

# 開 領 域 磁 場 問 題 解 析

鄭 炫 教  
(江原大 工大 助教授)

## ■ 차 례 ■

- 1. 서 론
- 2. 기본 이론
- 3. 계산 사례
- 4. 맺는 말  
참고문헌

### ① 서 론

유한요소법은 폐 경계 (Closed Boundary)를 갖는 여러 분야의 공학문제를 해석하는데 있어서 어떤 수치해석법보다도 강력한 수법이라는 것이 알려져 있다. 전기공학에서도 전자기장 해석에 이 방법이 많이 이용되어져 왔으며 그 결과도 만족스러웠다. 그러나 리니어기계 (Linear Machine), 공심기계 (Air-cored machine) 에 대한 자장해석 문제<sup>1)</sup> 및 누설자속 해석문제<sup>2)</sup> 등 계산영역이 무한 영역인 개 영역 자장문제에 대해서는 기존 유한요소법만을 적용시킬 때 두 가지의 문제점이 발생한다. 첫째는 Homogeneous Dirichlet 경계조건을 갖는 임의의 경계를 자계의 세기를 무시할 수 있다고 여겨지는 어떤 위치에 설정하여야만 하는데, 이 경우 계산영역의 기하학적 Truncation 으로 인한 오차를 예측하는 것이 문제에 따라 어렵다는 것이다. 둘째는 이와 같은 오차를 줄이기 위해서는 이러한 경계설정을 자계원으로 부터 아주 먼 곳에 행하여만 하는데 이 경우에는 전자계산기의 기억용량이 커야만 하고 계산 시간도 길어 진다. 이러한 문제점들은 2차원 문제로 풀 수 있는 큰 시스템에 대해서도 매우 어려울 것이지만 특히 3차원 문제에 대해서는 아주 심각한 것이다.

방법을 발표한 바 있어 소개하고자 한다.<sup>3)</sup> 이 방법들에서는 우선 전체 계산영역을 두 영역, 즉 유한요소영역 (Finite Element Region) 과 무한요소영역 (Infinite Element Region) 으로 나누게 된다. 전자는 기존 유한요소법이 적용되는 곳으로서 비선형 매질 및 자계원 등을 포함하며 후자는 자기벡터포텐셜 함수가 Laplace 방정식을 만족시키는 영역으로 일반적인 해를 표시하는 고유함수 (Eigenfunction) 들을 사용하는 무한영역이다. 이와 같이 두 영역으로 나누어짐으로써 에너지 범함수 (Energy Functional) 는 원래의 계산영역이 갖는 경계조건 이외에 두 영역 사이의 공유경계에서 생기는 공유경계조건 (Interfacial Boundary Condition) 들을 수반하여야만 한다.

본고에서는 Modified Variational Method 에 의한 범함수, Cdlocation Method 에 의한 범함수 및 Localized 범함수를 소개한다.

### ② 기본 이론

#### 1) 기본식 유도

전체 계산영역을 그림 1 과 같이 두 영역으로 나눈다. 유한요소영역  $R_1$  및 무한요소영역  $R_2$ , 그리고  $S$ 는 공유경계이다.

2 차원 문제에서의 각 영역의 자기벡터포텐셜  $A_1, A_2$  에 대한 편미분방정식은  
영역  $R_1$  에서,  $\nabla \cdot (k_1 \nabla A_1) = f$ , (1)

