—□ 技 術 講 座 □—

최근의 數値電界計算法(II)

朴 鍾 根
(서울大 工大 敎授)

■ 차 례 ■

3.2 實驗的 方法

3.2.1 實驗的 寫像法

단지 연필과 종이 그리고 지우개만 있으면 二次元 問題라도 풀 수가 있는 方法으로 과거에는 실제 문제에 適用해 電力機器들을 設計할 수있었다. RICH-ARDSON이 1907년에 처음으로 제창한 이래로 DYNAMO-ELECTRIC MACHLNERY와 변압기 設計에 특히 功献을 많이 해왔다. 그림 1-6이 1914년에 KULHMANN이 設計한 예이다.

教学的인 高度의 知識이 필요없고 간단해서 몇가지 規則과 要點을 파악하면 初步者라도 상당한 精確度(가령 5～10%)를 얻는 것은 과히 어렵지 않다.

이 방법은 이미 잘 알고 있는 다음과 같은 基礎事項들에 根據를 두고있다.

1) 도체의 境界面은 等重位面을 이룬다.

2) 전계의 세기 및 電系 밀도는 모든 등전위면과 직교한다.

3) 따라서, E및 D는 도체 경계면에 직각이고 접선성분은 0이며 E및 D線과 등전위면이 이루는 도도형은 曲線正方形(CURVILINER SQUARE)이 된다.

4) 전속 또는 유선은 전하로 부터 시작하거나 끝난다. 따라서 전하를 갖지않는 균일 유전체내에서는 도체 경계면에서 시작하거나 끝난다.

