

# 최근의 數值電界計算法( I )

朴 鍾 根  
(서울大 工大 教授)

■ 차 례 ■

- 1. 序 論
- 2. 電界 計算의 기초
- 3. 電界 計算의 방법과 특징
  - 3.1 解析의 방법
    - 3.1.1 Coulomb의 법칙과 Gauss 정리에 의한 방법
    - 3.1.2 影像法
    - 3.1.3 等角寫像法
    - 3.1.4 座標變換法
    - 3.1.5 解析의 방법의 의미

## 1 서 론

電界計算技術은 絶緣破壞 및 放電開始, 進展機構等과 밀접한 관계가 있기 때문에 옛부터 널리 研究되어 왔으나, 그 基本인 Laplace方程式을 푸는 데는 여러가지 制約이 있기 때문에 1782年 Laplace方程式이 처음 발표된 이래 最近까지 汎用的인 電界計算技術은 없었다. 그러나, 그후 약 200年이 경과한 오늘날에 와서 大型電子計算機의 등장으로 數值電界計算法이 발달하여 구체적이고도 실제적인 전계계산이 가능하게 되었다. 이런 시점에서 종래의 解析의인 전계계산법을 돌이켜 보고 數值電界計算技術의 現況을 살펴보는 것이 本稿의 主旨이다. 高電壓 電界計算의 溫故知新이랄까?

古典的 電磁氣學에서의 前계계산은 偏微分方程式을 變數分離하여 푸는 解法이 正統的인 것으로 써 오랫동안 主流를 이루면서 數學的으로도 研究되어 왔다. 二次元 前계계산 문제에 대해서는 複素函數論을 도입한 等角寫像法이 창안되어 여러종류의 電極形狀에 대한 해석적인 電界計算이 가능하게 되었다. 또한 影像法은 해석적 電界計算方法

의 補助的인 도구로 쓰여 본래의 문제를 簡略化하는데 이용되어 왔다. 이러한 고전적 해법은 그 자체적으로도 유효하게 쓰여지고 있지만, 그 한계도 분명하여서 해석적으로 풀리는 문제와 풀리지 않는 문제가 당초부터 명백하게 구분되어 진다.

그러나, Computer의 등장으로 이러한 “해의 풀림”이라는 개념 자체가 변천되었다. 즉, Computer의 활용을 전제로 하여 고전적 방법을 다시 돌이켜 보자는 동향이 일어났고, 이에 의해서 몇 개의 유력한 계산 방법이 개발되어 실용적인 應用期에 접어들었다고 해도 過言이 아니다.

위와 같은 과정을 거쳐서 수치 전계 계산법은 실제적인 문제 해결의 새 수단으로 발돋움 하였으며 이제는 고전압 기기의 절연설계, 방전현상의 해석, 靜電誘導量의 예측, 集塵器의 해석 및 설계 등에 없어서는 안될 도구가 되었다. 특히 최근 絶緣媒體로 널리 利用되고 있는 SF<sub>6</sub> Gas는 전계 의존도가 공기등의 기체보다 훨씬 높기 때문에, SF<sub>6</sub> Gas를 이용한 기기의 설계 및 해석에는 반드시 전계계산을 해야 한다. 최근에 와서는 수치 전계계산 기술의 발달로 전극 형상을 절연 설계의 관점에서 최적으로 하는 자동화 프로그램까지 개발되고 있다. 바야흐로 전계 계산기술은 CAD

(Computer Aided Design) 및 CAM(Computer Aided Manufacture)의 시대에 접어들었다고 가히 말할 수 있겠다.

2 電界 計算의 기초

자연을 관찰해보면 많은 물리적 현상들이 공간과 시간에 어떤 관련성이 있다는 것을 알 수가 있다. 이런 많은 물리적인 현상들은 다음과 같이 공간과 시간에 대한 偏微分方程式으로 표현되고, 이것들은 대략 다음과 같이 분류할 수 있다.

i) Laplace 방정식 :

$$\nabla^2 \phi = 0 \tag{1.1}$$

ii) Poisson 방정식 :

$$\nabla^2 \phi = -\rho / \epsilon \tag{1.2}$$

iii) 확산 방정식 :

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{h^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \tag{1.3}$$

iv) 파동 방정식 :

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \tag{1.4}$$

단,  $\phi$ 는 일반적인 분포함수,  $\rho$ 는 Source 전하,  $\epsilon$ 는 유전율,  $h$ 는 상수,  $c$ 는 광속 그리고  $t$ 는 시간을 나타낸다.

