

論 文
34~10~1

無限要素法을 이용한 永久磁石 磁氣回路의 磁場解析

Magnetic Field Computations of the Magnetic Circuits with Permanent Magnets by Infinite Element Method

韓 松 曄* · 鄭 炫 教**
(Song-Yop Hahn · Hyun-Kyo Jung)

Abstract

A method employing infinite elements is described for the magnetic field computations of the magnetic circuits with permanent magnet.

The system stiffness matrix is derived by a variational approach, while the interfacial boundary conditions between the finite element regions and the infinite element regions are dealt with using collocation method.

The proposed method is applied to a simple linear problems, and the numerical results are compared with those of the standard finite element method and the analytic solutions. It is observed that the proposed method gives more accurate results than those of the standard finite element method under the same computing efforts.

1. 序 論

電氣工學分野에서는 1970 年代 초부터 電磁場計算에 有限要素法이 이용되어왔는데 近來에는 永久磁石을 包含한 磁氣回路의 解析에도 이용되고 있다.^{1)~3)}國內에서도 이 分野에 대한 研究의 進展을 보아 論文이 發表된 바 있다.⁴⁾ 그러나 文獻 4) 에서와 같이 磁場問題가 開領域 問題일 경우 既存 有限要素法을 適用하는데 있어서 몇 가지 問題點이 뒤따른다. 먼저 Dirichlet 條件으로 주어지는 境界 설정의 問題이다. 지금까지는 磁界의 세기를 무시할 수 있는 곳에서 임의로 境界를 설정하였는데 이 경우 願하는 程度의 精確한 解를 얻기 위한 境界設定의 基準이 問題에 따라 明確하지 못하다는 것이다. 다음은 一般的인 基準으로서 磁界源으로부터 境界가 멀리 떨어질 수록 正確한 解를 얻을 수 있었는데 이 경우는 컴퓨터 記憶容量이 커야 하고 計算時間도 길어진다.

이러한 問題點을 補完하기 위해서 本 論文에서는 無限要素法 (Infinite Element Method) 을 이용하여

永久磁石을 包含한 磁氣回路의 磁場解析을 한다. 이 方法에서는 우선 전체 計算領域을 두 部分, 즉 既存 有限要素法이 適用되는 有限要素領域 및 가장 일반적인 解인 固有函數 (Eigenfunction) 들이 사용되는 無限要素領域으로 나눈다. 전자는 境界源 및 非線型性을 띤 매질 등을 包含하고 후자는 無限대까지 擴張된 磁界의 變化가 單調로운 無限領域이다. 두 領域사이의 共有境界條件들은 포텐셜 連續條件 및 磁界의 세기의 接線方向成分의 連續條件이다. 이 境界條件들은 콜로케이션法 (Collocation Method) 에 의하여 다루어진다.^{5)~6)} 以上에서 記述한 方法을 解析의인 解를 쉽게 구할 수 있는 한 쌍의 원호형磁石 (Arc-magnet) 모델에 適用하여 數值解를 구하고 解析의인 解와 比較함으로써 그 有用度を 檢討하였다.

2. 시스템方程式 및 境界條件

有限要素領域을 R_1 , 無限要素領域을 R_2 라고 하고 두 領域에서의 벡터포텐셜을 각각 \vec{A}_1 과 \vec{A}_2 라고 한다면 각 領域에서의 편미분方程式은 다음과 같이 주어진다.

$$\text{領域 } R_1 \text{ 에서, } \nabla \times [\nu_1 (\nabla \times \vec{A}_1 - \vec{B}_r)] = J, \quad (1)$$

$$\text{領域 } R_2 \text{ 에서, } \nabla \times [\nu_2 (\nabla \times \vec{A}_2)] = 0 \quad (2)$$

*正 會 員 : 서울大 工大 電氣工學科 教授 · 工博
**正 會 員 : 江原大 工大 電氣工學科 助教授 · 工博
接受日字 : 1985年 4月 3日

여기서 ν_1 과 ν_2 는 磁化率과 透磁率에 관계된 매질 상수이며 (부록 참고) \vec{B}_r 는 磁性體의 殘留磁束密度이다.