좀더 자세히 살펴보기 위해서 그림 1-7과 같은

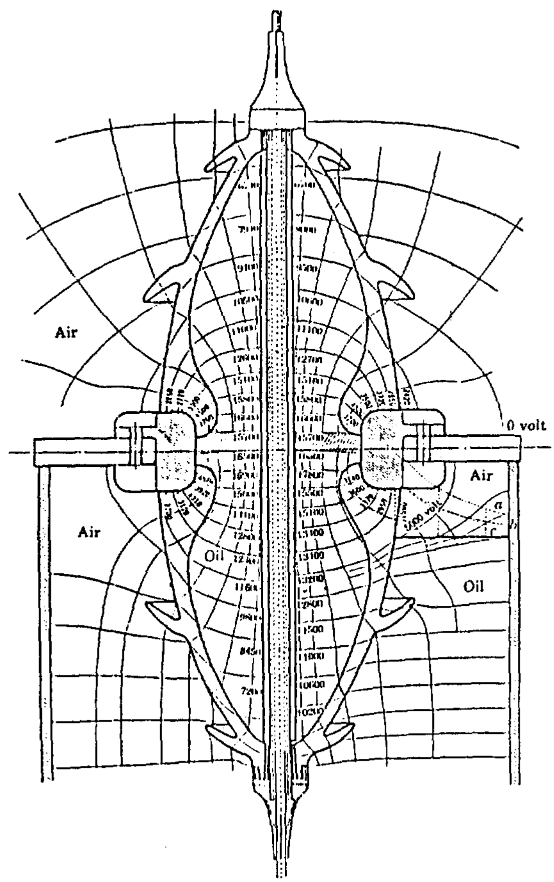

그림1-6. 변압기 BUSHLNG의 電位電界

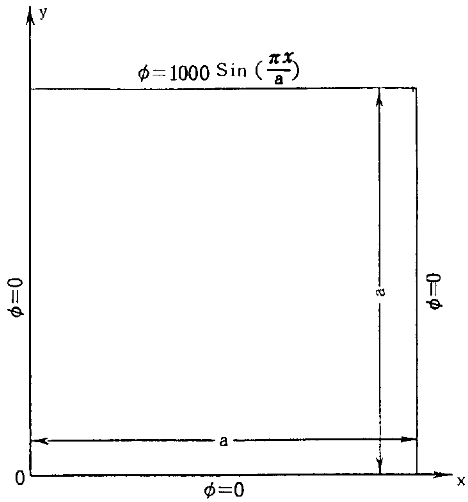

그림1—7. 電位分布의 예제

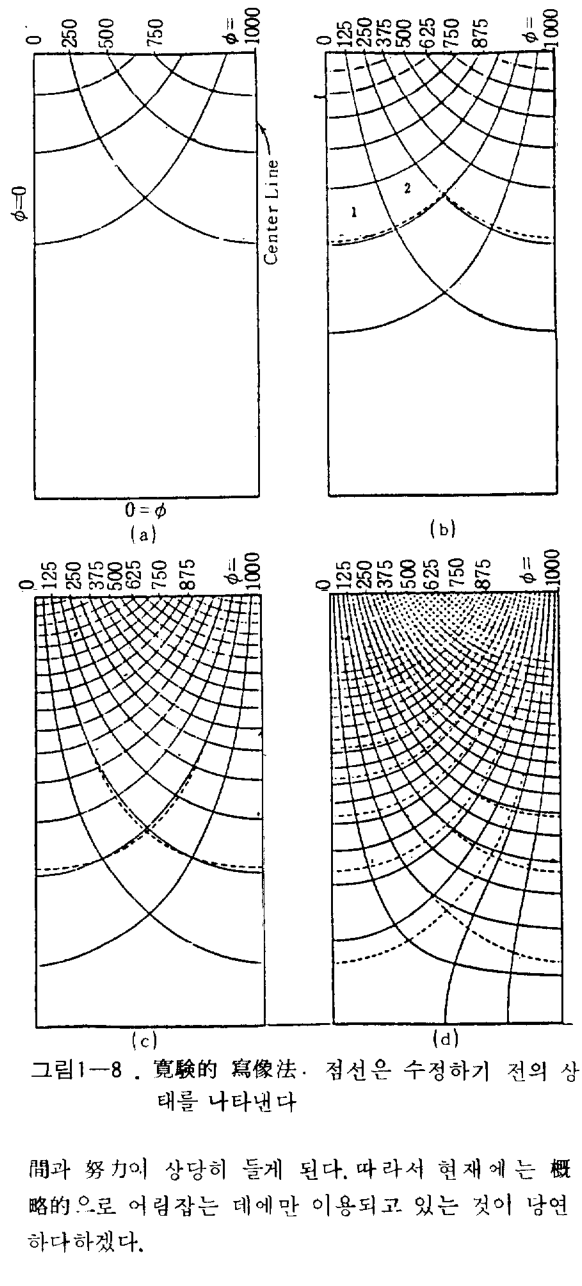

그림1—8 . 實驗的 寫像法· 점선은 수정하기 전의 상태를 나타낸다

예를 들어본다. 윗면의 POTENTLAL 이 다음식으로 주어지고 나머지 면들에서는 전부 0인 경우이다.

$$\phi = 100 \quad \sin \frac{\pi x}{a}$$

이 문제를 풀기 위해서 다음과 같은 순서대로 作圖를 하면 편리하게 구할 수 있다. 이해를 돕기 위해서 그 과정과 결과를 그림 1－8, 1－9에 나타내었다.

1) 우선 몇개의 선을 개략적으로 그릴 계획을 세운다.

2) 주어진 전극간 電位差값을 적당한 수로 등분한다. (가령 4 또는 8 等分)

3) 먼저 電界를 가장 잘 알고 있는 영역, 예를 들어 電界 分布가 가장 균일한 영역에서 등전위선을 그리고, 그 다음 최선을 다해 電位 分布를 추정 하여 기타 영역에서의 등전위선을 그린다.

4) 다음에 등전위선들과 직교하는 전계선들을 그린다. 이때, 이 두가지 선들에 의해서 曲線正方形이 만들어 지도록 해야한다. 그려나감에 따라 점차 양변의 비를 1로 취하기가 어려워져도 直交性만은 최대한 유지해야 한다.