式(1.1)로 表現되는 Laplace 방정식은 정전계, 정자계, 열의 흐름 및 비압축성 유체들에 있어서의 자연 현상을 표현하는 식이다. 고전압에서 취급되는 場은 대개 정전계이므로 이 방정식에 대해서 좀더 살펴본다.

우선 Gauss 법칙을 微分形으로 표현하면

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \tag{1.5}$$

이다. 여기서  $\mathbf{D}$ 는 電束密度이고, 임의의 媒質場에서 式(1.6)과 같이 定義된다.

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \tag{1.6}$$

여기서  $\mathbf{E}$ 는 전계이고,  $\epsilon$ 는 媒質場의 誘電率이다. 또한, 전위와 전계와의 관계는 式(1.7)로 나타내진다.

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi \tag{1.7}$$

여기서 “-” 부호는 전계 Vector  $\mathbf{E}$ 의 방향이 전위  $\phi$ 가 감소하는 쪽이라는 것을 의미한다.

式(1.5), (1.6), (1.7)으로 부터

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = -\nabla \cdot (\epsilon \nabla \phi) = \rho$$

가 유도된다. 따라서  $\epsilon$ 이 균일한 매질에서는

$$\nabla \cdot \nabla \phi = -\rho / \epsilon \tag{1.8}$$

가 된다.

式(1.8)이 Poisson 방정식이다. 만약 場內에 眞電荷가 없다면, 경계면상에 전계의 원천이 되는 表面電荷등이 존재한다고 하여도  $\rho = 0$  이 되므로

$$\nabla^2 \phi = 0 \tag{1.9}$$

이 된다. 이 式이 Laplace 방정식이라고 부르는 것이다.

직각좌표계에서 Laplace 방정식은

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \tag{1.10}$$

이 된다.

이 Laplace 방정식은 모든 경우를 포괄적으로 표시하고 있다. 즉, 전극이나 도체의 형태에 관계없이 電荷密度가 0인 모든 점에서  $\nabla^2 \phi = 0$ 인 관계가 성립되기 때문에 電界分布가 다르고, 電位나 電位の 변화율이 다른 경우에도 적용된다.

따라서, 이 식만 가지고는 특정 전계분포를 구할 수 없고, 어떤 다른 정보가 필요하다는 것이 분명하다. 이 추가 정보가 바로 경계에 대한 조건들이며, 이것이 합쳐져야 비로소 전계계산 문제가 형성되는 것이다. 또한, 경계 조건은 경계에서의 형태에 따라서 다음과 같이 분류된다.

i) Dirichlet 경계 조건 :  $\phi = f$

ii) Neuman 경계 조건 :  $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$

iii) 혼합 경계 조건 :  $\frac{\partial \phi}{\partial n} + \sigma \phi = f$

여기서,  $\partial / \partial n$ 은 경계에서 바깥으로 나가는 수직 미분 演算을 나타내며,  $f$ 와  $\sigma$ 는 주어진 함수이다.

Laplace 방정식을 사용하여 문제들을 취급하기 앞서서 지적해 두어야 할 것은, 주어진 경계 조건과 Laplace 방정식을 만족시키는 해를 구할 수 있다면, 이것이 유일한 해가 된다는 점이다. 즉, 구해진 해는 푸는 방법에 따라 표현식은 달라질 수 있으나 그 해 자체는 同一解이기 때문에 각종의 解法을 고안해 낼 수 있다는 것이다.

3 電界 計算의 방법과 특징

電界 計算法은 예로부터 발달해온 해석적 방법, 실험적 방법 그리고, 최근 발달하기 시작한 數值

의 方法等 크게 세가지로 나누어 볼 수 있다.

### 3.1 解析的 方法

#### 3.1.1 Coulomb의 법칙과 Gauss 정리에 의한 방법

프랑스 육군의 기술자였던 Charles Coulomb은 17세기에 비틀림 저울을 사용한 一連의 정밀한 실험을 통해서 靜電荷를 갖는 두 물체 사이에 작용하는 힘을 定量的으로 구하는 데 성공하였다. 다음이 바로 그 유명한 Coulomb의 법칙이다.

$$F = k \frac{Q_1 Q_2}{R^2} \quad (1 \cdot 11)$$

여기서,  $Q_1, Q_2$ 는 전하량,  $R$ 은 물체 사이의 거리 그리고  $k$ 는 비례 상수를 나타낸다.