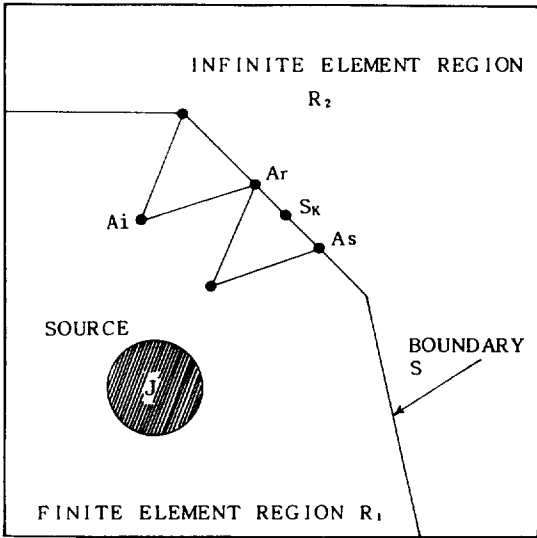


그림 1. 계산 영역 분할; 유한요소영역 R<sub>1</sub>, 무한요소영역 R<sub>2</sub>, 공유경계 S

영역 R<sub>2</sub>에서,  $\nabla \cdot (k_2 \nabla A_2) = 0$ , (2)로 나타난다. 여기서 k는 매질상수이고 f는 구동항으로서 자계원에 의한것이다.

두 영역사이의 공유경계 상에서의 경계 조건은 다음과 같다.

$$A_1 = A_2, \quad (3)$$

$$\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial A_1}{\partial n} = - \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A_2}{\partial n}. \quad (4)$$

여기서  $\mu_1$ 과  $\mu_2$ 는 각 영역의 투자율이다. 식(3)은 포텐셜 연속조건이고 식(4)는 자계의 세기의 법선방향 연속조건을 나타낸다. 따라서 식(4)에 대한 수직벡터(Normal Vector)의 방향은 각각 영역으로부터 바깥쪽으로 취해진다.

식(1)과 (2)로 나타나는 자장문제는 변분이론을 도입하여 식(5)와 같은 에너지범함수가 최소값을 갖는 문제로 해석되어 질 수 있다.

$$\pi = \int_{R_1} \left[ \frac{1}{2} k_1 (\nabla A_1)^2 - f A_1 \right] da + \int_{R_2} \frac{1}{2} k_2 (\nabla A_2)^2 da \quad (5)$$

영역 R<sub>1</sub>은 기존 유한요소법을 적용하기 위하여 다시 소영역, 즉 요소(Element)들로 나눈다. 요소 내에서의 포텐셜 함수는 보간함수(Shape Function) N<sub>i</sub>(x, y)와 정점값 A<sub>i</sub>들로서 근사화 하면

$$A_1 \cong \sum_{i=1}^n N_i(x, y) A_i \quad (6)$$

로 표시할 수 있다.

영역 R<sub>2</sub>에서는 포텐셜 함수를 유한 갯수의 고유

함수(Eigenfunction) U<sub>j</sub>들로써 표시한다. 즉,

$$A_2 \cong \sum_{j=1}^m C_j U_j(x, y) \quad (7)$$

여기서 C<sub>j</sub>는 전개상수이다.

식(6)과 (7)을 식(5)에 대입하면

$$\pi = \int_{R_1} \left\{ \frac{1}{2} k_1 \left( \sum_{i=1}^n d N_i(x, y) A_i \right)^2 - f \sum_{i=1}^n N_i(x, y) A_i \right\} da + \int_{R_2} \frac{1}{2} k_2 \left( \sum_{j=1}^m C_j d U_j(x, y) \right)^2 da \quad (8)$$

와 같은 식을 얻을 수 있다.

### 2) Collocation Method에 의한 해석

편미분방정식 (1)과 (2)로 표시된 문제는 식(3)과 (4)로 주어지는 경계조건을 만족시키면서 식(8)을 최소로 하는 A<sub>i</sub>와 C<sub>j</sub>를 구하는 문제로 귀착됨으로써 먼저 C<sub>j</sub>를 Collocation Method<sup>9)</sup>를 이용하여 유한요소영역의 정점값들로써 표시한다. 그림 1의 공유경계면 상의 하나의 Collocation point S<sub>k</sub>에 대해서 공유경계조건, 식(3)과 (4)로부터 다음과 같은 관계식이 얻어진다.

$$\sum_{j=1}^m U_j(S_k) C_j = \sum_{i=1}^n N_i(S_k) A_i, \quad S_r \leq S_k \leq S_s, \quad (9)$$

$$\sum_{j=1}^m U_{j,n}(S_k) C_j = - \sum_{i=1}^n N_{i,n}(S_k) A_i, \quad S_r \leq S_k, \quad (10)$$

