frac{\epsilon}{\Delta} + \epsilon} \right) P(\epsilon, \Delta) \sqrt{\epsilon} F_0(\epsilon, z, t) Nq_i \\ &(\epsilon) d\epsilon d\Delta - \sqrt{\frac{2}{m}} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \int_0^\epsilon \sqrt{\epsilon} F_0(\epsilon, z, t) Nq_a(\epsilon) d\epsilon \end{aligned} \quad (34)$$

이 식 (34)이 에너지공간에서 표시한 기본적인 볼츠만방정식이다.

충돌시의 분자운동을 고려할 필요가 있는 낮은 E/N 영역에서는 식 (34)의 우변의 제 1항을

$$\sqrt{\frac{2}{m}} \frac{2m}{M} \cdot \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left\{ Nq_m(\epsilon) \epsilon \sqrt{\epsilon} F_0(\epsilon, z, t) + kTNq_m(\epsilon) \epsilon^2 \cdot \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left( \frac{F_0(\epsilon, z, t)}{\sqrt{\epsilon}} \right) \right\} \quad (35)$$

로 치환하면 간단화된다.\*

여기서  $k$ 는 볼츠만定數,  $T$ 는 氣體溫度  $\frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}MV_g^2$ 을 표시한다.

식 (34)는 에너지와 위치공간에 있어서의 연속의 방정식을 의미한다. 물리적인 의미를 알아보면 우변의 제 1항은 기체분자와의 탄성충돌에 의한 전자수의 增減, 제 2, 제 3항은 각각 移動流와 擴散流에 의한 에너지 공간에서의 전자수의 증감, 제 4, 제 5항은 위치공간에서의 이동류와 확산류에 의한 전자수의 증감, 제 6~8항은 여기, 진리, 부착의 각 비탄성충돌에 의한 전자수의 증감량을 나타내고 있다.

電子群의 에너지분포함수  $F_0(\epsilon, z, t)$ 와 群매개변수와의 관계를 명확하게 하기 위하여 식 (34)의 전체를  $(0 \sim \infty)$ 의 범위에서  $\epsilon$ 에 대하여 적분하고  $\lim_{\epsilon \rightarrow \infty} F_0(\epsilon, z, t) = 0$ 을 고려하면 전자수에 대한 연속의 방정식은

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} n_e(z, t) &= - \frac{\partial}{\partial t} \{ W(z, t) n_e(z, t) \} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ &D(z, t) n_e(z, t) + \nu_i(z, t) n_e(z, t) \\ &- \nu_a(z, t) n_e(z, t) \end{aligned} \quad (36)$$

이 얻어진다.

여기서 각 Parameter는

電子數 密度:  $n_e$

$$n_e(z, t) = \int_0^\infty F_0(\epsilon, z, t) d\epsilon \quad (37)$$

移動速度:  $W$

$$n_e W(z, t) = - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{m}} \cdot eE \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left( \frac{F_0(\epsilon, z, t)}{\sqrt{\epsilon}} \right) d\epsilon \quad (38)$$

擴散係數:  $D$

$$n_e D(z, t) = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{m}} \int_0^\infty \frac{1}{Nq_x(\epsilon)} \sqrt{\epsilon} F_0(\epsilon, z, t) d\epsilon \quad (39)$$

電離周波數:  $\nu_i$

$$n_e \nu_i(z, t) = \sqrt{\frac{2}{m}} \int_0^\infty \sqrt{\epsilon} F_0(\epsilon, z, t) Nq_i(\epsilon) d\epsilon \quad (40)$$

附着周波數:  $\nu_a$

$$n_e \nu_a(z, t) = \sqrt{\frac{2}{m}} \int_0^\infty \sqrt{\epsilon} F_0(\epsilon, z, t) Nq_a(\epsilon) d\epsilon \quad (41)$$

로 된다.

전자群의 평균에너지  $\bar{\epsilon}$ 는

$$\bar{\epsilon} = \int_0^\infty \epsilon F_0(\epsilon, z, t) d\epsilon \quad (42)$$

로 얻어진다.

따라서 각 Swarm Parameter는 基本方程式인 식 (34)의 해  $F_0(\epsilon, z, t)$ 를 식 (37)~(42)에 대입함에 의하여 구할 수 있다.

### 2.4 볼츠만方程式의 解法 [I]

볼츠만방정식의 직접해법으로부터  $F_0(\epsilon)$ ,  $F_1(\epsilon)$ 을

구하는 방법에 대하여 알아보자.

(1) Maxwell分布, Druyvesteyn分布<sup>1),2),5)</sup>

특정조건하에서 잘 성립하는 주요 분포에 대하여 알아보자. 定常狀態에서 균일한 전자수 밀도를 가지는系( $\frac{\partial F_0}{\partial t}=0, \frac{\partial F_0}{\partial z}=0$ )에 있어서 탄성충돌이 비탄성 충돌에 비하여 대단히 큰 경우에는 식(34), (35)에서

$$\frac{d}{d\epsilon} \left\{ Nq_m(\epsilon)\epsilon\sqrt{\epsilon} F_0(\epsilon) + kTNq_m(\epsilon)\epsilon^2 \frac{d}{d\epsilon} (F_0(\epsilon))^\dagger + \frac{M}{6m} \frac{(eE)^2 \epsilon}{Nq_m(\epsilon)} \cdot \frac{d}{d\epsilon} \left( \frac{F_0(\epsilon)}{\sqrt{\epsilon}} \right) \right\} = 0 \quad (43)$$

이 성립되므로,

$$F_0(\epsilon) = A\sqrt{\epsilon} \exp \left\{ - \int_0^\epsilon \frac{d\epsilon}{(eE)^2} + kT \right\} \quad (44)$$

가 얻어진다. A는 定數이다.

