

# FEM과 BEM의 混合適用에 의한 定常磁界의 解析에 관한 研究

論 文

34~7~3

## A Study on the Analysis of Steady Magnetic Fields by the Coupling of FEM and BEM

任 達 鎬\* · 金 燦 五\*\*  
(Dal-Ho Im · Chan-O Kim)

### Abstract

This study is concerned with the analysis of two-dimensional steady magnetic fields by the coupling of FEM and BEM. FEM(Finite Element Method) is most widely used as a method of numerical analysis and BEM(Boundary Element Method) is a newest method for it. And the results from this coupling method are compared and discussed with those of FEM only. Consequently, it is shown that to obtain the same accuracy of results the coupling method requires less calculating time and dimension than the FEM.

### 1. 序 論

有限要素法(FEM)은 주어진 微分方程式을 만족하는 解析領域을 有限個의 要素로 分割하여 놓고, 각 要素에서의 解析函数를 要素節點에서의 函数値으로近似化한 다음, 주어진 微分方程式에 대해서 變分理論이나 加重殘差法을 適用하여 代数方程式의 형태로 주어지는 한 要素에서의 要素方程式을 유도하고, 이것을 全 解析領域의 要素들에 대해 각각 계산한 후 이들을 전부 組合하여 系方程式을 구성하고 이것을 풀어 解를 구하는 방법이다.<sup>[1], [2], [5]</sup>

한편 境界要素法(BEM)에서는 解析領域에서 만족하는 微分方程式을 Green의 第2定理에 의해 積分方程式의 형태로 변환하여 놓고, 任意點의 解析函数에 대한 積分을 数值的으로 계산하기 위해 解析領域의 境界를 境界要素로써 分割한 다음 각 境界상의 모든 節點에 대해 数值積分하면 系方程式이 얻어지고 이것을 풀면 解를 구할 수 있게 된다.<sup>[3], [9], [10]</sup>

이와같이 有限要素法에서는 全 解析領域을 有限要素로써 모두 分割하여야 하는 반면, 境界要素法에서는 解析領域의 境界만을 境界要素로 分割하게 되므로 節點의 数가 有限要素法의 경우보다 훨씬 감소하며 결과적으로 計算容量이 감소하게 된다.

그러나 境界要素法에서 使用되는 調和函數인 Green函數는 媒質이 均一하지 못한 解析領域에서는 하나의函數로써 適用하기가 곤란하므로 空隙과 鐵心이 공존하는 電氣機器의 磁氣的特性解析에는 境界要素法만을 적용하는 것도 곤란하다. 이러한 이유에서 境界要素法은 境界가 무한한 解析모델만을 주로 다루어 왔지만 최근에는 電氣機器의 磁氣的特性解析에 사용되는 有限要素法의 計算容量이 막대해 짐에따라 有限要素法만으로는 實體의 機器解析에 적용하기가 곤란한 점이 많아서 境界要素法을 有限要素法과 混合하여 機器特性解析에 적용하는 방법을 생각하게 되었다.<sup>[4], [11]</sup>

本研究에서는 電氣機器중에서 鐵心이 幅이 비교적 큰 變壓器의 近似모델을 선택하여 窓부분은 有限要素法을 적용하였고 鐵心부분은 境界要素法을 적용하여 磁氣特性을 2次元的으로 解析하였으며 또한 같은 解析모델에 대해 有限要素法만을 적용하여 얻은結果와도 比較, 檢討하였다.

\*正會員: 漢陽大 工大 電氣工學科 教授 · 工博

\*\*正會員: 漢陽大 工大 電氣工學科 講師

接受日字: 1985年 2月 16日

## 2. 解析모델

本研究에서 선택한 解析모델은 그림1과 같고 解析領域은 電氣的 및 磁氣的 對稱性을 고려하여 解析모델의 第1象限에 해당하는 1/4領域으로 하였으며 有限要素法과 境界要素法을 混合適用하기 위해 그림2와 같이 두 개의 領域으로 分離하였다.<sup>4)</sup> 즉 領域(R+S)는 有限要素法이 適用되는 FE領域이고 領域(R'+S+S'+S\*)는 境界要素法이 適用되는 BE領域이며 여기서 文字R은 境界를 제외한 内部領域을 또 文字S는 境界를 나타낸다.

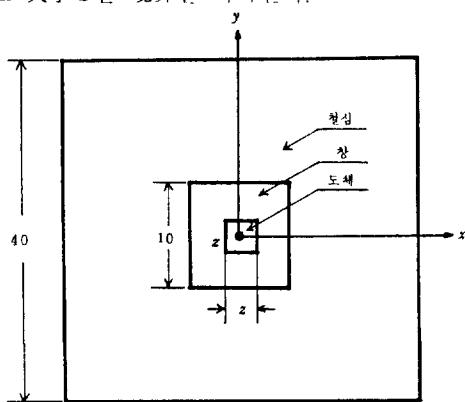


그림 1. 해석 모델(단위(cm))

Fig. 1. Analyzing model.