여기서 N<sub>in</sub>과 U<sub>j,n</sub>은 각각 N<sub>i</sub>와 U<sub>j</sub>의 수직도함수(Normal derivative)이다. 그리고 식(10)은  $\mu_1 = \mu_2$ 인 곳에 공유경계를 설정한 경우에 대한 것이다. 이와 같은 관계식을 공유경계 상의 모든 Collocation point들에 대해 적용하면

$$\sum_{j=1}^m V_{kj} C_j = \sum_{i=1}^n G_{ki} A_i, \quad k \geq j, \quad k = 1, 2, \dots, \ell \quad (11)$$

와 같은 관계식을 얻을 수 있다. 식(11)은 일반적으로 미지수의 갯수보다 방정식의 갯수가 많은 경우이므로 C<sub>j</sub>는 최소제곱법(Least-square Method)에 의하여 구해진다. 즉,

$$C_j = \sum_{i=1}^n b_{ij} A_i, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (12)$$

와 같이 표시할 수 있다. 여기서 N은 Collocation에 관련된 정점들의 갯수이다. 식(12)를 식(8)에 대입한 후 각 정점값 A<sub>i</sub>에 대해 에너지 범함수가

최소값을 갖도록 하는 조건으로 부터 선형 매트릭스 방정식을 유도할 수 있으며 이 방정식을 풀어서 우리가 원하는 해를 얻는다.

3) Modified Variational Method에 의한 해석

식(3)과 (4)를 만족시키며 식(5)를 최소화시키는  $A_1$  과  $A_2$ 를 구하기 위해서 경계조건항을 첨가시킨 다음과 같은 새로운 에너지 범함수를 생각한다.

$$\bar{\pi} = \pi + \int_s \lambda (A_1 - A_2) dl \tag{13}$$

여기서  $\pi$ 는 식(5)로 주어진 것이고  $\lambda$ 는 Lagrange multiplier 이다.<sup>8)</sup> 식(13)의 변분을 취한 후 이 변분이 임의의 변분들  $\delta\lambda$ ,  $\delta A_1$  그리고  $\delta A_2$ 에 대해 영이 되어야 한다는 조건으로 부터  $\lambda$ 를 정의할 수 있다. 즉,

$$\int_s \delta\lambda(A_1 - A_2)dl + \int_s \delta A_1 \lambda + k_1 \frac{\partial A_1}{\partial n} dl \tag{14}$$

$$- \int_s \delta A_2 (\lambda + k_2 \frac{\partial A_2}{\partial n}) dl = 0$$

식(14)의 첫째 항은 경계조건인 식(3)에 해당하는 것이고, 나머지 두 항으로 부터

$$\lambda = -k_1 \frac{\partial A_1}{\partial n} \tag{15}$$

$$\lambda = -k_2 \frac{\partial A_2}{\partial n} \tag{16}$$

과 같이  $\lambda$ 가 정의 된다. 여기서 식(15)와 (16)의  $\lambda$ 는 이론적으로는 같은 값이지만 수치해석의 결과는 약간의 차이를 나타낸다. 일반적으로 후자가 경계에 대해 연속함수로 주어지므로 전자의 경우보다 더 정확하다. 따라서 식(16)의  $\lambda$ 을 사용한다. 식(16)을 식(13)에 대입하면

$$\bar{\pi} = \int_{R_1} \{ \frac{1}{2} k_1 [ \sum_{i=1}^n \nabla N_i(x, y) A_1 ]^2 - f \sum_{i=1}^n N_i(x, y) A_1 \} da$$

$$+ \int_{R_2} \frac{1}{2} k_2 [ \sum_{j=1}^m C_j \nabla U_j(x, y) ]^2 da$$

$$- \int_s k_2 \sum_{j=1}^m \frac{\partial U_j}{\partial n} [ \sum_{i=1}^n N_i(x, y) A_1 - \sum_{j=1}^m C_j U_j(x, y) ] dl \tag{17}$$

과 같은 식을 얻을 수 있다.