특히 外部電界E가 인가되어 있지 않고 熱平衡狀態인系에서는 Maxwell分布

$$F_M(\epsilon) = A\sqrt{\epsilon} \exp \left( - \frac{\epsilon}{kT} \right) = A\sqrt{\epsilon} \exp \left( - \frac{3}{2} \cdot \frac{\epsilon}{\epsilon} \right) \quad (45)$$

가 얻어지며,  $q_m(\epsilon)$ 을 일정하다고 보고 氣體溫度 T가 0인系에서는 Druyvesteyn分布

$$F_0(\epsilon) = A\sqrt{\epsilon} \exp \left\{ \frac{\Gamma \left( \frac{5}{4} \right)}{\Gamma \left( \frac{3}{4} \right)} \cdot \left( \frac{\epsilon}{\epsilon} \right)^2 \right\} \quad (46)$$

이 식(44)로 부터 얻어진다.

(2) 定常狀態(電子沙汰의 空間成長過程)<sup>9),12)</sup>

電子群의 정상상태에서의 거동은 식(34)의 좌변이 0이 된다.  $\epsilon, z$ 인變數를 갖는 포물선형 편미분방정식을 풀어  $F(\epsilon, z)$ 를 구한다.

定常 Townsend 실험에 의한 電子電流의 空間成長의 관측은

$$n_e(z) = n_0 \exp \{ (\alpha - \eta)z \} \quad (47)$$

$$\text{즉 } F_{0s}(\epsilon, z) = F_{0s}(\epsilon) \cdot \exp \{ (\alpha - \eta)z \} \quad (48)$$

이 성립되는 평형된 에너지영역에서 수행하는 것이 보편적이다. 따라서 이 경우에 대상으로 하는 방정식은 변수  $\epsilon$  만의 2階常微分方程式

$$a(\epsilon) \frac{d^2}{d\epsilon^2} F_{0s}(\epsilon) + b(\epsilon) \frac{d}{d\epsilon} F_{0s}(\epsilon) + C(\epsilon) F_{0s}(\epsilon) + d(\epsilon) = 0 \quad (49)$$

로 된다. 여기서

$$a(\epsilon) = \frac{(eE)^2}{3Nq_x(\epsilon)} \cdot \sqrt{\epsilon}$$

$$b(\epsilon) = \frac{2m}{M} Nq_m(\epsilon)\epsilon\sqrt{\epsilon} + \frac{(eE)^2}{3} \cdot \frac{d}{d\epsilon} \left( \frac{1}{Nq_x(\epsilon)} \right) \sqrt{\epsilon}$$

$$+ \frac{2}{3} \frac{eE\alpha}{Nq_x(\epsilon)} \sqrt{\epsilon}$$

$$c(\epsilon) = \frac{2m}{M} \cdot \frac{d}{d\epsilon} (Nq_m(\epsilon)\epsilon\sqrt{\epsilon}) - \frac{(eE)^2}{6} \cdot \frac{d}{d\epsilon} \left( \frac{\epsilon^{-1}}{Nq_x(\epsilon)} \right) + \frac{eE\alpha}{3} \cdot \frac{d}{d\epsilon} \left( \frac{\sqrt{\epsilon}}{Nq_x(\epsilon)} \right)$$

$$d(\epsilon) = \sum_j \frac{d}{d\epsilon} \int_0^{\epsilon+\epsilon_j} \sqrt{\epsilon} F_{0s}(\epsilon) Nq'_{ex}(\epsilon) d\epsilon + \frac{d}{d\epsilon} \int_0^1 \left[ \int_0^{\frac{\epsilon}{1-\Delta}} + \epsilon_i + \int_0^{\frac{\epsilon}{1-\Delta} + \epsilon_i} \right] \sqrt{\epsilon} F_{0s}(\epsilon) \cdot Nq_l(\epsilon) P(\epsilon \cdot \Delta) d\epsilon d\Delta \text{이다.}$$

또한 제 1 차비등방성분  $F_1(\epsilon)$ 은  $F_{0s}(\epsilon)$ 과의 사이에,

$$F_{1s}(\epsilon) = \frac{-1}{Nq_x(\epsilon)} \left\{ \left( \alpha - \frac{eE}{2\epsilon} \right) F_{0s}(\epsilon) + eE \frac{d}{d\epsilon} F_{0s}(\epsilon) \right\} \quad (50)$$

의 관계가 있다.

$F_{0s}$ 를 구하는데는 물리적으로 얻어지는 初期條件,  $\lim_{\epsilon \rightarrow \infty} F_{0s}(\epsilon) = 0$

$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\epsilon} F_{0s}(\epsilon) = 0$ 을 이용하여 충분히 큰  $\epsilon$  값에서 0까지에 걸쳐 Runge-kutta法이나 Gauss-Seidel法 등의 數值解析法을 이용하여 구하면 편리하고 쉽게 구하여진다.

또 Swarm Parameter  $W_s, D_s, \nu_{is}, \nu_{as}$ 는 이  $F_{0s}(\epsilon)$ 을 가진 식(37)~(42)의 적분에 의하여 구해진다.  $\alpha, \eta$ 는 위의 매개변수를 이용하여

$$\alpha = \frac{\nu_{is}}{\frac{W_s}{2} + \left[ \left( \frac{W_s}{2} \right)^2 - (\nu_i - \nu_a) D_s \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (51)$$

$$\eta = \frac{\nu_{as}}{\frac{W_s}{2} + \left[ \left( \frac{W_s}{2} \right)^2 - (\nu_i - \nu_a) D_s \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (52)$$

로 나타내진다.

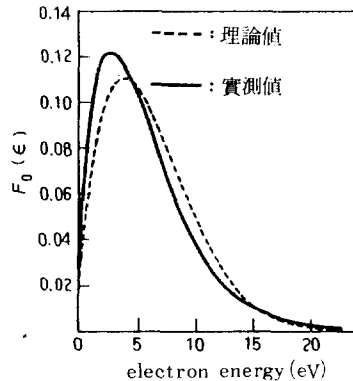


그림2. Ne中, E/N=462.5Td에서 電子의 에너지分布

이와 같은 방법으로 해석된 정상상태에 있어서의 전자에너지分佈의 예는 그림 2 와 같다.