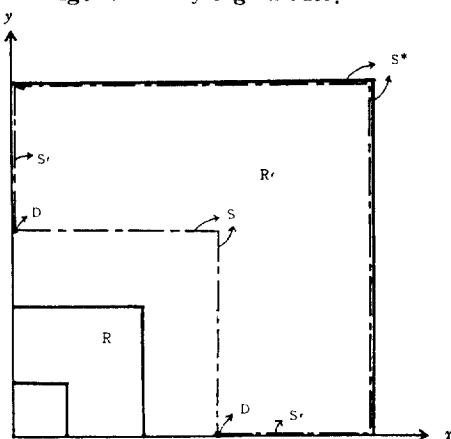


그림 2. 해석영역

Fig. 2. Domain to be analyzed.

## 3. 基本方程式

2章에서 주어진 解析모델의 磁束分布特性을 解析하기 위한 基本方程式은 FE領域과 BE領域에 대해 각각 다음과 같이 주어진다.

### 1) FE領域의 基本方程式

$$\nu \left\{ \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right\} = -J \quad (3-1)$$

여기서  $\nu$ 는 磁氣抵抗率,  $A$ 는 磁氣ベクターフェン실,  $J$ 는 入力電流密度이다.

### 2) BE領域의 基本方程式

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = 0 \quad (3-2)$$

## 4. 適用理論

### 4.1 有限要素法의 適用

#### 1) 變分理論의 適用<sup>1) 2) 5)</sup>

식(3-1)의 FE領域의 基本方程式에 대하 求解函数는 다음과 같다.

$$F = \iint_R + s \left[ \frac{\nu}{2} \left\{ \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial A}{\partial y} \right)^2 \right\} - J A \right] dR$$

$$- \oint_S \nu \lambda A ds \quad (4-1)$$

여기서  $\lambda$ 는  $\partial A / \partial n$ 을 나타내며  $n$ 은 單位法線ベク터를 의미한다.

또 식(4-1)에 한 要素에 대해 近似化한 ベクターフェン실  $A^e$ 를 대입하면 한 要素에서 만족하는 求解函数  $F^e$ 가 얻어진다.

$$F^e = \iint_A^e \left[ \frac{\nu^e}{2} \left\{ \left( \frac{\partial A^e}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial A^e}{\partial y} \right)^2 \right\} - J^e A^e \right] dr$$

$$- \int_L^e \nu^e \lambda^e A^e dl \quad (4-2)$$

이상의 式에 대해 最小化條件

$$\frac{\partial F}{\partial A_q} = \sum_e \frac{\partial F^e}{\partial A_q} = 0 \quad (q = 1, 2, \dots, N) \quad (4-3)$$

을 適用하면 FE領域內의 系方程式을 얻을 수 있다. 여기서  $N$ 은 FE領域內의 總節點數이다.

#### 2) 解析函数의 近似化<sup>5)</sup>

本研究에서는 有限要素로서 그림3과 같은 1次三角要素을 사용하여 FE領域을 要素分割하였다.

그림3과 같이 分割된 각 三角要素의 内부에서 ベクターフェン실  $A$ 가 線型的으로 變化한다고 가정하고, 試行函数를 1次로 하면 要素내의 ベクターフェン실  $A^e$ 는 다음과 같이 각 節點의 ベクターフェン실  $A_p$ 의 線型組合으로 近似化된다.

$$A^e = \sum_p N_p A_p \quad (p = i, j, k; p \in R + S) \quad (4-4)$$

여기서  $N_p$ 는 補間函数이며

$$N_p(x, y) = \frac{1}{2A^e} (a_p + b_p x + c_p y) \quad (4-5)$$

이고  $A^e$ 는 三角要素(e)의 面積을 나타내며

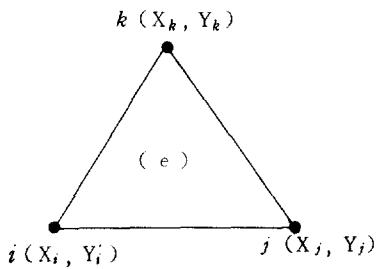


그림 3. 삼각요소(e)

Fig. 3. Triangular element.

$$a_i = X_j Y_k - X_k Y_j, \quad b_i = Y_j - Y_k, \quad c_i = X_k - X_j$$

$$a_j = X_k Y_i - X_i Y_k, \quad b_j = Y_k - Y_i, \quad c_j = X_i - X_k$$

$$a_k = X_i Y_j - X_j Y_i, \quad b_k = Y_i - Y_j, \quad c_k = X_j - X_i$$

이다.