5) 양변의 길이가 부정당하게 된 영역을 잘 살펴보고 최초의 등전위선 추정이 잘못된 점을 수정하고 다시 寫像圖를 그린다.

6) 전 영역이 적절하게 곡선정방형으로 나누어 질 때까지 위 과정을 반복한다.

그러나, 정밀도를 높이려면 훨씬 작게 잘라야 하고 경우에 따라서는 더이상 細分할 수 없는 경우도 생기며 또한 많은 經驗이 많은 숙련자라하더라도 時間과 努力이 상당히 들게 된다. 따라서 현재에는 概略的으로 어림잡는 데에만 이용되고 있는 것이 당연하다하겠다.

3.2.2 實驗的 方法

LAPLACE 방정식을 풀 수 있는 또 하나의 方法으로 実験 装置를 만들어서 實驗的으로 구하는 方法이 있다. 그림 1—10과 같은 간단한 예를 들어보면 電氣的 導電性을 利用해서 朱錫箔 (tinfoil)위의 電位를 측정하면 등전위선을 그릴 수가 있다. 즉, probe를 朱錫箔에 대고 GALVANOMETER G가 O이 되는 점을 찾아 나가면 自動的으로 등전위선이 그려지게 되고 R_1 ／R_2 의 비를 바꾸게 되면 또다

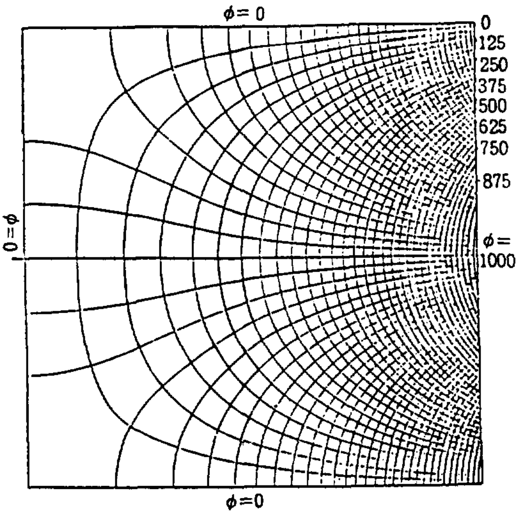

그림1—9. 예제의 결과

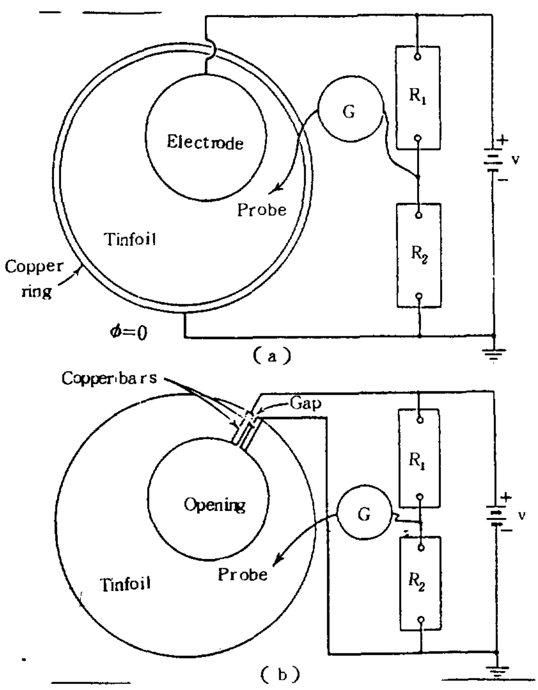

그림1—10. a) 電位 측정기구 b) 電界 측정기구

른 등전위선을 찾아 낼 수가 있다.

유선 (FLUX LINE) 은 곡선정방형 (CURVI-LNFAR SQUARE) 방법으로 손으로 그릴 수도 있고 그림 1 - 10 b) 와 같은 實験 装置로 구할 수도 있다.