(3) 電子沙汰의 時間成長過程<sup>4)</sup>

位置空間 전체에 걸쳐 전자밀도의 시간적 변화를 관측하는 방법인 펄스 Townsend 실험에 의한 電子群의 시간에 대한 성장의 관측은  $F_0(\epsilon, t)$ 가 시간적으로 충분히 완화된 후

$$n_e(t) = n_0 \exp[(\nu_i - \nu_a)t] \quad (53)$$

$$\text{즉, } F_0(\epsilon, t) = F_0(\epsilon) \cdot \exp[(\nu_i - \nu_a)t] \quad (54)$$

가 성립하는 평형된 에너지領域에서 행하여지는 것이 보통이다. 따라서 기본방정식 식(34)를

$$\frac{\partial}{\partial t} F_0(\epsilon, t) = (\nu_i - \nu_a) F_0(\epsilon, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} F_1(\epsilon, t) = (\nu_i - \nu_a) F_1(\epsilon, t)$$

및 우변의 제 3, 4, 5 항은  $z$ 에 대하여  $(-\infty, 0)$ 의 범위에서 적분하면 0가 되는 것을 이용하여 정리하면

$$\begin{aligned} (\nu_i - \nu_a) F_0(\epsilon) = & \sqrt{\frac{2}{m}} \frac{2m}{M} \cdot \frac{d}{d\epsilon} \left\{ Nq_m(\epsilon) \epsilon \sqrt{\epsilon} F_0(\epsilon) \right. \\ & + \frac{M}{6m} \frac{(eE)^2 \epsilon}{Nq_x(\epsilon) + \sqrt{\frac{m}{2\epsilon}} (\nu_i - \nu_a)} \cdot \frac{d}{d\epsilon} \\ & \left. \left( \frac{F_0(\epsilon)}{\sqrt{\epsilon}} \right) \right\} \sum_z \sqrt{\frac{2}{m}} \cdot \frac{d}{d\epsilon} \int_{\epsilon}^{\epsilon+\epsilon_z} \sqrt{\epsilon} F_0(\epsilon) \\ & Nq_{ex}(\epsilon) d\epsilon + \sqrt{\frac{2}{m}} \frac{d}{d\epsilon} \int_0^1 \left( \int_{\epsilon}^{\frac{\epsilon}{1-\Delta} + \epsilon} \right. \\ & \left. + \int_0^{\frac{\epsilon}{1-\Delta} + \epsilon} \right) P(\epsilon, \Delta) \sqrt{\epsilon} F_0(\epsilon) Nq_a(\epsilon) d\epsilon d\Delta \\ & - \sqrt{\frac{2}{m}} \cdot \frac{d}{d\epsilon} \int_0^{\epsilon} \sqrt{\epsilon} F_0(\epsilon) Nq_a(\epsilon) d\epsilon \quad (55) \end{aligned}$$

$$F_1(\epsilon) = \frac{\sqrt{\frac{2}{m}} eE\epsilon}{\sqrt{\frac{2\epsilon}{m}} Nq_x(\epsilon) + (\nu_i - \nu_a)} \cdot \frac{d}{d\epsilon} \left( \frac{F_0(\epsilon)}{\sqrt{\epsilon}} \right) \quad (56)$$

이 된다.

$F_0(\epsilon)$ 은  $\epsilon$ 만의 함수인 2階常微分方程式 식(55)를 Runge-kutta法이나 Gauss-Seidel法, Simpson法 등의 數值解析法으로 구하면 된다.

전자군 매개변수  $\nu_i, \nu_a, \bar{\epsilon}$ 는 각각 식(40), (41), (42)로부터 또  $W_v, D_v$ 는

$$\begin{aligned} n_e W_v(t) = & -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{m}} eE \int_0^{\infty} \frac{\epsilon}{Nq_x(\epsilon) + \sqrt{\frac{m\epsilon}{2}} (\nu_i - \nu_a)} \\ & \cdot \frac{d}{d\epsilon} \left( \frac{F_0(\epsilon)}{\sqrt{\epsilon}} \right) d\epsilon \quad (57) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_e D_v(t) = & \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{m}} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\epsilon}}{Nq_x(\epsilon) + \sqrt{\frac{m}{2\epsilon}} (\nu_i - \nu_a)} \\ & F_0(\epsilon) d\epsilon \quad (58) \end{aligned}$$

구 부터 구해진다.

$A_r$ 가스중에서의 계산결과는 그림 3 과 표 2 와 같다.

### 2.5 볼츠만方程式의 解法(II)<sup>10,12)</sup>

기본적인 볼츠만방정식(34)로 나타내져 있는 에너지분포함수  $F_0(\epsilon, z, t)$ 를 다시 Fourier 級數의 형으로 전개하고, 그 전개계수로 電子群의 각 매개변수를 표현하는 방법이 있다.

시간  $t=0$ , 위치  $z=0$ 에서  $\delta$ 함수적으로 주어진 전자군 펄스는 定常인 에너지分佈를 가지게 된다. 전자 주입점에서 충분히 멀리 떨어진 점에서의  $F_0(\epsilon, z, t)$ 는 Fourier의 적분형으로 쓰면

$$\begin{aligned} F_0(\epsilon, z, t) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_0(\epsilon, z, t; s) ds \\ F_0(\epsilon, z, t; s) = & e^{isx} \cdot e^{-\omega(s)t} H_0(\epsilon, s) \quad (59) \end{aligned}$$

로 된다.

여기에서  $s$ 는 푸리에성분을 나타내는 매개변수이고,  $\omega(s), H(\epsilon, s)$ 는

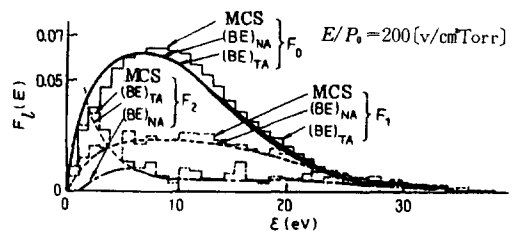


그림 3. PT법에 의한  $A_r$ 가스중에서의 전자에너지 분포함수의 珠函數展開成分  $F_l(\epsilon) (\ell=0, 1, 2)$

표 2.  $E/P_0=200 [V/cm \cdot Torr]$ 에서의 PT법에 의한 전자군 매개변수

	$\nu_i$ ( $\mu s^{-1}$ )	$\bar{\epsilon}$ (eV)	$W_v$ ( $cm \cdot \mu s^{-1}$ )	$D_v$ ( $cm^2 \cdot \mu s^{-1}$ )	$D_{v-}$ ( $cm^2 \cdot \mu s^{-1}$ )	$D_v$
MCS	187	11.4	39.0	1.70	2.02	1.54
(BE) NA	186	10.9	36.6	1.74	1.92	1.65
(BE) TA	184	10.9	36.7	1.73	—	—

$$\omega(s) = -\omega_0 + is\omega_1 - (is)^2\omega_2 + (is)^3\omega_3 + \dots \quad (60)$$

$$H_0(\epsilon, s) = F^0(\epsilon) + isF^1(\epsilon) + (is)^2F^2(\epsilon) + (is)^3F^3(\epsilon) + \dots \quad (61)$$