변분 매개변수  $A_i$  와  $C_j$ 는 식(17)이 최소값을 갖도록 결정되어 적야 하므로

$$\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial A_i} = 0, \tag{18}$$

$$\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial C_j} = 0, \tag{19}$$

인 관계식들로 부터

$$\sum_{i=1}^n q_{ik} A_i + \sum_{j=1}^m d_{jk} C_j = h_k,$$

$$k=1, 2, \dots, n+m \tag{20}$$

과 같은 매트릭스 방정식을 얻을 수 있다. 이 식은 쉽게 풀어 지는 선형 1차 연립방정식이다.

4) Localized Functional을 이용한 해석

식(15)와 (16)을 각각 식(13)에 대입하면 두 개의 에너지 범함수를 얻을 수 있는데 여기서는 후자를 택하여 설명한다.

$$\begin{aligned} \pi = & \int_{R_1} \{ \frac{1}{2} k_1 (\nabla A_1)^2 - f A_1 \} da \\ & + \int_{R_2} \frac{1}{2} k_1 (\nabla A_2)^2 da + \int_s k_1 \frac{\partial A_1}{\partial n} (A_2 - A_1) dl \end{aligned} \tag{21}$$

식(21)의 무한요소영역에 대한 적분항을 제거하기 위해서 다음과 같은 관계식을 이용한다.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (A_2 k_2 \nabla A_2) &= (\nabla A_2) \cdot (k_2 \nabla A_2) \\ &+ A_2 \nabla \cdot (k_2 \nabla A_2), \end{aligned} \tag{22}$$

식(2)를 식(22)에 이용하면

$$\int_{R_2} k_2 (\nabla A_2)^2 da = \int_{R_2} A_2 (k_2 \frac{\partial A_2}{\partial n}) dl \tag{23}$$

과 같이 쓸 수가 있다. 여기서  $R_2$ 는 무한 영역  $R_2$ 에 대한 경계를 나타내는데 이 경계적분항은 공유 경계 상에서만 존재하고, 원래의 계산영역에 해당되는 곳에서는 적분값이 영이 된다. 그러므로 식(21)은 식(23)을 이용하면

$$\begin{aligned} \pi = & \int_{R_1} \{ \frac{1}{2} k_1 (\nabla A_1)^2 - f A_1 \} da \\ & + \int_s k_2 \frac{\partial A_2}{\partial n} (A_1 - \frac{1}{2} A_2) dl. \end{aligned} \tag{24}$$

과 같이 된다. 이 범함수를 문헌 5)에서 Localized 범함수라 불렀다. 식(24)는 무한요소영역 적분항을 경계적분항으로 변환시킴으로써 계산영역을 유한요소영역으로 국한시킨 결과를 나타낸다. 식(24)가  $A_i$  와  $C_j$ 에 대해 최소값을 갖도록 하는 조건으로 부터 또한 선형방정식을 얻을 수 있다.

㉓ 계산 사례

본 장에서는 앞서 제시한 방법들을 간단한 모델에 적용시켜 얻은 수치결과를 해석적인 해 및 기준

유한요소법에 의한 결과와 비교한 계산 예를 소개한다. 그림 2는 서로 반대 방향으로 전류가 흐르는 무한한 길이의 도선 모델이다. 그림 3은 요소분해도

로서 왼쪽 반면은 기존 유한요소법을 적용시키기 위한 것이고 오른쪽 반면은 본고에서 소개한 방법을 적용시키기 위한 것이다. 이 경우는 구하여 할 미지수의 갯수를 같게한 것이다. 그림 4와 5는 공유경계 상의 포텐셜 값들을 비교한 것이다. 같은 계

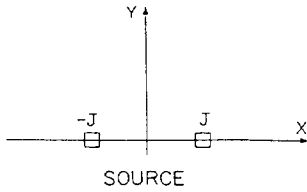


그림 2. 전류가 흐르는 두개의 무한 도선 모델

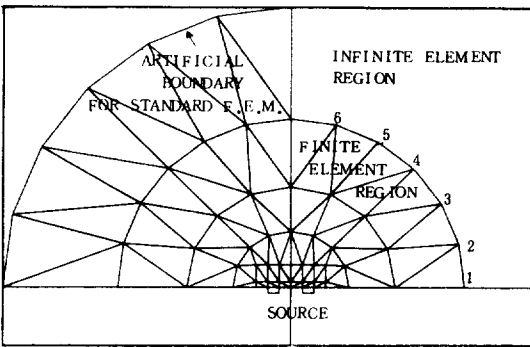


그림 3. 요소 분해도 (1)