실제로는 전극 형상을 쉽게 바꿀 수 있는 그림 1 - 11과 같은 電解槽 (ELECTROLYTIC TAN

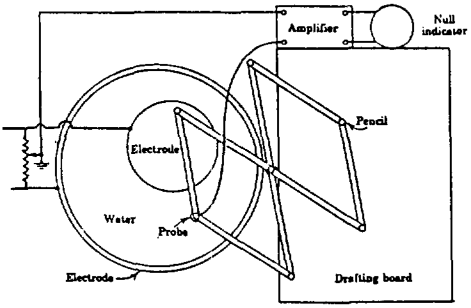

그림1—11. 전해조

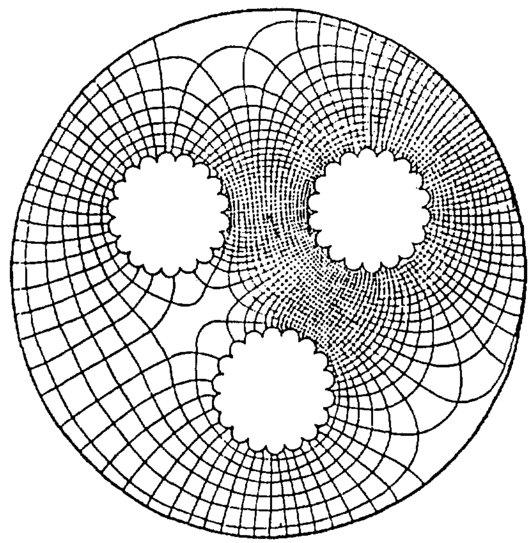

그림1—12. 3상 cable의 電立 電界

K) 방식을 많이 쓴다.

그림 1 - 12는 이런 전해조로 1919년에 구한 3상 CABLE의 電界 分布이다.

이 밖에도 RUBBFR SHEET를 利用한 方法이 있다. 이러한 實験的 方法은 解析的 方法에 비해서 汎用的이기 때문에 数値 電界 計算法이 발달하기 전에 전력기기의 絶縁 設計등에 많이 利用되었고 현재에도 일부 활용되고 있다. 그러나, 충분한 精密度를 얻을 수 없다는 것이 제일 큰 단점이고 측정시에도 세심한 주의가 필요하기 때문에 거의 数値法으로 바뀌어간 느낌이 든다.

3.3 數値電界計算法

電位 電界는 연속적으로 변하는 것이 보통이다. 이 연속적인 양을 離散化, 有限化시켜 計算機로 解를 求하는 것이 数値 電界 計算法이다. 여기에는 차분법, 유한요소법, 전하중첩법, 표면전하법, MONTE CARLO법등이 있다. 이들 각각은 다음

장부터 독립적으로 살펴보기로 하고 여기서는 각 방법의 특징을 비교해 본다.

数值 電界 計算法은 電界를 離散化하여 분할할 때 有限化하는 양, 場의 방정식, 電界를 求하는 法, 오차등이 영역을 분할하는 경우와 경계를 분할하는 경우가 根本的으로 다르다. 따라서, 領域分割法, 境界分割法 두가지로 大別할 수 있다.

領域分割法은 領域을 유한개로 분할하여 분할점의 電位를 미지수로 하는 方法이고 차분법과 유한요소법이 여기에 속한다. 境界分割法은 제 1종 FRED-HOLM적분방정식을 직접 数値的으로 푸는 것으로, 境界를 유한개로 분할하여 모의한 電荷에서 나오는 電位의 重疊으로 式을 구성해서 전하밀도의 양을 미지수로 하는 方法이다. 이 方法들을 비교하면 다음과 같다.

1) 境界와 領域을 分割하는 차이가 있기 때문에 境界分割法에서는 領域分割法에 비해 분할수가 한차원 정도 적다. 따라서, 방정식의 수도 한차원 적다. 境界分割法의 연립일차방정식은 직접법으로도 解를 구할 수 있지만 領域分割法의 계수 행렬은 대규모가 되고 SPARSE행렬 (요소에 O이 많은 행렬)이 되기 때문에 특별한 解法이 필요하다.