로 얻어진다.  $\omega_n(n=0, 1, 2, \dots)$ 는 定數이다. 식(59)를 기본식(34)에 대입하면 다음이 얻어진다.<sup>10)</sup>

$$\phi(\epsilon)H^0(\epsilon, s) + is\lambda(\epsilon)H_0(\epsilon, s) + (is)^2\xi(\epsilon)H_0(\epsilon, s) + s\omega H_0(\epsilon, s) = 0 \quad (62)$$

여기에서는 다음의 관계가 있다.

$$\begin{aligned} \phi(\epsilon)H_0(\epsilon, s) = & \left\{ \sqrt{\frac{2}{m}} \cdot \frac{2m}{M} \cdot \frac{d}{d\epsilon} (Nq_m(\epsilon)\epsilon\sqrt{\epsilon}) \right. \\ & \left. - \sqrt{\frac{2}{m}} \cdot \frac{(eE)^2}{6} \cdot \frac{d}{d\epsilon} \left( \frac{1}{\sqrt{\epsilon} Nq_x(\epsilon)} \right) \right\} H_0 \\ & + \left\{ \sqrt{\frac{2}{m}} \cdot \frac{2m}{M} \epsilon\sqrt{\epsilon} Nq_m(\epsilon) + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{m}} \right. \\ & \left. (eE)^2 \sqrt{\epsilon} \cdot \frac{d}{d\epsilon} \left( \frac{1}{Nq_x(\epsilon)} \right) \right\} \frac{\partial H_0}{\partial \epsilon} \\ & + \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{m}} (eE)^2 \frac{\sqrt{\epsilon}}{Nq_x(\epsilon)} \cdot \frac{\partial^2 H_0}{\partial \epsilon^2} \\ & + \sum_j \sqrt{\frac{2}{m}} \cdot \frac{\partial}{\partial \epsilon} \int_{\epsilon}^{\epsilon+\epsilon_j} \sqrt{\epsilon} Nq'_{ex}(\epsilon) H_0 d\epsilon \\ & + \int_0^1 \sqrt{\frac{2}{m}} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left( \int_{\epsilon}^{\epsilon-\Delta+\epsilon_i} + \int_0^{\Delta+\epsilon_i} \right) \cdot P(\epsilon, \Delta) \\ & \sqrt{\epsilon} Nq_i(\epsilon) H_0 d\epsilon \, d\Delta - \sqrt{\frac{2}{m}} \cdot \frac{\partial}{\partial \epsilon} \int_0^{\epsilon} \\ & \epsilon \sqrt{\epsilon} Nq_a(\epsilon) H_0 d\epsilon \quad (63) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda(\epsilon)H_0(\epsilon, s) = & \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{m}} eE \left\{ \sqrt{\epsilon} \frac{d}{d\epsilon} \left( \frac{1}{Nq_x(\epsilon)} \right) H_0 \right. \\ & \left. + 2 \frac{\sqrt{\epsilon}}{Nq_x(\epsilon)} \cdot \frac{\partial H_0}{\partial \epsilon} \right\} \quad (64) \end{aligned}$$

$$\xi(\epsilon)H_0(\epsilon, s) = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{m}} \frac{\sqrt{\epsilon}}{Nq_x(\epsilon)} H_0 \quad (65)$$

따라서 식(62)식에서 固有值  $\omega$ 를 가진 固有函數  $H_0$ 을 구하게 된다. 식(62)는 임의의  $s$ 에 대하여 성립하므로  $(is)^n$ 의 모든 계수는 0이 된다. 그리하여

$$\begin{aligned} \phi(\epsilon)F^0(\epsilon) - \omega_0 F^0(\epsilon) &= 0 \\ \phi(\epsilon)F^1(\epsilon) + \lambda(\epsilon)F^0(\epsilon) - \omega_0 F^1(\epsilon) + \omega_1 F^0(\epsilon) &= 0 \\ \phi(\epsilon)F^2(\epsilon) + \lambda(\epsilon)F^1(\epsilon) + \xi(\epsilon)F^0(\epsilon) - \omega_0 F^2(\epsilon) + \omega_1 F^1(\epsilon) - \omega_2 F^0(\epsilon) &= 0 \\ \phi(\epsilon)F^3(\epsilon) + \lambda(\epsilon)F^2(\epsilon) + \xi(\epsilon)F^1(\epsilon) - \omega_0 F^3(\epsilon) + \omega_1 F^2(\epsilon) - \omega_2 F^1(\epsilon) + \omega_3 F^0(\epsilon) &= 0 \quad (66) \end{aligned}$$

의 관계가 얻어진다.

이 식(66)의 각각을  $\epsilon$ 에 대하여  $(0 \sim \infty)$ 까지 적분하면 固有值  $\omega_n$ 과  $n$ 階의 에너지분포  $F^n(\epsilon)$ 의 관계가 구해지고