또 FE領域의 境界에 대한 積分을 하기 위해 그림 4와 같이 線型要素로 되는 境界상의 要素에 대해  $A^e$  및  $\lambda^e$ 를 近似化하면 다음과 같다.

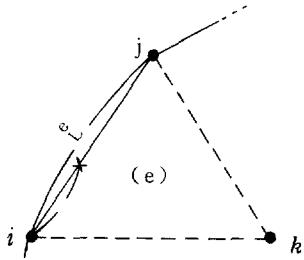


그림 4. 선형요소

Fig. 4. Linear element.

$$A^e = \sum_{p'} L_{p'} A_{p'} \quad (p' = i, j; p' \in S) \quad (4-6)$$

$$\lambda^e = \sum_{p'} L_{p'} \lambda_{p'} \quad (4-7)$$

여기서  $A_{p'}$  및  $\lambda_{p'}$ 는 境界  $S$  상의 각 節點에 대한  $A$  및  $\frac{\partial A}{\partial n}$  값이며  $n$ 은 FE領域에서 外部로 向하는 法線방향을 나타내고  $L_{p'}$ 는 補間函數로서 다음과 같이 주어진다. 여기서  $L^e$ 는 三角要素(e)에서 境界에 接하는 邊의 길이이다.

$$L_i = \frac{L^e - r}{L^e}, \quad L_j := \frac{r}{L^e}$$

### 3) 有限要素方程式

식(4-2)에 대해 식(4-3)의 最小化條件를 適用하면 다음과 같은 要素方程式이 얻어진다.

$$\frac{\partial F^e}{\partial A_q} = [S'] \{A_p\} + [G'] \begin{cases} \{O\} \\ \{\lambda_p\} \end{cases} - \{f'\} \quad (q = i, j, k) \quad (4-8)$$

여기서 行列의 각 係數는

$$S_{mn} = \frac{\nu^e}{4A^e} (b_m b_n + c_m c_n)$$

$$g_{mn} = - \int_L \nu^e L_m L_n dl = \begin{cases} 0 & ; m = n = k \\ \nu^e L / 3 & ; m = n \neq k \\ \nu^e L / 6 & ; m \neq n \end{cases}$$

$$(m, n = i, j \in S)$$

$$f_m = \frac{1}{3} J^e f$$

이다.

식(4-8)에 주어진 要素方程式을 각 要素에 대해 계산하고 식(4-3)의 條件에 의해 이들을 모두 組合하면 다음과 같은 FE領域의 系方程式을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} [S_{11}] & [S_{12}] & [S_{13}] \\ [S_{21}] & [S_{22}] & [S_{23}] \\ [S_{31}] & [S_{32}] & [S_{33}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{A_R\} \\ \{A_S\} \\ \{O_D\} \end{Bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \{O\} & \{O\} & \{O\} \\ \{O\} & \{G_{11}\} & \{G_{12}\} \\ \{O\} & \{G_{21}\} & \{G_{22}\} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{O\} \\ \{\lambda_S\} \\ \{\lambda_D\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_R\} \\ \{f_S\} \\ \{f_D\} \end{Bmatrix} \quad (4-9)$$

여기서 点자  $D$ 는 境界  $S$ 의 양 끝에 있는 節點이며 BE領域의 系方程式과의 계산을 위해 境界  $S$ 에서 분리시킨 것이다. 그러므로 点자  $S$ 는 境界  $S$  상에서 양 끝의 점을 제외한 나머지 節點을 나타낸다.

### 4.2 境界要素法의 適用

식(3-2)와 같이  $\nabla^2 A = 0$ 로 주어지는 Laplace方程式에 Green의 第2定理를 適用하면 다음과 같은 式이 얻어진다.<sup>3), 9)</sup>

$$\int_{R'+S+S'} [G \cdot \nabla^2 A - A \cdot \nabla^2 G] dR \quad (4-10)$$

$$= \oint_{S+S'} [G \cdot \frac{\partial A}{\partial n} - A \cdot \frac{\partial G}{\partial n}] dB$$

여기서  $n$ 은 BE領域내부로 向하는 法線방향을 나타내며  $G(r, r')$ 는 다음 式을 만족하는 Green函数이다.

$$\nabla^2 G(r, r') = -\delta(r, r') \quad (r, r' \in R'+S+S')$$

$$G(r, r') = 0 \quad (r, r' \in S^*) \quad (4-11)$$

여기서  $r$ 은 觀測點(field point)을 나타내고  $r'$ 는 入力點(source point)을 나타내며  $\delta(r, r')$ 는 Delta函数이다.