2) 전계 계산 문제는 電位보다 電界에 더 중점을 두기 때문에 領域分割法으로 電界를 구할 때는 수치미분이 필요해 오차가 커지는 문제가 생긴다.

3) 領域의 境界가 무한원까지 달할 경우에는 境界分割法에서는 電荷의 작용이 無限遠에서 O이 되기 때문에 경계 조건을 자동적으로 만족시킬 수 있다. 그러나, 領域分割法에서는 적당한 곳에서 가상의 境界를 설정해야만 하기 때문에 오차가 증대되는 문제가 발생한다.

4) 境界分割法으로 해를 구할 때는 수치적분이 필요하고 특히 境界 부근의 해를 계산할 때는 特異 적분이 되고, 3차원 문제에서의 수치면적분은 解法이 없는 경우도 있어 방법상 어려움이 존재한다.

有限要素法은 数值 計算 分野에서 최초의 萬能 계산법으로 구조해석뿐만이 아니라 온갖 場의 解析, 편미분 방정식의 解法등에 위력적으로 많은 공헌을 해 왔다. 그러나, 電界 計算 分野에서 보면 전계 문제가 구조 문제나 열 문제와는 달리 일반적으로 高精密度를 요구하기 때문에 有限要素法이 電界 計算에서도 汎用的으로 적용되어진다고 볼 수는 없다. 電荷重疊法과 境界分割法은 COMPUTER의 한정된 용량과 계산 시간을 기준해서 볼때 통상은 수치 미분으로 오차가 발생하는 有限要素法보다 미지수의 갯수가 한차원 적으며, 선형문제, OPEN BOUNDARY 문제에 적합하다는 면에서 같지만 GREEN 함수의 중첩법인 電荷重疊法은 境界分割法과 비교해서는 다음과 같은 장점이 있다.

1) 원리가 간단하여 PROGRAM이 쉽다.

표1. 計算上의 特徵

	領 域 分 割 法		境 界 分 割 法	
	差 分 法	有限要素法	電荷重疊法	表面電荷法
計 算 原 理	全體場을 분할하고 各 格子點의 電位를 테일러 展開하여 라프라스 方程式을 푼다.	전체장을 有限個의 要素로 분할하고 에너지最小原理를 利用하여 등가적으로 라프라스 방정식을 푼다.	電極内 또는 誘電體内에 배치한 가상전하에 의하여 誘起되는 電位를 중첩하여 경계조건을 만족하게 푼다.	電極 또는 誘電體面上에 배치한 表面電荷에 의해서 誘起되는 電位를 중첩하여 경계 조건을 만족하게 푼다.
未 知 数	全體場의 格子點電位	全體場 要素各節點 電位	가상 電 荷 量	表面電荷密度
未知数의 数	数 100 ~ 数 1000		数 10 ~ 数 100	
係数 Matrix	대부분이 項이 0		비대칭이며 대부분의 項이 0이 아니다.	
解의 方程式 *1	(P) × (ϕ) = (B)		(P) × (ϕ) = (Q)	
方程式의 解法	直接法, 元素数가 많을때는 反復法		直 接 法	
電界強度의 計算	電位을 数直微分	電位近似함수의 微分	電荷量 및 電界係数에 의한 解析的 方法	電位의 数直微分 혹은 電荷에 의한 計算
Programing	용 이	복 잡	용 이	電荷上의 特異點을 피해야 하므로 복잡
計算精度 *2	낮 다	낮 다	높 다	보 통
計算時間 *3	格子點에 거의 비례	節點数에 거의 비례	(電荷数)$^{2\sim3}$에 거의비례	(電荷数)$^{1.5\sim2}$에 거의비례
汎 用 化	自動入力必要	自動入力必要	電荷배치에 약간의 경험	용 이
等 電 位 線	이미 全體場을 計算했기 때문에 용이		용 이	용 이