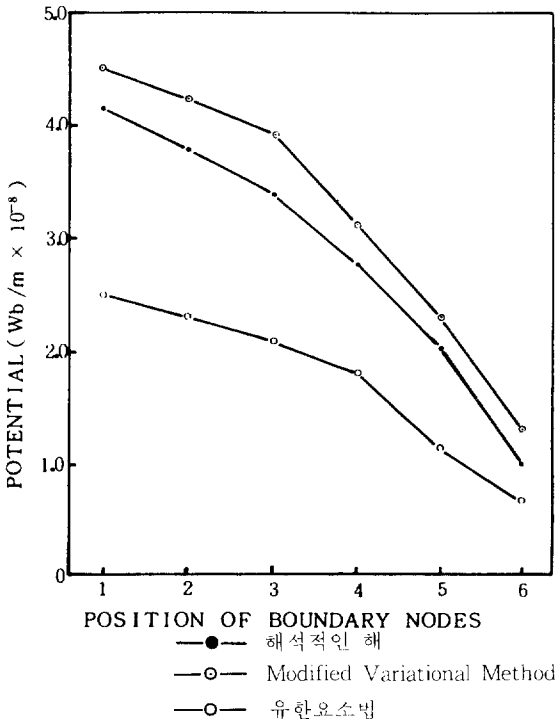


그림 4. 공유경계 상에서의 포텐셜값 비교 (1)

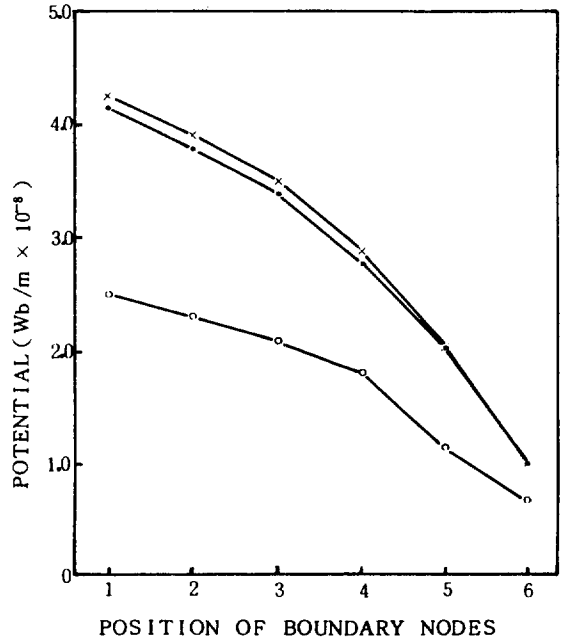


그림 5. 공유경계 상에서의 포텐셜값 비교 (2)

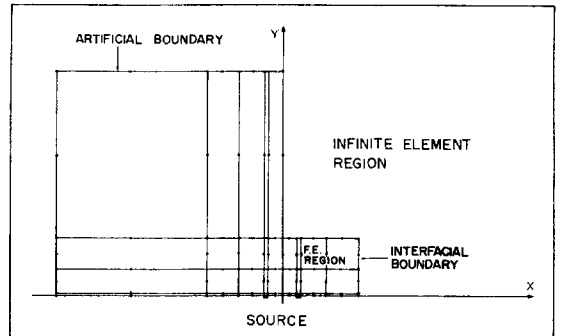


그림 6. 요소 분해도 (2)

Localized 범함수를 이용한 방법을 적용시키기 위한 것이다. 그리고 적용 결과에 대한 비교가 그림 7 과 8에 나타나 있다.