本 研究에서는 2次元 問題만을 다루기로 하였기 때문에 磁氣벡터포텐셜과 電流密度는 z -成分 (\hat{z}) 만을 갖고 磁束密度와 磁界의 세기는 x, y -成分 (\hat{x}, \hat{y})을 갖는 것으로 하였다. 즉,

$$\vec{A}_I = \hat{z} A_I(x, y), \quad (3)$$

$$\vec{A}_{II} = \hat{z} A_{II}(x, y), \quad (4)$$

$$\vec{J} = \hat{z} J, \quad (5)$$

$$\vec{B}_r = \hat{x} B_{rx} + \hat{y} B_{ry} \quad (6)$$

와 같이 표시할 수 있다. 그리고 두 領域사이의 共有 境界條件은 다음과 같다.

$$A_I = A_{II}, \quad (7)$$

$$\frac{1}{\mu_1} A_{I,n} = -\frac{1}{\mu_2} A_{II,n}. \quad (8)$$

여기서 μ_1 과 μ_2 는 각 領域에서의 透磁率이며 $A_{I,n}$ 과 $A_{II,n}$ 은 A_I 과 A_{II} 의 수직도함수이다. 그리고 두 領域에서의 수직도함수의 方向은 각각 領域의 바깥쪽으로 向하는 것으로 한다. 共有境界條件 이외의 境界條件은 Dirichlet 條件 또는 Neumann 條件으로 주어진다.

3. 에너지汎函數

식(1)과 (2)의 편미분方程式과 境界條件들을 만족하는 解를 變分法을 이용하여 얻기 위해서 汎函數를 구하면

$$F = \iint_{R_1} \frac{1}{2} \nu_1 \left[\left(\frac{\partial A_I}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial A_I}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy - \iint_{R_1} \nu_1 \left(B_{rx} \frac{\partial A_I}{\partial y} - B_{ry} \frac{\partial A_I}{\partial x} \right) dx dy - \iint_{R_1} J A_I dx dy + \iint_{R_2} \frac{1}{2} \nu_2 \left[\left(\frac{\partial A_{II}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial A_{II}}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (9)$$

로 주어진다. 여기서 有限要素領域 R_1 은 永久磁石과 電流源을 포함하고 無限要素領域 R_2 는 라플라스方程式을 만족시키는 磁場의 變化가 單調로운 無限領域이다. 포텐셜函數 A_I 을 각 要素의 頂點의 포텐셜 A_i 와 補間函數 (Shape Function) N_i 의 一次結合으로 표시하면

$$A_I(x, y) = \sum_{i=1}^n A_i N_i(x, y) \quad (10)$$

로 된다. 여기서 n 은 有限要素領域의 전체 頂點數이고 N_i 는 그 領域에 대해 一般化한 補間函數 (Global Shape Function)이다. 그리고 領域 R_2 에서의 포텐셜函數는 有限 갯수의 固有函數 (Eigenfunction)로써 나타낸다.

$$A_{II} = \sum_{j=1}^m C_j U_j(x, y) \quad (11)$$

여기서 C_j 는 展開상수이다. 식(10)과 (11)을 식(9)에 代入하면

$$F = \iint_{R_1} \frac{1}{2} \nu_1 \left[\left(\sum_{i=1}^n A_i \frac{\partial N_i}{\partial x} \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n A_i \frac{\partial N_i}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy - \iint_{R_1} \nu_1 \left[B_{rx} \left(\sum_{i=1}^n A_i \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) - B_{ry} \left(\sum_{i=1}^n A_i \frac{\partial N_i}{\partial x} \right) \right] dx dy - \iint_{R_1} J \left(\sum_{i=1}^n A_i N_i \right) dx dy + \iint_{R_2} \frac{1}{2} \nu_2 \left[\left(\sum_{j=1}^m C_j \frac{\partial U_j}{\partial x} \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^m C_j \frac{\partial U_j}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (12)$$

로 된다.

4. 콜로케이션法(Collocation Method)^{5),6)}

共有境界條件을 만족하면서 식(12)를 最小로 하는 A_i 와 C_j 를 구하기 위해서 먼저 C_j 는 콜로케이션法에 의하여 有限要素領域에 있는 頂點의 포텐셜들로써 나타내어질 수 있다. S_k 를 共有境界上의 한 點이라면 식(7)과 (8)로 부터 다음과 같은 관계式들이 얻어진다.

$$\sum_{i=1}^n A_i N_i(S_k) = \sum_{j=1}^m C_j U_j(S_k), \quad (13)$$

$$\frac{1}{\mu_1} \sum_{i=1}^n A_i N_{i,n}(S_k) = -\frac{1}{\mu_2} \sum_{j=1}^m C_j U_{j,n}(S_k) \quad (14)$$