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2}{m}} \int_0^{\infty} \sqrt{\epsilon} N(q_i(\epsilon) - q_a(\epsilon)) F^0(\epsilon) d\epsilon \quad (67-1)$$

$$\begin{aligned} \omega_1 = & -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{m}} eE \int_0^{\infty} \frac{\epsilon}{Nq_x(\epsilon)} \frac{d}{d\epsilon} (\sqrt{\epsilon} F^0(\epsilon)) d\epsilon \\ & + (\omega_0 A_1 - \omega_1) \quad (67-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_2 = & \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{m}} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\epsilon}}{Nq_x(\epsilon)} F^0(\epsilon) d\epsilon + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{m}} eE \int_0^{\infty} \\ & \frac{\epsilon}{Nq_x(\epsilon)} \frac{d}{d\epsilon} (F^1(\epsilon)/\sqrt{\epsilon}) d\epsilon - (\omega_0 A_2 - \omega_1 A_1 - \omega_2) \quad (67-3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_3 = & -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{m}} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\epsilon}}{Nq_x(\epsilon)} F^1(\epsilon) d\epsilon - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{m}} eE \int_0^{\infty} \\ & \frac{\epsilon}{Nq_x(\epsilon)} \frac{d}{d\epsilon} (F^2(\epsilon)/\sqrt{\epsilon}) d\epsilon + (\omega_0 A_3 - \omega_1 A_2 - \omega_2 A_1 - \omega_3) \quad (67-4) \end{aligned}$$

로 된다. 여기에서

$$\omega_{0n} = \sqrt{\frac{2}{m}} \int_0^{\infty} \sqrt{\epsilon} Nq_i(\epsilon) F^n(\epsilon) d\epsilon \quad (67-5)$$

$$A_n = \int_0^{\infty} F^n(\epsilon) d\epsilon \quad (n=1, 2, 3) \quad (67-6)$$

결국  $F^n(\epsilon)(n=0, 1, 2, \dots)$ 은 식(66)의 각 상미분방정식을 위에서부터 순차적으로 풀어서 구해진다. 풀이할 때에 각 방정식은 未定の 固有值  $\omega_n$ 을 포함하고 있는 것과 物理的으로 얻어진 初期條件이

$$\lim_{\epsilon \rightarrow \infty} F^n(\epsilon) = 0,$$

$\lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \frac{d}{d\epsilon} F^n(\epsilon) = 0$ 인 것에 주의하여야 한다. 이에 대한 數值解析法으로서 2·4(2)에서 기술한 것과 같다.

$F^n(\epsilon)$ ,  $\omega_n(n=0, 1, 2, \dots)$ 가 결정되면 에너지분포함수  $F_0(\epsilon, z, t)$ 는 逆變換을 하여 식(59)에서

$$\begin{aligned} F_0(\epsilon, z, t) = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{is\alpha} \cdot \exp\{-\omega(\epsilon)t\} \cdot H_0(\epsilon, s) ds \\ = & \left\{ F^0(\epsilon) + F^1(\epsilon) \frac{\partial}{\partial z} + F^2(\epsilon) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + F^3(\epsilon) \frac{\partial^3}{\partial z^3} + \dots \right\} \cdot \exp\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \omega_k t \cdot \frac{\partial^k}{\partial z^k} \right\} \\ & \times e^{z\omega t} \phi(z, t) \quad (68) \end{aligned}$$

의 형으로 된다. 여기에서

$$\phi(z, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega_0 t}} \exp\left\{ -\frac{(z - \omega_1 t)^2}{4\omega_2 t} \right\} \quad (69)$$

(1) 定常狀態(電子沙汰의 空間成長過程)<sup>10)</sup>

정상상태의 에너지분포함수  $F_0(\epsilon, z)$ 는 식(68)에서

$$\begin{aligned} F_0(\epsilon, z) = & \int_0^{\infty} F_0(\epsilon, z, t) dt \\ = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{is z} \cdot e^{-\omega s t} H_0(\epsilon, s) ds dt \\ = & \left( \frac{\partial \omega(s)}{\partial (is)} \Big|_{s=\alpha} \right)^{-1} (F^0(\epsilon) + \alpha F^1(\epsilon) + \alpha^2 F^2(\epsilon) + \dots) \cdot e^{\alpha z} \quad (70) \end{aligned}$$



여기에서,  $F^0(\epsilon)$ ,  $F^1(\epsilon)$ ,  $F^2(\epsilon)$ , .....는 식 (66) 을 풀어서 구하고  $a$ 는 Townsend의 제 1 전리계수를 나타내는 다음식의 근이다.

$$\omega_0 - \omega_2 a + \omega_3 a^2 - \omega_3 a^3 + \dots = 0 \quad (71)$$

또 規格化된 에너지분포함수  $F_{0s}(\epsilon)$ 는

$$F_{0s}(\epsilon) = \frac{F^0(\epsilon) + aF^1(\epsilon) + a^2F^2(\epsilon) + a^3F^3(\epsilon) + \dots}{1 + aA_1 + a^2A_2 + a^3A_3 + \dots} \quad (72)$$

로 되며, 각 전자군 매개변수는 식 (38)~(41), (51), (52)에서 구한다.

다시 쓰면 다음과 같다.

$$n_e W_s = -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{m}} e E \int_0^\infty \frac{\epsilon}{N q_x(\epsilon)} \cdot \frac{d}{d\epsilon} (F_{0s}(\epsilon)/\sqrt{\epsilon}) d\epsilon \quad (73-1)$$

$$n_e D_s = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{m}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\epsilon}}{N q_x(\epsilon)} F_{0s}(\epsilon) d\epsilon \quad (73-2)$$

$$n_e \nu_{is} = \sqrt{\frac{2}{m}} \int_0^\infty \sqrt{\epsilon} N q_i(\epsilon) F_{0s}(\epsilon) d\epsilon \quad (73-3)$$

$$n_e \nu_{as} = \sqrt{\frac{2}{m}} \int_0^\infty \sqrt{\epsilon} N q_a(\epsilon) F_{0s}(\epsilon) d\epsilon \quad (73-4)$$

$$\alpha = \frac{\nu_{is}}{\frac{W_s}{2} + \left[ \left( \frac{W_s}{2} \right)^2 - (\nu_{is} - \nu_{as}) D_s \right]^{1/2}} \quad (73-5)$$

$$\eta = \frac{\nu_{ia}}{\frac{W_s}{2} + \left[ \left( \frac{W_s}{2} \right)^2 - (\nu_{is} - \nu_{as}) D_s \right]^{1/2}} \quad (73-6)$$

(2) 電子沙汰의 時間成長過程<sup>10)</sup>

펄스 Townsend실험에 있어서는 2.4(2)에서 기술한 것과 같이

$$\frac{\partial}{\partial t} F_i(\epsilon) = (\nu_i - \nu_a) F_i(\epsilon)$$

표 3. Ar중의 전자군 매개변수(기체분자밀도  $N=3.54 \times 10^{10} \text{cm}^{-3}$  ( $0^\circ\text{C}$ , 1 Torr))