식(4-11)을 만족하는 Green函数는 다음과 같다.

$$G(r, r') = G_0(r, r') + g(r, r')$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left[ 1/n \frac{1}{(X-x)^2 + (Y-y)^2} \right]$$

$$+ 1/n \frac{[(X-x)^2 + (Y-2b+y)^2][(X-2a+x)^2 + (Y-y)^2]}{[(X-2a+x)^2 + (Y-2b+y)^2]} \quad (4-12)$$

여기서  $G_o$ 는 自由空間에서의 Green函數,  $g$ 는 境界條件을 만족시키기 위해 참가되는函數,  $X, Y$ 는 觀測點의 座標,  $x, y$ 는 入力點의 座標,  $a$ 는  $x$  軸에 垂直인 境界  $S^*$  部分의  $y$ 座標이다.

식(4-10)에  $\nabla^2 A = 0$ 의 관계와 Delta函數의 定義<sup>9)</sup>를 適用하면 다음 式을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \alpha A(r') &= f_{S+S'+S^*}[G(r, r') \cdot \frac{\partial A(r)}{\partial n} \\ &\quad - A(r) \cdot \frac{\partial G(r, r')}{\partial n}] dB \end{aligned} \quad (4-13)$$

여기서  $\alpha$ 는 入力點  $r$ 의 位置에 따라 다음과 같은 値을 갖는다.<sup>10)</sup>

$$\alpha = \begin{cases} 1; & r' \in R' \\ \frac{1}{2}; & r' \in S + S' + S^* \\ 0; & r' \in R^+ S + S' + S^* \end{cases}$$

식(4-13)에 Potential Theory<sup>3)</sup>를 적용하여 觀測點  $r$ 과 入力點  $r'$ 의 위치를 바꾸면

$$\begin{aligned} \alpha A(r) &= f_{S+S'+S^*}[A(r) \frac{\partial G(r', r)}{\partial n} \\ &\quad - G(r', r) \frac{\partial A(r')}{\partial n}] dB' \end{aligned} \quad (4-14)$$

로 되며 積分經路가  $S + S' + S^*$  이므로  $r \in S + S' + S^*$  가 되어  $\alpha = \frac{1}{2}$ 이 된다.

$$\text{또 } r, r' \in S^* \text{에서는 Dirichlet 境界條件에 의해 } A(r') = 0, \quad G(r', r) = 0 \quad (4-15)$$

이므로 이것을 식(4-14)에 대입하고  $\lambda(r')$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial A(r')}{\partial n} \text{ 으로 놓으면 식(4-14)는} \\ &\frac{1}{2} A(r) + f_{S+S'}[A(r') \cdot \frac{\partial G(r', r)}{\partial n} \\ &\quad - G(r', r) \cdot \lambda(r')] dB' = 0 \end{aligned} \quad (4-16)$$

으로 되는데 이 式을 境界상의 하나의 節點에 대해 만족하는 式으로 나타내면

$$\begin{aligned} A^e(r) &= 2 \sum_e f_{o_e}^e [G'_o(r, r') + g'_o(r, r')] A^e(r') \\ &\quad - G(r, r') \lambda^e(r')] dl' \end{aligned} \quad (4-17)$$

로 되고 이 때의 積分經路는 反時計方向이다.

식(4-17)에서

$$\begin{aligned} G_{oi}(r, r') &= [(a_n \cdot a_x) \frac{\partial}{\partial x} G_o(r, r') \\ &\quad + (a_n \cdot a_y) \frac{\partial}{\partial y} G_o(r, r')] \end{aligned} \quad (4-18)$$

이며  $a_n, a_x$  및  $a_y$ 는 BE領域내부로 향하는 法線,  $x$  方向 및  $y$  方向의 單位벡터이다.

### 1) 解析函數의 近似化

BE領域의 境界상의 任意節點에 대한 積分方程式(4-17)을 数值積分하기 위해 境界를 그림 5와 같

은 線型境界要素로써 分割하고 이 要素에서의  $A$ 와  $\lambda$ 는 다음과 같이 近似化한다.<sup>12)</sup>

$$\begin{aligned} A^e(r') &= \sum_b L_b A_b \\ \lambda^e(r') &= \sum_b L_b \delta_b \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} (b = i, j; b \in S + S') \\ (4-19) \end{array} \right.$$

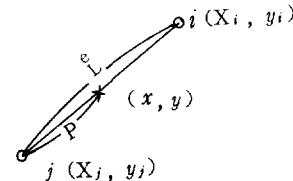


그림 5. 선형경계요소

Fig. 5. Linear boundary element.