여기서 $N_{i,n}$ 과 $U_{j,n}$ 은 각각 共有境界 上에서의 N_i 와 U_j 의 수직도함수이다. 식(13)과 (14)와 같은 관계식을 共有境界 上의 모든 콜로케이션點에 대해서 얻은 후 整理하면 다음과 같은 간단한 形態의 매트릭스關係式을 얻을 수 있다.

$$\sum_{j=1}^m v_{kj} C_j = \sum_{i=1}^n g_{ki} A_i, \quad k \geq j, \quad k=1, 2, \dots, l \quad (15)$$

여기서 v_{kj} 와 g_{ki} 는 콜로케이션點의 座標값에 따라

언어 지는 상수들이고 θ 은 콜로케이션점의 갯수이며 N 는 콜로케이션에 關係되는 모든 頂點의 갯수이다. 일반적으로 式 (15)는 方程式의 갯수가 未知數의 갯수 보다 많은 경우이므로 最小제곱법 (Least-square Method)에 의해 풀어진다. 즉,

$$C_j = \sum_{i=1}^n b_{ij} A_i, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (16)$$

과 같이 展開상수 C_j 를 콜로케이션에 關係되는 頂點의 포텐셜로써 표시할 수 있다.

式 (16)의 C_j 들을 式 (12)에 代入한 후 각 頂點값 A_i 들에 대해 最小값을 갖는 條件, 즉

$$\frac{\partial F}{\partial A_i} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (17)$$

인 關係式들로부터 다음과 같은 線型매트릭스 方程式을 얻는다.

$$\sum_{j=1}^n S_{ij} A_j = f_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (18)$$

式 (18)은 消去法 또는 反復法에 의해 쉽게 풀어질 수 있다.

5. 事例研究

위에서 提示한 方法을 그림 1과 같은 한 쌍의 원호형 磁石 (Arc-magnet) 모델에 適用시켜 보았다. 要素는 一次 三角形要素를 採하였으며 計算領域은 對稱性을 考慮하여 $1/4$ 平面만을 取하였다. 그림

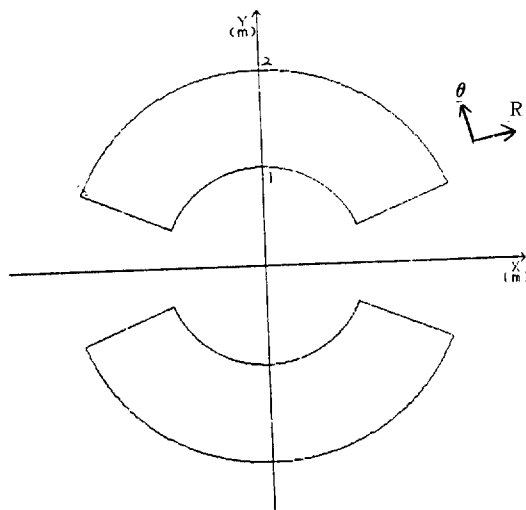


그림 1. 한 쌍의 원호형 자석 모델
Fig. 1. A pair of arc-magnets.

2의 오른쪽 半平面은 無限要素法을 適用하기 위한 要素分解로서 要素數 104, 頂點數 64개로 하였다. 그리고 無限領域에서의 포텐셜函數는 가장 일반적인 解인 無限 갯수의 固有函數들중 지배적인 두 개의 항을 취함으로써 다음과 같이 표시했다.

$$A_{II} = C_1 \frac{\cos \theta}{r} + C_2 \frac{\cos (2\theta)}{r^2} \quad (19)$$

그림 2의 왼쪽 半平面은 既存 有限要素法을 適用하기 위한 要素分解이다. $R = 11$ [m]인 곳에 임의의 境界를 取하여 $A = 0$ 인 Dirichlet 境界條件을 주었다. 포텐셜을 모르는 頂點數는 오른쪽 半平面의 경우와 같으며 전체 頂點數 72개 要素數 120개로 하였다.