	Parameter	E/N(Td)					
		85	141	212	283	424	566
PT or TOF	$R_i (\mu\text{s}^{-1})$	1.64	7.55	21.2	41.5	102	187
	$D_0 (\text{cm}^2 \mu\text{s}^{-1})$	1.93	1.87	1.84	1.83	1.85	1.92
	$\epsilon$ (eV)	6.68	7.32	7.97	8.57	9.75	11.0
	$W_v (\text{cm} \mu\text{s}^{-1})$	6.86	10.6	15.1	19.5	28.3	37.3
	$W_r (\text{cm} \mu\text{s}^{-1})$	7.34	12.0	17.9	23.9	36.5	50.5
	$D_L (\text{cm}^2 \mu\text{s}^{-1})$	1.01	1.06	1.14	1.24	1.49	1.87
	$D_T (\text{cm}^2 \mu\text{s}^{-1})$	1.91	1.85	1.82	1.81	1.86	1.99
	$D_3 (\text{cm}^3 \mu\text{s}^{-1})$	0.052	0.036	0.030	0.028	0.033	0.049
SST	$R_{is} (\mu\text{s}^{-1})$	1.53	6.67	17.8	33.8	78.2	137
	$\alpha$ ( $\text{cm}^{-1}$ )	0.231	0.669	1.29	1.92	3.16	4.30
	$\delta$ ( $\text{cm}^{-1}$ )	1.96	2.73	3.38	3.89	4.44	5.25
	$\bar{\epsilon}$ (eV)	6.61	7.16	7.72	8.22	9.20	10.2
	$W_s (\text{cm} \mu\text{s}^{-1})$	7.09	11.2	16.3	21.1	30.6	40.2
	$V_a (\text{cm} \mu\text{s}^{-1})$	6.80	9.97	13.8	17.6	24.7	31.9
	$D_s (\text{cm} \mu\text{s}^{-1})$	1.94	1.90	1.87	1.86	1.86	1.90

이 성립하고 있다. 만약

$$\sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{\epsilon} N q_x(\epsilon) \gg (\nu_i - \nu_a) \text{가 만족하는 경우에는 분포함수는 식 (62) 으로부터 해석될 것이다. 따라서 펄스 Townsend실험의 경우 에너지분포 } F_0(\epsilon, t) \text{는 식 (68) 를 써서}$$

$$F_0(\epsilon, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F_0(\epsilon, z, t) dz = F_0(\epsilon) e^{\omega_0 t} \quad (74)$$

로 구해진다. 여기에서  $F_0(\epsilon)$ 은 규격화된 에너지분포를,  $\omega_0 = \nu_i - \nu_a$ 는 實効電離周波數를 나타낸다. 移動速度, 擴散係數는

$$n_e W_0 = -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{m}} e E \int_0^\infty \frac{\epsilon}{N q_x(\epsilon)} \cdot \frac{d}{d\epsilon} (F_0(\epsilon)/\sqrt{\epsilon}) d\epsilon \quad (75-1)$$

$$n_e D_0 = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{m}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\epsilon}}{N q_x(\epsilon)} F_0(\epsilon) d\epsilon \quad (75-2)$$

(3) 飛行時間觀測<sup>10)</sup>

電子群의 飛行時間觀測 (Time of flight Experiment)에 있어서는 전자밀도가 위치  $z$ 와 시간  $t$ 의 함수로서 측정되어진다. 따라서 전자에너지분포함수  $F_0(\epsilon, z, t)$ 는 식 (66)을 풀어서 식 (68)과의 관계에서 구해진다. 동시에 전자군 매개변수도

$$W_r = \omega_1 = -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{m}} e E \int_0^\infty \frac{\epsilon}{N q_x(\epsilon)} \cdot \frac{d}{d\epsilon} (F^0(\epsilon)/\sqrt{\epsilon}) d\epsilon + \omega_0 A_1 - \omega_{01} \quad (76-1)$$

$$D_L = \omega_2 = D_0 + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{m}} e E \int_0^\infty \frac{1}{N q_x(\epsilon)} \cdot \frac{d}{d\epsilon} (F^1(\epsilon)/\sqrt{\epsilon}) d\epsilon - (\omega_0 A_2 - \omega_1 A_1 - \omega_{02}) \quad (76-2)$$

$$D_0 = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{m}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\epsilon}}{N q_x(\epsilon)} F^0(\epsilon) d\epsilon \quad (76-3)$$