전계는 단위 전하당 작용하는 힘으로 식(1·12)와 같이 정의된다.

$$\mathbf{E} = \lim_{\Delta Q \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta Q} \quad (1 \cdot 12)$$

두식 (1·11), (1·12)로 부터 點電荷, 線電荷, 板電荷에 의한 전계를 간단히 구할 수 있다. 이와 같은 電界式들은 後述하는 電荷重疊法 및 表面電荷法에서 유효하게 사용된다.

또한 Faraday는 19세기에 실험을 통해서, “어떤 閉曲面을 통과하는 電束은 이 곡면내에 존재하는 전체 전하량과 같다”라는 사실을 발견하였고, 이것을 Gauss가 수학적으로 다음과 같이 표시했다.

$$\mathbf{Q} = \oint_s \mathbf{D} \, d\mathbf{S} \quad (1 \cdot 13)$$

여기에서  $\mathbf{D}$ 는 (1·6)과 같이 定義된다.

式(1·13) 및 (1·6)으로 부터 점대칭의 배치, 이를테면 동심구, 동축원통등의 전계 계산이 간단히 된다. 이것들에 대한 실제 계산은 기본적인 電磁氣學 책에 잘 나오는 事項이므로 여기서는 생략하였다.

이 두 Coulomb 및 Gauss 법칙은 아주 중요한 법칙들로서 전기 공학에서 試金石이 될 만 하지만, 이것들으로써 구할 수 있는 전계는 극히 한정되어서 실제 문제에 적용하기는 어렵다.

#### 3.1.2 影像法

3.1.1節에서 기술한 것 보다 다소 계산할 수 있는 범위를 확장시킨 방법이다. 원리를 간단히 말해보면 고찰하고자 하는 場内部에 존재하는 電荷分布는 그대로 두고, 그 이외의 도체 또는 유

전체내의 전하 분포를 계산에 편리하게, 실제와는 전혀 다른 상태지만 경계 조건들은 만족할 수 있게 模擬하고, 그 모의된 전하들으로써 관심있는 장의 전계를 해석하는 것이다.

다음과 같이 도체 평면  $OO'$ 에 오른쪽으로  $a$  떨어진  $P$ 점에 點電荷  $Q$ 가 있는 간단한 예를 살펴 본다.

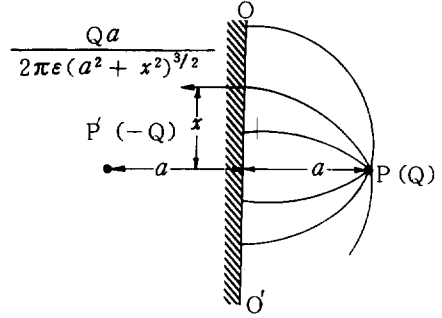


그림 1-1. 도체평면과 점전하

관심있는 장은 도체 평면 오른쪽이고, 이 오른쪽 場은 점 $P$ 를 제외하면 Laplace 방정식을 만족시킨다. 또 다음의 2가지 경계 조건을 고려해야 한다.

- 1)  $OO'$  오른쪽에 존재하는 전하는 점전하  $Q$  뿐이다.
- 2)  $OO'$ 는 等電位面이고 따라서 전계는 면에 수직이다.

이제, 점 $P$ 의 면 $OO'$ 에 대한 影像  $P'$ 에  $-Q$ 의 전하를 模擬해 놓고 도체면도 없다고 가정하고 위 문제를 살펴보자.

두 전하의 작용에 의해 우선 전계는 Laplace 방정식을 만족하고 경계 조건 1)을 만족하는 것이 분명하다. 다음에  $OO'$ 면 위에 있는 점에서의 전계 분포를 살펴보면 두 點電荷는 대칭적으로 배치되어 있기 때문에  $OO'$ 면에 틀림없이 수직이다. 따라서, 2)의 경계 조건도 만족한다. 즉,  $OO'$ 면 오른쪽 영역은 이 두 전하에 의한 전계와 일치할 것이다.

다시 말하면, Laplace 방정식과 경계조건을 만족시키므로 도체 대신에 점  $P_1$ 에  $-Q$ 의 영향을 취함으로써 오른쪽 半空間에서의 전계 분포가 구해진다는 것이다.