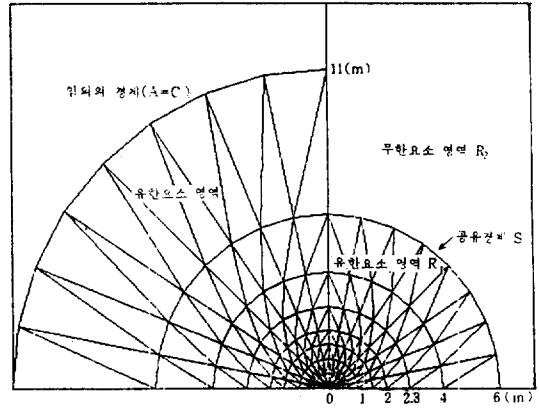


그림 2. 요소분해도
Fig. 2. Element discretization.

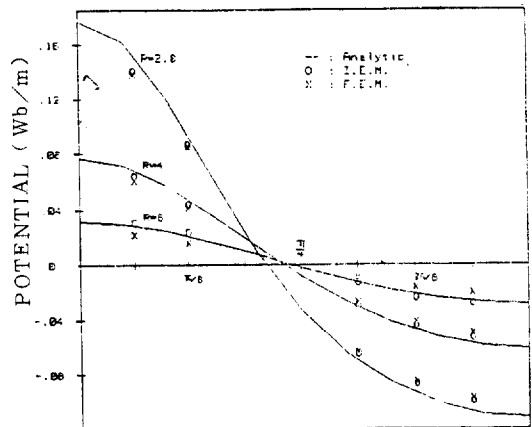


그림 3. 각도 θ [rad] 에 대한 자기벡터 포텐셜 값의 변화
Fig. 3. Magnetic vector potentials vs. angle θ .

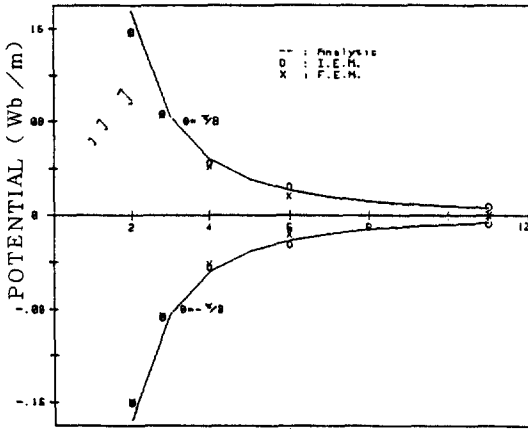


그림 4. 반경 R [m] 에 대한 자기벡터 포텐셜 값의 변화

Fig. 4. Magnetic vector potentials vs. radius R.

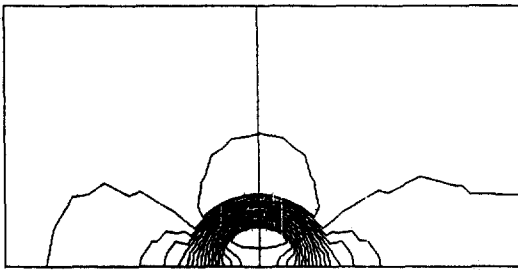


그림 5. 자속분포도

Fig. 5. Magnetic flux distribution.

그림 3은 $B_r = 2\pi/3$ [wb/m²] 일 때 無限要素法 및 有限要素法에 의한 解와 解析的인 解를 比較한 것인데, 半徑 R 가 2.8 [m], 4 [m], 6 [m] 일 때 각 θ 의 變化에 따른 磁氣벡터포텐셜 값의 分布를 나타낸다. 여기서 實線 “—” 은 解析的인 解, “o” 은 無限要素法에 의한 解 그리고 “x” 는 既存 有限要素法에 의한 解이다. 그림 3에서 볼 수 있듯이 未知數의 갯수가 같은 條件하에서 無限要素法에 의한 結果가 既存 有限要素法을 適用한 結果보다 더 正確하다는 것을 알 수 있다. 특히 半徑이 클 때 ($R = 6$ [m]) 無限要素法의 結果가 매우 正確하다는 것을 알 수 있다. 이때 소요된 計算時間은 HP 9845 소형컴퓨터를 사용하였을 때 有限要素法을 適用한 경우 3분 40초인 반면에 無限要素法을 適用한 경우는 3분 35초이다.

그림 4는 일정한 角 즉, $\theta = \pi/8, 3\pi/8$ [rad] 에서 半徑에 대한 磁氣벡터포텐셜 값의 變化를 나타

낸다. 그림에서 알 수 있듯이 $R = 11$ [m]인 곳에, 既存 有限要素法을 適用하는 경우 $A = 0$ 로 近似化시켰는데 無限要素法에 의한 結果는 벡터포텐셜 A의 값이 0이 아님을 보이며 이 값은 解析的인 解와 잘 一致하고 있다.