그림 5에서

$$\begin{aligned} x &= b_1 p + X_i \\ y &= b_2 p + Y_i \end{aligned} \quad (4-20)$$

으로 표시할 수 있으면 여기서

$b_1 = (X_i - x) / L^e$ ,  $b_2 = (Y_i - y) / L^e$ 이다. 식(4-20)을 식(4-19)에 대입하여 정리하면 식(4-19)는

$$\begin{aligned} A^e(r') &= \frac{L^e - p}{L^e} A_i + \frac{p}{L^e} A_j \\ \lambda^e(r') &= \frac{L^e - p}{L^e} \lambda_i + \frac{p}{L^e} \lambda_j \end{aligned} \quad (4-21)$$

와 같이 된다.

그러므로 식(4-19)에서  $L_i = \frac{L^e - p}{L^e}$ ,  $L_j = \frac{p}{L^e}$

가 됨을 알 수 있다. 여기서  $L^e$ 는 그림 5에 나타낸 線型境界要素(e)의 길이이다.

한편 식(4-17)에서  $dl' = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ 이며 식(4-20)과의 관계에서

$$dl' = \sqrt{\left(\frac{dx}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dp}\right)^2} dp = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} dp \quad (4-22)$$

$$\text{이므로 } b_1^2 + b_2^2 = 1 \text{ 이므로} \quad dl' = dp \quad (4-23)$$

이 된다.

### 2) 境界要素方程式

식(4-21)과 (4-23)을 식(4-17)에 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned} A^e(r) &= 2 \sum_e f_{o_e}^e \left( \frac{L^e - p}{L^e} A_i + \frac{p}{L^e} A_j \right) \\ &\quad \cdot [G'_{oi}(r, r') + g'_o(r, r')] dp \\ &\quad - 2 \sum_e f_{o_e}^e \left( \frac{L^e - p}{L^e} \lambda_i + \frac{p}{L^e} \lambda_j \right) \\ &\quad \cdot [G_o(r, r') + g(r, r')] dp \end{aligned} \quad (4-24)$$

로 되는데 이 式이 境界要素方程式이며 이것을 境界상의 모든 節點에 대해 数值積分하여 계산하고 전부 組合하면 다음과 같은 系方程式을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{matrix} [C_{11}] & [C_{12}] & [C_{13}] \\ [C_{21}] & [C_{22}] & [C_{23}] \\ [C_{31}] & [C_{32}] & [C_{33}] \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} \{A_S\} \\ \{A_D\} \\ \{A_S'\} \end{matrix} \right\} \\ & - \left[ \begin{matrix} [Z_{11}] & [Z_{12}] & [Z_{13}] \\ [Z_{21}] & [Z_{22}] & [Z_{23}] \\ [Z_{31}] & [Z_{32}] & [Z_{33}] \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} \{\lambda_S\} \\ \{\lambda_D\} \\ \{\lambda_S'\} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} \quad (4-25) \end{aligned}$$

여기서 첨자  $S'$ 는  $r \in S'$ 인 경우를 나타내며 각係數는 다음과 같다.

$$c_{mn} = \delta_{mn} + 2 \int_0^{L^e} [L_{in}] \frac{\partial G(r, r')}{\partial n} d\mu$$

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1; & m = n \\ 0; & m \neq n \end{cases}$$

$$z_{mn} = 2 \int_0^{L^e} [G(r, r')] L_{in} + G(r, r') L_{jn} d\mu$$

여기에서  $L_{in}$  및  $L_{jn}$ 은 式(4-19)에서 定義된 補間函數이다.

식(4-24)의 積分過程에서  $r = r'$ 인 경우에는 特異性이 나타나는데 이것은 Weak singularity이며 積分은 Cauchy's Principle Value Theorem에 의해 계산한다.<sup>3), 6), 8)</sup>

### 4.3 두 系方程式의 結合

BEM領域에서의 系方程式(4-25)를 전개하여  $\{A_S'\}$ 에 대해 정리하면 境界條件에 의해  $\{\lambda_D\} = \{\lambda_S\} = \{0\}$ 이므로

$$\{A_S'\} = \{C_{33}\}^{-1} [Z_{31}] \{\lambda_S\} - \{C_{33}\}^{-1} [C_{31}] \{A_S\} - \{C_{33}\}^{-1} [C_{32}] \{A_D\} \quad (4-26)$$

를 얻을 수 있고 또한  $\{A_S'\}$ 를 소거하면

$$\{CA\} \{A_S\} + \{CB\} \{A_D\} = \{Z\} \{\lambda_S\} \quad (4-27)$$

형태의 式을 얻을 수 있는데 여기서

$$\{CA\} = \{C_{11}\} - \{C_{13}\} [C_{33}]^{-1} [C_{31}]$$

$$\{CB\} = \{C_{21}\} - \{C_{23}\} [C_{33}]^{-1} [Z_{31}]$$

$$\{Z\} = \{Z_{11}\} - \{C_{31}\} [C_{33}]^{-1} [Z_{31}]$$

이다. 또 式(4-27)을  $\{\lambda_S\}$ 에 대해 전개하면

$$\{\lambda_S\} = \{ZA\} \{A_S\} + \{ZB\} \{A_D\} \quad (4-28)$$

를 얻으면 여기서

$$\{ZA\} = \{Z\}^{-1} \{CA\}, \quad \{ZB\} = \{Z\}^{-1} \{CB\}$$

이다.