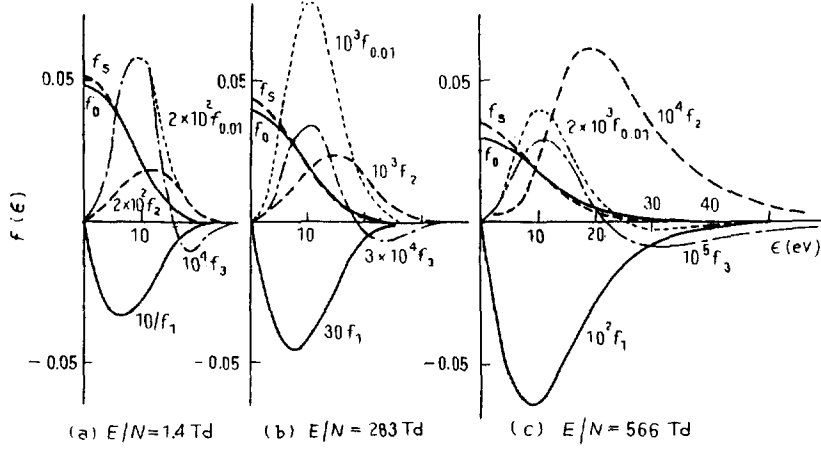


그림4. Ar 중의 電子에너지分布函數  $f(\epsilon) = F(\epsilon)/\sqrt{\epsilon}$

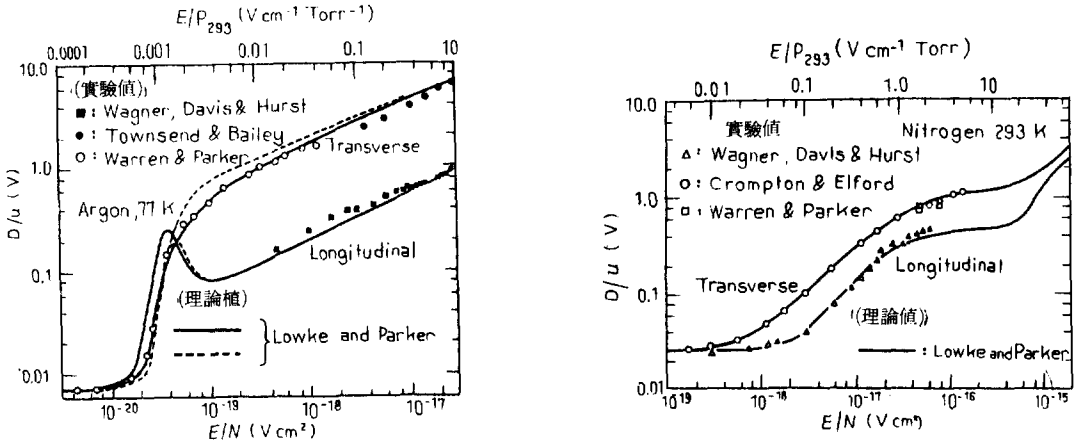
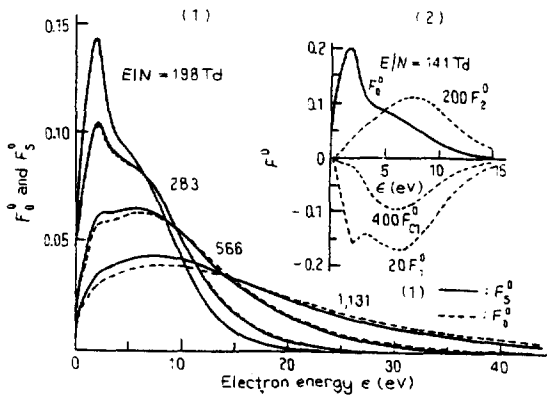
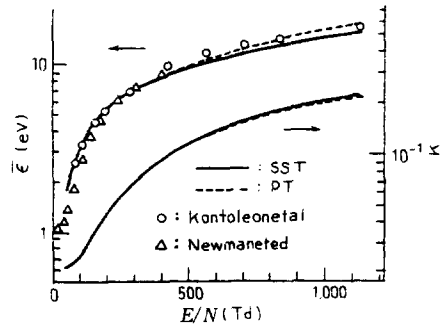


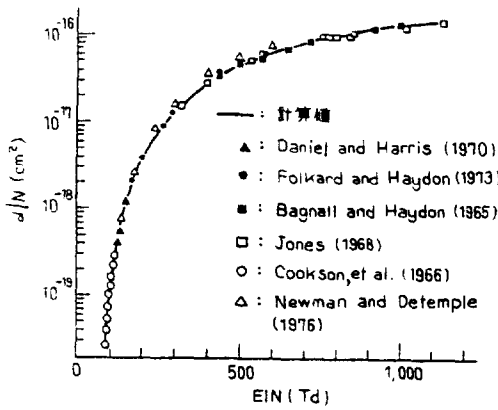
그림5. Ar 중의 縱, 橫擴散係數의 E/N特性



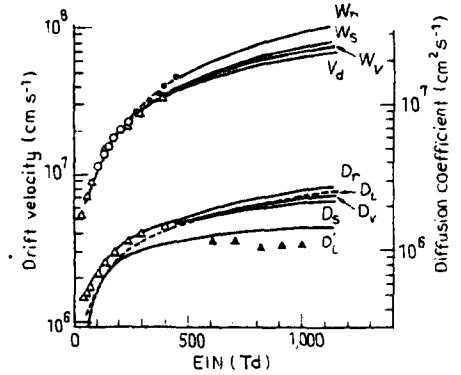
(a) 電子에너지分布函數



(b) 電子의 平均에너지와 損失係數

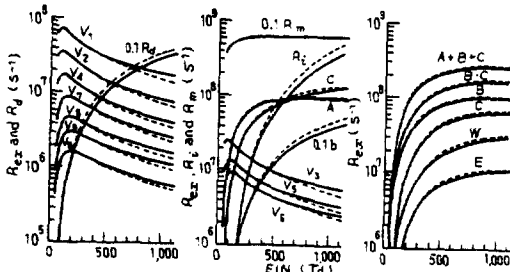


(c) 電離係數  $a/N$



● : Wagner and Raether (1962) ○ : Frommhold (1960)  
 ▲ : Schlumbohm (1965) △ : Newman and Detemple (1976)

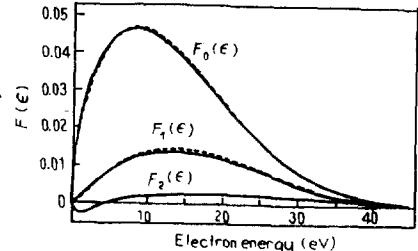
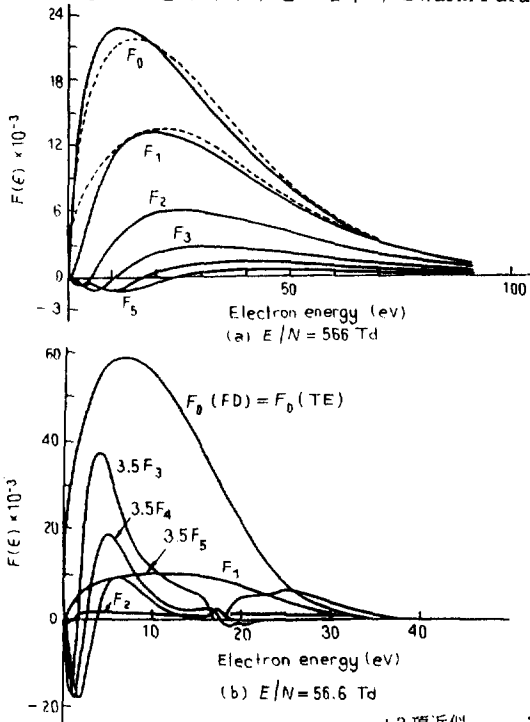
(d) 移動速度와 擴散係數