그림 5는 數值解析結果에 의한 磁束分布圖를 나타낸다. 왼쪽 半平面은 有限要素法을 適用한 結果에 의한 것이고 오른쪽 半平面은 無限要素法에 의한 結果이다. 왼쪽 分布圖가 $R = 11$ [m]인 곳에 Dirichlet 境界條件을 부여한 結果이므로 磁力線이 境界內에서만 存在하는 것을 나타내는 반면에 오른쪽 分布圖에서는 磁力線이 境界 바깥쪽으로도 뻗어나가는 것을 볼 수 있다.

6. 結 論

無限要素法을 利用하여 永久磁石을 包含한 磁氣回路의 磁場解析을 하였다. 한쌍의 원호형 磁石 (Arc-magnet) 모델에 本論文에서 提示한 方法을 適用하여 얻은 結果와 既存 有限要素法에 의한 結果, 그리고 解析的인 解를 比較하였다. 未知數의 갯수가 같은 條件하에서 이 方法에 의한 結果는 既存 有限要素法보다 未知數의 갯수를 적게 잡아도 비슷한 計算精度를 얻을 수 있다고 結論지을 수 있다. 특히 3次元 問題를 다루는 경우 未知數의 갯수가 기하급수적으로 增加하므로 같은 精度의 解를 얻는데 있어서는 無限要素法을 適用하면 既存 有限要素法을 適用하는 경우보다 전자계산기의 記憶容量과 計算時間상에 많은 이득을 가져올 것으로 사료된다.

끝으로 本 研究는 84년도 현대연구비에 의하여 이루어졌음을 알리는 바입니다.

(附 錄)

磁性體를 包含한 靜磁場에 대해서 다음과 같은 식들이 성립한다.

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad (A-1)$$

$$\vec{M} = \chi \vec{H} \quad (A-2)$$

여기서 \vec{H} 는 磁界의 세기, \vec{B} 는 磁束密度, \vec{M} 은 磁性體의 磁化의 세기, μ_0 는 眞空中의 透磁率, 그리고 χ 는 磁化率이다.

$$\vec{M} = \chi' \vec{H} + \vec{M}_0 \quad (A-3)$$

로 나타 낼 수 있다. 여기서 殘留磁化의 세기 (\vec{M}_0)는 일정한 크기의 벡터이고, χ' 은 새로이 定義된 일종의 磁化率이다.

式(A-3)을 式(A-1)에 代入하면

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \mu_0 (1 + \chi') \vec{H} + \mu_0 \vec{M}_0 \\ &= \mu' \vec{H} + \vec{B}_r \end{aligned} \quad (A-4)$$

로 되는데, 여기서 μ' 는 一般적으로 定義되는 磁性體의 透磁率 μ 와 次元은 같으나 性質은 다르므로 區別하여 定義된다.

本文 中の ν' 은

$$\nu' = 1/\mu' \quad (A-5)$$

로 定義된다.

參考文獻

- 1) F.A. Fouad et al., "Permanent magnet modeling for use in vector potential finite element analysis in electrical machinery," IEEE Trans. MAG., Vol. MAG-17, No. 6, November 1981.
- 2) C.J. Collie, "Magnetic fields and potentials of linearly varying current on magnetization in a plane bounded region," Proc. COMPUMAG Conf. Oxford, 1976.
- 3) J. D'Angelo et al., "Three-dimensional finite element solution for a permanent magnet axial-field machine," IEEE Trans. PAS., Vol. PAS-102, No. 1, January 1983.
- 4) 박영건, 정현교, 한송엽, "有限要素法을 이용한 永久磁石 磁氣回路的 磁場解析", 전기학회논문지, 제 33 권, 제 5 호, 1984년 5월.
- 5) In-ho Kim, Kyun-kyo Jung, Gi-shik Lee, and Song-yop Hahn, "Magnetic Field Computations by Infinite Elements," J. Appl. Phys., Vol. 53, No. 11, November 1982.
- 6) Hyun-kyo Jung, Gi-shik Lee, and Song-yop Hahn, "3-D Magnetic Field Computations by Infinite Elements," J. Appl. Phys., Vol. 55, No. 6, March 1984.