물론, 이 경우 왼쪽 반공간이 어떤 상태에 있는가는 생각하지 않는다. 실제로 전부 도체일 수도 있고 유전체가 있어 어떤 전하 분포를 가질 수도 있다. 그러나, 경계 이외에는 오른쪽 半空間하고

아무런 관련이 없기 때문에 고려할 필요가 없다.

導體面上的 전계는 Coulomb의 법칙으로부터 두 점전하의 작용으로 간단히 다음과 같이 구해진다.

$$E = E_p + E_p' = \frac{Qa}{2\pi\epsilon(a^2 + x^2)^{3/2}} \quad (1.14)$$

影像法の 원리는 후에 電荷重疊法の 실마리가 되서 수치 전계 계산법에도 아직 그 형태가 살아남아 있다고 볼 수 있다. 자세한 내용은 電荷重疊法에서 다시 설명하기로 하겠다.

### 3.1.3 等角寫像法

二次元場의 경우에는 等角寫像性을 이용하면 비교적 여러종류의 전극 형상에 대해 해석적으로 전계 분포를 구할 수 있다. 그러나, 해석 함수 발견이 어려워 실제로 이용되고 있는 형상은 그다지 많지 않다. 여기서는 원리를 간단히 설명하고 等角寫像法을 이용하면 그 설명이 간단한 Rogowski 전극의 설계 개념에 대해서 살펴보기로 한다.

이차원에서 Laplace 방정식은 다음과 같이 변형된다.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (1.15)$$

여기서

$$w = u + jv, \quad z = x + jy \quad (1.16)$$

의 두 복소수를 생각하고, 이들간에

$$w = f(z) \quad (1.17)$$

의 해석 함수 관계가 있다고 하면 다음과 같은 Cauchy-Riemann의 미분 방정식이 성립한다

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.18)$$

이 식을 미분하면

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \quad (1.19)$$

이 되고

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0 \quad (1.20)$$

이 된다. 마찬가지로

$$\begin{aligned} \nabla^2 v &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \\ &= -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \end{aligned} \quad (1.21)$$

이 된다.

式(1.20), (1.21)에서 알 수 있듯이 Cauchy-Riemann의 미분 방정식은 Laplace 방정식을 만족한다.

또한, 式(1.18)로부터

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.22)$$

인 관계가 얻어지므로  $u = \text{const.}$ 인 曲線群과  $v = \text{const.}$ 인 曲線群이 直交한다는 것도 알 수 있다. 즉,  $u$ 와  $v$ 를 어느 하나는 전위, 어느 하나는 전계로 생각할 수가 있어 전계 계산에 적용할 수가 있다.

이제,  $w$ 와  $z$ 간에  $w = f(z)$ 의 해석 함수 관계가 있는 경우를 보면, 等角寫像의 성질에 의해서  $z$ -평면상의 두 선간의 각은 그에 대응한  $w$ -평면상의 두 선간의 각과 같게 된다. 따라서,  $u = \text{const.}$  및  $v = \text{const.}$ 는  $w$ -평면에서 각각 직교좌표축에 평행한 직선군이므로  $z$ -평면에 寫像된  $x = \text{const.}$  및  $y = \text{const.}$ 도 相互 直交하므로 바로 等電位面과 電氣力線으로 생각할 수가 있다.

平行板 電極의 예를 들어 살펴보자.

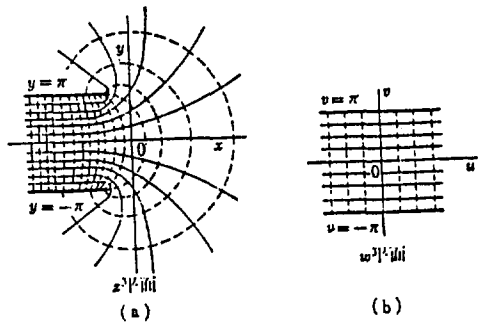


그림 1-2. 平行평판 전극 끝부분의 전계 등각사상

$$w = f(z) \text{인 해석 함수로서} \quad z = w + e^w \quad (1.23)$$

인 관계를 생각한다.

式(1.16)과 式(1.23)으로부터

$$x + jy = u + jv + e^u (\cos v + j \sin v)$$

$$=u+e^u \cos v + j(v+e^u \sin v)$$

이므로

$$x = u + e^u \cos v \quad (1 \cdot 24)$$

$$y = v + e^u \sin v$$

이 된다.