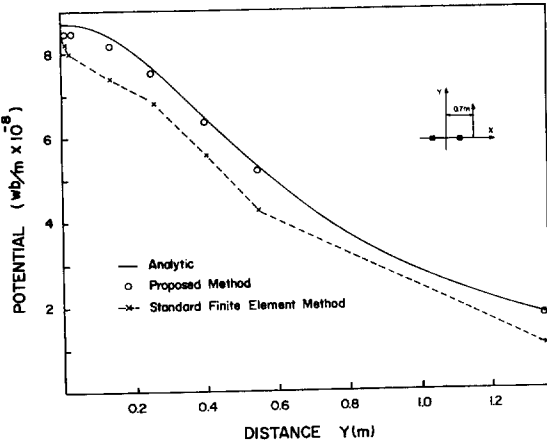


그림 7. X = 70 cm 인 선에서의 포텐셜값

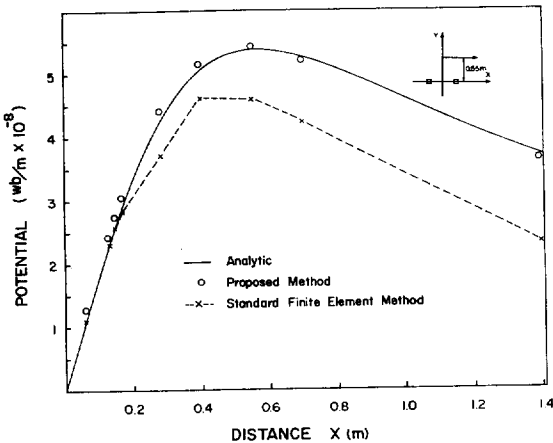


그림 8. Y = 55 cm 인 선에서의 포텐셜값

㉔ 맺는 말

이상과 같이 개 영역 자장문제 해석을 위한 세 가지 방법을 소개하였다. 기존 유한요소법과의 비교 사례를 통해 알 수 있듯이 개 영역 자장문제를 본고에서 소개한 방법을 이용하여 해석하면 기존 유한요소법을 이용한 경우보다 계산노력을 덜 들여서도 같은 정도를 갖는 해를 얻을 수 있겠다. 앞으로

의 과제는 이 방법들을 이용하여 실제 공학문제들을 해석하는 것이다.

개 영역 문제를 해석하는 방법은 본고에서 소개한 방법 이외에 사상 (Mapping)을 이용하는 경우 및 경계요소법 (Boundary Element Method)을 이용하여 무한요소영역을 처리하는 방법들이 있다.

참고문헌

- 1) A. Hughes and T.J.E. Miller, "Analysis of Fields and Inductance in Air-cored and Iron-cored Synchronous Machines", Proc. IEE, Vol. 124, No. 2, pp. 121-126, Feb. 1977.
- 2) Tanroku Miyoshi and Genta Maeda, "Finite Element Analysis of Leakage Magnetic Flux from an Induction Heating System," IEEE Trans. on Magnetics, Vol. MAG-18, No. 3, pp. 917-920, May 1982.
- 3) In-ho Kim, Hyun-kyo Jung, Gi-shik Lee, and Song-yop Hahn, "Magnetic Field Computations by Infinite Elements", J. Appl. Phys., Vol. 53, No. 11, pp. 8372-8374, Nov. 1982.
- 4) Hyun-kyo Jung, Gi-shik Lee, and Song-yop Hahn, "3-D Magnetic Field Computations by Infinite Elements", J. Appl. Phys., Vol. 55, No. 6, pp. 2201-2203, Mar. 1984.
- 5) Hyun-kyo Jung, Gi-shik Lee, and Song-yop Hahn, "Finite-Element Approach with Localized Functionals for Magnetic Field Computation," IEEE Trans, on Magnetics, 1985. (to be published)
- 6) Hyun-kyo Jung, Gi-shik Lee, and Song-yop Hahn, "3-D Magnetic Field Computations using Finite-Element Approach with Localized Functionals," to be Presented in COMPUMAG, Fort Collins, Colorado, U.S.A., 3 June - 6 June 1985.
- 7) A.J. Davies, The Finite Element Method: A First Approach, Clarendon Press, Oxford, 1980.
- 8) O.C. Zienkiewicz, The Finite Element Method, McGraw-Hill, England, 1977.