식(4-28)의  $\{\lambda_S\}$ 는 FE領域과 BE領域이 서로 接하는 境界  $S$  상의 節點에서의  $\frac{\partial A}{\partial n}$  값이므로 이것은 FE領域의 系方程式(4-9)의  $\{\lambda_S\}$ 와 완

전히 同一한 것이다. 그러므로 式(4-28)을 式(4-9)에 대입하고 정리하면

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{matrix} [S_{11}] & [S_{12}] & [S_{13}] \\ [S_{21}] & [S_{22}] & [S_{23}] \\ [S_{31}] & [S_{32}] & [S_{33}] \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} \{A_R\} \\ \{A_S\} \\ \{A_D\} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \{f_R\} \\ \{f_S\} \\ \{f_D\} \end{matrix} \right\} \quad (4-29) \end{aligned}$$

를 얻을 수 있는데 이 式은 FE와 BE領域을 포함한 全 解析領域의 系方程式이며 여기서

$$\{S'_{22}\} = [S_{22}] + [G_{11}] [ZA]$$

$$\{S'_{23}\} = [S_{23}] + [G_{11}] [ZB]$$

$$\{S'_{32}\} = [S_{32}] + [G_{21}] [ZA]$$

$$\{S'_{33}\} = [S_{33}] + [G_{21}] [ZB]$$

이다.

식(4-29)를 풀면  $\{A_R\}$ ,  $\{A_S\}$  및  $\{A_D\}$ 를 구할 수 있고 여기에서 구해진  $\{A_S\}$ 와  $\{A_D\}$ 를 式(4-28)에 대입하여  $\{\lambda_S\}$ 를 구하여 다시 이들을 式(4-26)에 대입하여  $\{A_S'\}$ 를 구한다. 이렇게 되면 결국 FE領域내의 모든 백터퍼텐셜값  $\{A_R\}$ 과 BE領域의 境界상에서의 퍼텐셜값  $\{A_S\}$ ,  $\{A_D\}$ ,  $\{A_S'\}$  및  $\{\lambda_S\}$ 를 모두 알 수 있다.

또 이들이 모두 알려지면 式(4-14)로부터 BE領域내부의 任意點에 대한 퍼텐셜값도 구할 수 있다.

## 5. 모델의 要素分割 및 計算處理

### 5.1 要素分割 및 境界條件

#### 1) 混合適用方法에 서의 要素分割

混合適用方法을 이용하기 위한 要素分割圖는 그림 6과 같고 18~24번의 節點들이 BE領域내부에서 설정된 任意點들이다.

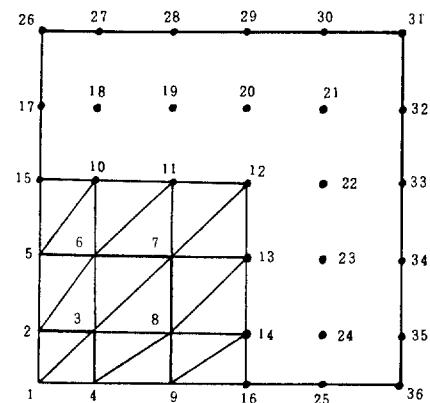


그림 6. 혼합적용방법에서의 요소분할

Fig. 6. Element subdivision in coupling method.

## 2) 有限要素法에 서의 要素分割

混合方法의 結果值와 比較하기 위해 그림 6에서와 同一한 座標에 節點을 가지도록 한 有限要素法에서의 要素分割圖가 그림 7 이며 有限要素法에서는 이외에도 混合方法과의 精度를 檢討하기 위해 要素數 및 節點數를 각각 98 및 64인 경우와 128 및 81인 경우로 하여 추가해석하였다.