이 관계를 살펴 보면,  $v = 0$  일 때  $y = 0$ ,  $x = u + e^u$  이므로  $w$ -평면의  $u$ 축은  $z$ -평면상의  $x$ 축으로 대응된다. 또,  $v = \pm \pi$  이면  $y = \pm \pi$ ,  $x = u - e^u$  이 된다. 이 경우는 두가지로 나누어 생각해야 한다.

$u$ 의 범위	$x$ 의 범위
$(-\infty, 0]$	$(-\infty, -1]$
$[0, \infty)$	$[-1, -\infty)$

즉, 그림 1-2 b)의  $v = \pm \pi$ 는 그림 1-2 a)의  $y = \pm \pi$  (단,  $-\infty < x \leq -1$ )로 대응됨을 알 수 있다. 바꾸어 말하면  $w$ -평면위에서의 無限平行板 전극은  $z$ -평면에서 半無限한 전극으로 투영된다. 따라서,  $z$ -평면에서 電極端部の 전위 전계는  $w$ -평면에서 平等電界로써 쉽게 구한 다음 식(1·23)을 이용하여 간단히 구할 수 있다.

위와 같이 寫像에 적합한 해석 함수가 찾아지면 전계를 구하는 것이 손쉽다. 그렇기 때문에 等角寫像法에서는 이러한 解析 函數를 찾아내는 것이 중요하다. 그러나, 임의의 형상을 어떤 간단한 형상으로 寫像시키는 해석 함수를 찾아내는 일반적인 방법은 없기 때문에 실제 응용에는 자연히 그 한계가 있기 마련이다.

다시 이 평행 평판간의 전계 분포를 살펴보자 무한히 넓은 平行平板 電極이면 間隙내의 전계가 평등 하겠지만 실제의 전극은 유한하기 때문에 그림 1-2에서 보는 바와 같이 先端部에 전계 집중을 일으킨다. 평행판 전극의 목적은 평등 전계를 얻는데 있는데 전극을 무한히 넓게 하지 않는 이상 電極端部에서의 전계 강화는 피할 수 없기 때문에 여기에서 평행판 전극의 端部 電界를 완화시키는 방법을 생각해 보기로 한다.

그림 1-3의 별표(\*)한 등전위면을 따라 電界變化를 보면 전극 내부에서 최대가 되고 외부로 가면서 감소되는 것을 알 수 있다. 바로 이 등전위면을 따라서 전극을 만들면 先端部의 전계 세기가 중앙부보다 작아 이 곳에서 부분 방전이 일어나지 않고 中央平等 電界部分에서 방전이 일어난다.

이러한 원리에서 설계된 전극이 평등전계 연구 및 시험에 쓰이는 Rogowski 전극이다. 그렇지만 이 형상은 二次元 전계식에서 유도한 것이고 실제 형상은 三次元이라 오차가 존재하고 실제 제작도 어려워져서 일반적으로는 그림 1-4와 같은 근사 Rogowski 전극을 많이 사용한다.

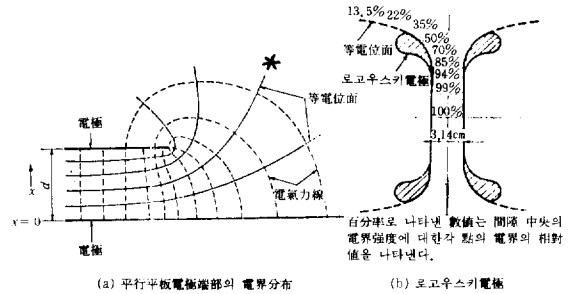
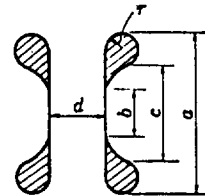


그림 1-3. 평행평판전극간의 전계분포와 로고우스키전극



$a = 4.3 d_m, b = 2.5 d_m$   
 $c = 3 d_m, r = 0.5 d_m$   
 $d_m$ 은 間隙 길이  $d$ 의 最大値