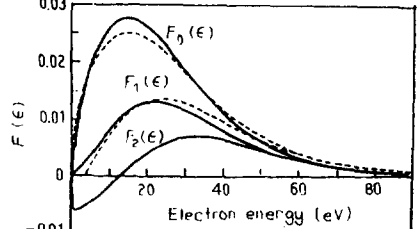
(e) 衝突周波數

$V_1 \sim V_{10}$  :  $V=1 \sim 10$ 에서의 振動動起周波數  
 $R_d$  : 解離周波數,  $R_i$  : 電離周波數  
 $R_m$  : 運動量變換衝突周波數  
 $A, B, C$  등은 각각  $A^+ \Sigma_i^+$ ,  $B^+ \Sigma_i^+$ ,  $C^+ \Sigma_i^+$  등의 動起周波數

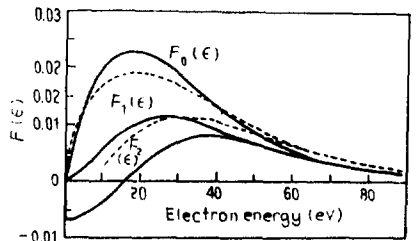
그림 6.  $N_2$  중의 전자에너지 분포함수와 Swarm Parameter



(a)  $E/N = 141.3$  Td



(b)  $E/N = 565.1$  Td



(c)  $E/N = 847.6$  Td

— : 3項近似, ..... : Lorentz(2項)近似

그림 7. Ne 중의 전자에너지분포

$$D_n = \omega_n \quad (n=3, 4, 5, \dots) \quad (76-4)$$

등도 결정된다. 영기에서  $D_L$ 는 從方向擴散係數(longitudinal diffusion coefficient)을,  $D_n$ 는  $n$ 次 輸送係數를 나타낸다. 또  $D_0$ 는 橫方向擴散係數  $D_T$  와 동일하다.

위와 같은 해석법에 의한  $A_r$  중의 電子群特性은 표 3 과 같으며, 동시에 구한 전자에너지분포는 그림 4 와 같다.<sup>10,12)</sup>

이러한 분석결과 縱擴散係數와 橫擴散係數는 일반적으로 서로 다름을 알 수 있으며, 그예는 그림 5 와 같다. 또한 그림 6 은  $N_2$  가스 중의 전자군 매개 변수를 2.5의 방법으로 측정된 결과를 여러가지의 형으로 나타내었다. 이상의 예에서와 같이 理論値와 測定値는 잘 일치함을 알 수 있다.

### 3 結 論

현재 電子群의 매개변수解析에 많이 이용되고 있는 방법과 이들의 實測을 하기 위한 실험방법으로는 몇 가지가 있다. 대체로 定常 Townsend 實驗, 펄스 Townsend 實驗, 飛行時間觀測實驗 등이 있으며, 本 考察에서는 이들을 중심적으로 취급하였다. 그러나 이들은 측정실험방법이 각각 다름에 따라 이론적 해석방법도 다르다. 또한 本 論文에서는 에너지분포를 2次近似 방법으로 해석한 것을 서술하고, 그 이상의 高次項까지 고려하여 해석한 결과와 비교한 예는 그림 7 과 같다. 이와 같이 기체방전현상의 이론적 해석이 실험치와 잘 일치되는 것으로 보아 氣體系의 절연설계나 특성 예측이 가능하기 때문에 공학적 응용이 기대되는 모델화도 이루어질 수가 있다. 氣體放電 Simulation 이 응용되어지고 있는分野는 이외에도 가장 현대적인 응용인 gas laser 의 해석, laser 照射에 의한 방전트리거機構의 해석, 코로나방전 특성 해석 및 Plasma display 의 機構의 해석 등 상당히 광범위하게 응용되어지고 있으므로 이에 대한 연구가 활성화되어야 하겠다.

### 參 考 文 獻

1) Blake. E. Cherrington, "Gaseous electronics

and gas lasers", (1979) Pergamon Press Ltd, Headington Hill Hall.

- 2) L.G.H.Huxley & R.W.Crompton, "The diffusion and drift of electrons in gases", (1974) John Wiley & Sons.
- 3) S.Chapman & T.G.Cowling, "The mathematical theory of non-uniform gases", 3rd Edn (1970). Cambridge Univ. Press.
- 4) T.Holstein, "Energy distributions of electrons in high frequency gas discharges", Phys. Rev. 70. 1946. pp. 367 ~ 384.
- 5) L.R.Megill and Cahn, J, "The calculation of electron distribution functions in the ionosphere", J.Geophys. Res. 69(1964). pp. 5041 ~ 5048.
- 6) W.P.Allis, "Motion of ions and electrons, handbook the physic 21", (1956). pp. 383 ~ 444.
- 7) R.H.Redder and S.C.Brown, "Energy distribution function of electrons in pure Helium ", Phys. Rev. 95. (1954). pp. 885 ~ 889.
- 8) 眞壁利明, 森 爲可, "Ar 低E/N 領域의 電子輸送," 放電研究資料集(ED-81-56). 1981. pp.31 ~ 39.
- 9) 眞壁利明, 森 爲可, "Boltzmann 方程式의 3項近似解析", 電氣學會 放電研究資料 ED-80-2, 1980. pp. 11 ~ 19.
- 10) T.Yoshizawa, Y. Sakai, H.Tagashira and S. Sakamoto, "Boltzmann equation analysis of the election swarm development in SF<sub>6</sub>." : J. Phys, D. Appl phys, vol. 12, (1979). pp. 1839 ~ 1852.
- 11) T.Makable and T.Mori, "Theoretical analysis of the election energy distribution functions in a weakly ionised gas under a relatively high E/N", J.Phys, D.Appl, Phys.(13). (1980). pp.387 ~ 396.
- 12) Toshiaki Makable and Tameyoshi Mori, "Experimental and theoretical analysis of the election energy distribution functions in Townsend discharges in Xenon", J. Phys, B. Atm. Molee, phys. No, 21. (1978.) pp.3785 ~ 3793.