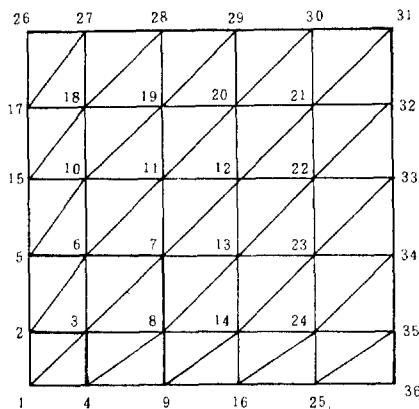


그림 7. 유한요소법에 서의 요소분할

Fig. 7. Element subdivision in FEM

## 3) 境界條件

그림 2와 같은 解析領域에서  $x$  軸과  $y$  軸에 接하는 부분에 대해서는 自然境界條件인  $\frac{\partial A}{\partial n} = 0$ 를 적용하였으며 境界  $S^*$ 에는 Dirichlet 條件인  $A = 0$ 를 적용하였다.

또 入力電流密度는  $10^6 [A/m^2]$ 를 주었으며 鐵心의 比透磁率은 8000으로 하였다.

## 5.2 計算處理過程

本 混合適用方法을 使用하여 그림 1과 같은 解析 모델을 解析하기 위한 Program의 Flow chart는 다음과의 그림 8과 같다.

## 6. 解析結果 및 檢討

### 6.1 磁束分布樣相

混合適用方法과 有限要素法에 의한 結果值로써 磁束分布樣相을 살펴본 結果, 근본적인 樣相은 그림 9와 같았으며 큰 差異는 나타나지 않았다.

### 6.2 結果值 比較 및 檢討

混合適用方法에 의한 結果值와 有限要素法에 의한 結果值를 比較한 것이 표 1에 주어져 있다.

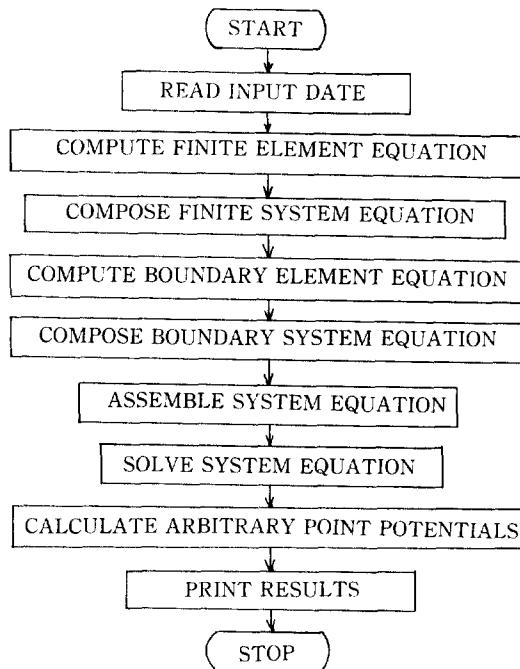


그림 8. 계산처리도

Fig. 8. Flow chart.

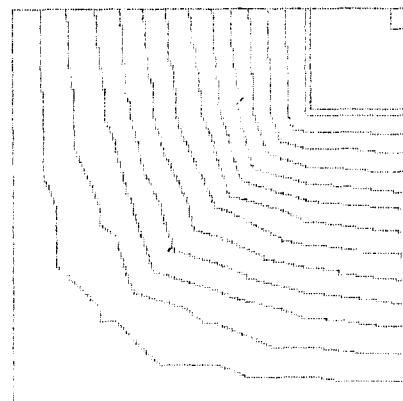


그림 9. 자속분포도

Fig. 9. Flux distribution.

여기서 64節點FEM과 81節點FEM의 結果值는 混合適用方法에서의 節點과 同一한 座標點의 값이다.

표 1의 結果에서 보면 有限要素法에 의한 結果值가 節點數를 증가시킴에 따라 混合適用方法에 의한 結果值에 接近함을 알 수 있으며 25개의 모든 節點에 대한 平均誤差는 36節點FEM과는 3.499 (%), 64節點FEM과는 2.518 (%) 그리고 81節點FEM과는 2.386 (%)로 나타났다.

일반적으로 有限要素法의 경우에는 解析函數의 近似化가 필수적이기 때문에 要素數를 많이 할 수록 誤差가 줄어들고 正解에 가깝게 接近할 수 있는 것으

表 1. 결과치 비교표

Table. Comarison of results.