그림 1-4. 근사 로고우스키 전극

그러나, SF<sub>6</sub> Gas 中에서 실험을 해 보면 Rogowski 電極端部에서 방전이 일어난다. 이는 전극을 이차원으로 설계하였기 때문이다. Rogowski 전극의 실제 형상인 회전대칭장으로 다시 數值計算을 해 살펴보면 二次元에서 계산한 것과는 달리 端部에서의 電界強度가 중심부 보다 약 20% 정도 높다. SF<sub>6</sub> Gas는 다른 기체와는 달리 負性氣體로 전계에 매우 민감하기 때문에 단부에서 Flashover 현상이 생긴다. 이와 같은 문제에 대해 Harrison은 그림 1-5와 같은 전극 형상을 제안했다. 2V<sub>0</sub>와 V<sub>0</sub>의 전위를 갖는 두 원판에 의한  $V = V_0$ 의 等電位面을 따라 설계한 것으로 실제 그림에서의 P點의 電界強度는 중심부보다 약 15% 정도 작다.

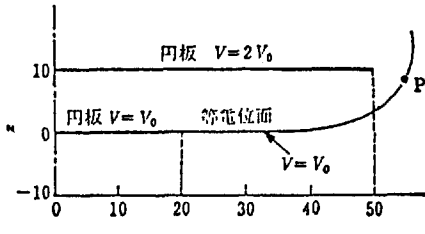


그림 1-5. Harrison이 제안한 전극 형상

3.1.4 座標變換法

偏微分方程式을 직접 푸는 것보다 常微分方程式을 푸는 것이 더 용이하기 때문에 변수 분리가 가능하면 편미분방정식을 常微分方程式으로 변환시켜서 해를 구할 수 있다.

여기서 적절히 파라미터를 선정하면 비교적 광범위한 해석이 가능해서 실제 電極形狀의 近似로 전계나 靜電容量등을 어렵잡는데 유용히 적용되어왔던 방법이다.

그런데, 해를 구하는 데는 많은 수학적 지식이 필요하기 때문에 여기서는 생략하였다. 자세한 내용에 관해서는 Moon & Spencer의 'Field Theory for Engineers'를 참조하기 바란다.

3.1.5 解析的 方法의 의미

3.1.1-3.1.4에서 설명한 바와 같이 古典的인 전계 계산법에는 다채로운 수학적 수법들이 응용되어 발전해 왔다. 그러나, 실제적인 복잡한 형상들이나 도체와 유전체 또는 저항체등이 있는 장에서의 전계를 구하고자 하면 해석적 방법으로는 거의 불가능하기 때문에 수치 계산 방법을 도입하지 않으면 안된다. 뿐만아니라, 해석적 해가 있다하더라도 복잡한 함수의 무한급수꼴로 나타나면 오히려 數值計算이 더 용이하고 정확한 해가 얻어지기도 한다.

그러나, 해석적 전계 계산법은 다음과 같은 관점에서 그 의미가 평가되어진다.

1) 數值電界 計算方法의 정밀도 및 近似程度 評價의 기준이 된다.

2) 電荷重疊法의 電位 및 電界 係數式에 형태가 남아 있다.

3) 影像電荷가 電荷重疊法 및 表面電荷法등에서 이용되고 있다.

참고문헌

- 1) W.H. Hayt : Engineering Electromagnetics. McGraw-Hill, New York, 1974.
- 2) J.D. Jackson : Classical Electrodynamics. John Wiley & Sons, New York, 1975.
- 3) P.M. Morse, H. Feshbach : Method of Theoretical Physics. McGraw-Hill, New York, 1953.
- 4) G. Arfken : Mathematical Methods of Physicists. Academic Press, New York, 1970.
- 5) W. Kaplan : Advanced Calculus. Adison-Wesley, Massachusetts, 1984.
- 6) E.C. Zachmanoglou, D.W. Thoe : Introduction to Partial Differential Equations with Applications. The Williams & Wilkins Company, Baltimore, 1976.
- 7) 田春生 : 放電·高電壓工學, 東明社, 서울, 1980.
- 8) 大木正路 : 高電壓工學. 槓書店, 東京, 1980.
- 9) P. Moon, D.E. Spencer : Field Theory for Engineers. D. van Nostrand Company, New Jersey, 1961.
- 10) H. Printz : Hochspannungsfelder. Oldenbourg, München-Wien, 1969.
- 11) 河野照哉, 宅間 : 數值電界計算法. 코로나社, 東京, 1980.
- 12) 村嶋定行 : 代用電荷法과 그 應用. 森北出版株式會社, 東京, 1983.