표 2. 利用場의 特徴

부분장 및 open boundary	부적합 (가상境界에 의한 처리 가능)	부적합 (左 同)	적 합 (電位가 無限遠에서 자동적으로 0이됨)	적 합 (左 同)
다매질장	적용可能하지만 形状에 따라 부적합	적 합	적 합	적 합
境界形状이 복잡한 場	부적합 (경계처리가 복잡)	적 합	電荷数가 計算機에서 제한 되기 때문에 부적합	적 합
空間電荷場	부적합	적 합	부적합	부적합
非均質혹은 非線形場	부적합	적 합	부적합	부적합
3次元計算	可能하지만 복잡	可能하지만 복잡	적 합	적 합
表面抵抗이 있는 場 혹은 直流・交流場	부적합	적 합	부적합	부적합

＊1 : (P):係数 Matrix, (ϕ) : 電位 vector, (B) : 定数 vector, (Q) : 電界量 vector

＊2 : 이용격자수, 전하수등에 따르기 때문에 일률적으로 말할수 없지만, 아주 一般的으로 말함

＊3 : ＊2와 같고, 反復法인 경우 수치해석 誤差에도 依存한다.

2) 수치적분이 불필요한 계산시간이 짧다.

3) 境界가 매끄러울 경우 精確度가 높다.

4) 誤差 評価가 쉽다.

計算 精密度가 높다고 하는 것은 역으로 볼 때, 精密度를 낮추면 보다 짧은 時間内에 解를 計算해 낼 수 있다는 것이기 때문에 工學的으로 단지 場을 解析하는 경우에 만이 아니라, 형상최적화 문제, 하전입자가 있는 場의 SIMULATION 등에서와 같이 반복계산이 필요한 문제등에는 計算時間이 짧고 오차평가가 용이하고 원리가 간단한 電荷重畳法이 아주 적합하게 적용될 수가 있다는 것을 의미한다. 電荷重畳法은 解析性이 강하기 때문에 等角寫像과 잘 組合이 되고 또, 有限要素法 境界分割法과도 쉽게 조합된다.

또한, 有限要素法 境界分割法 電荷重畳法은 필요한 数値的 方法과 COMPUTER 에의 의존 정도에 따라서 각각 數値解法 半解析的解法이라고 특징지워 구분해 볼 수 있다.

이상에서 살펴본 바와 같이 LAPLACE 場이나 중조화방정식, HELMHOLTZ 방정식, 확산방정식등의 풀이에는 電荷重畳法 表面電荷法등이 유리하고 기타의 경우에는 有限要素法이 적합하리라 생각된다. 이들 각 方法들의 특징을 표1과 표2에 정리했다.

参 考 文 獻

1) W.H. HAYT: Engineering Electromagnetics. McGRAW-HILL, New York, 1974.

2) J.D. JACKSON: Classical Electro-dynamics. John Wiley & So ns, New York, 1975.

3) P.M. MORSE, H.FESHBACH: Method of Theoretical Physics. McGRAW-HILL, New York, 1953.

4) G.ARFKEN: Mathematical Methods For Physicists. Academic Press, New York, 1970.

5) W.KAPLAN: Advanced Calculus. Addison-Wesley, Massachusetts, 1984.

6) E.C.ZACHMANOGLOU, D.W. THOE: Introduction to Partial Differential Equations with Applications. The Williams & Wilkins Compony, Baltimore, 1976.

7) 田春生 : 放電・高電壓工學. 東明社, 서울, 1980.

8) 大木正路 : 高電壓工學. 槇書店, 東京, 1980

9) P.Moon, D.E.SPENCER: Field Theory for Engineers. D.Van Nostrand Compony, New Jersey, 1961.

10) H.PRINRTZ: Hochspannungsfelder. Oldenbourg, München-Wien, 1969.

11) 河野照哉, 宅間 : 数値電界計算法. コロナ社, 東京, 1980.

12) 村島定行 : 代用電荷法とその應用. 森北出版株式會社, 東京, 1983.

13) 우형주 : 신제 전기자기학, 문운당, 서울, 1982