NODE	POTENTIAL (FEM-BEM)	POTENTIAL (196FEM)	POTENTIAL (64FEM)	POTENTIAL (81FEM)
1	.800676741	.773591262	.782171798	.782063401
2	.800534854	.773591262	.782130091	.782281514
3	.800522641	.773477162	.782117879	.782809302
4	.800534854	.773489379	.782130091	.782281514
5	.800544001	.77339852	.782039238	.782730657
6	.80054029	.773394808	.782035525	.782726548
7	.800462595	.773318484	.781957285	.782648703
8	.800540282	.773394808	.782035525	.782726548
9	.800544001	.77339852	.782039238	.782730657
10	.45956768	.457785398	.465972181	.465954108
11	.455107275	.429156958	.434173566	.43405123
12	.455046739	.280142541	.283813304	.284421059
13	.455047379	.425156557	.434173555	.434051231
14	.479523885	.457785398	.465972181	.465954109
15	.487708288	.459113899	.467155956	.467069272
16	.487568322	.459113899	.467155956	.467069272
17	.230363088	.211201487	.214817083	.213521016
18	.221218359	.210473586	.214058596	.214832226
19	.190689711	.192805894	.195810111	.196622419
20	.139175121	.195128124	.136957576	.137328793
21	.065940684	.0675640521	.0688829082	.0689865331
22	.138986048	.125128124	.136457576	.137328794
23	.199880907	.192805898	.195810117	.196622422
24	.2119098759	.210473586	.214058596	.214832226
25	.222349731	.211209486	.214817085	.215621017

로 알려져 있다. 이러한 관점에서 위의 誤差結果를 보면 混合適用方法에서의 結果值가 節點數가 많은 有限要素法의 結果值와 더 近似하다는 것을 알 수 있으므로 混合適用方法에서의 結果는 상당한 精度를 가지고 있는 것으로 생각된다.

## 7. 結論

本研究에서는 變壓器의 近似모델에 대해 境界要素法과 有限要素法을 混合適用하여 磁束分布特性을 解析하고 有限要素法만에 의한 解析結果와 比較, 檢討하여 다음과 같은 結論을 얻었다.

- 全般的인 磁束分布樣相은 有限要素法과 큰 差異가 없었다.
- 有限要素法에 의한 結果值가 節點數를 증가시킴에 따라 混合適用方法에 의한 結果值에接近함을 알 수 있었다.
- 電子計算機의 記憶容量이 매우 감소되므로 小型 計算機의 사용도 가능하다.
- 鐵心내부에서의 結果值는 미리 계산하지 않아도 필요한 點의 座標값만 대입하면 바로 구할 수 있으므로 有限要素法에서와 같이 要素數를 많이 할 필요가 없다.
- 空隙磁束密度가 중요시되는 電氣機器의 解析에는 鐵心내부에서의 磁束分布가 그리 중요하지 않으므로 空隙부분에 대해서만 有限要素法을 적용하고 鐵心부분에는 境界要素法을 적용하면 같은 程度의 精度를 가진 解析結果를 얻는데 있어서 FEM만을 사

용한 方法에 比해 計算容量 및 時間을 절약할 수 있다.

그러나 일반적인 解析모델에 적합한 Green 函数의 보편적인 형태를 찾는데 대한 문제가 남아 있으므로 여기에 대한 研究가 계속된다면 近似모델에서 탈피하여 임의의 解析모델에 대한 精度높은 結果를 얻을 수 있을 것으로 기대된다.

## 参考文獻

- 任達鎬, 玄東石, 李喆稷, “有限要素法에 의한 變壓器磁束分布解析에 관한 研究”, 大韓電氣學會誌, vol. 29, no. 4, pp. 247-255, 1980.
- 任達鎬, 金燦五, “磁氣的非線型特性을 고려한 變壓器磁束分布의 有限要素解析에 관한 研究”, 大韓電氣學會誌, vol. 33, no. 12, pp. 1-8, 1983.
- Jaswon Symm, “Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics”, Academic Press, 1977.
- M.H.Lean and M.Friedman and A.Wexler, “Application of the Boundary Element Method in Electrical Engineering Problems”, Applied Science Publishers, 1979.
- H.Huebner, “The Finite Element Method for Engineers”, John Wiley and Sons, 1975.
- S.J.Salon, J. M. Schneider and S. Uda, “Boundary Element Solutions to the Eddy Current problems”, Proc. of the third International Seminar, Irvone, Calif., July, 1981.
- C.A.Brebbia, “The Boundary Element Method for Engineers”, Pentech Press, 1978.
- C.A.Brebbia and S.Walker, “Boundary Element Techniques in engineers”, Butterworth, 1980.
- R.Courant and D.hilbert, “Methods of Mathematical Physics”, Interscience Publishers, 1962.
- E.Tarasiewicz and J.Poltz, “Mutually Constrained Partial Differential and Integral Equations for an Exterior Field Problem”, IEEE Trans. Magnetics, vol. Mag-19, no. 6, pp.2307-2310, Nov., 1983.
- S.Cristina and A.D.Napoli, “Combination of Finite and Boundary Elements for Magnetic Field Analysis”, IEEE Trans. Magnetics, vol. Mag-19, no. 6, pp.2337-2339. Nov., 1983.