

論 文
34~7~2

# 有限要素法에 의한 變壓器 인덕턴스 計算

## The Calculation of Transformer Inductance by the Finite Element Method

裴 普 鎬\* · 盧 采 均\*  
(Jin-Ho Bae · Chae-Gyun Ro)

### Abstract

The finite element method for calculating single phase transformer inductance is presented in this paper. There are three basic definitions of saturated transformer inductance.

The set of nonlinear finite element equations is solved by the Newton-Raphson method which assures nearly quadratic convergence of the iteration process.

The effect of perturbation of currents of this transformer is used to calculate the saturated winding inductance.

This approach is used to calculate the apparent, effective and incremental inductance of single phase transformer.

The apparent inductance is in good agreement with testing result.

The approach enabled one to study the variation of winding inductance according to the saturation levels in the core at any operating point.

### 1. 序 論

變壓器의 인덕턴스는 정특성과 동특성을 결정하는 중요한 요소이다. 變壓器가 충격電壓등에 인하여 過渡現象이 일어난 경우에는 인덕턴스의 값에 대한 고찰이 있으나<sup>1)</sup> 定常電流에서 磁化曲線의 飽和때문에 생기는 인덕턴스의 變化에 대한 고찰은 없었다. 인덕턴스는 보통의 경우 綫보기인덕턴스를 사용하나 鐵心이 飽和된 경우에는 增分인덕턴스, 有效인덕턴스 및 綫보기 인덕턴스의 값은 다르다.<sup>2), 3)</sup>

綫보기인덕턴스는 同期機의 飽和리액턴스를 결정하는 要素이고 有效인덕턴스는 誘導性回路를 차단할 때 磁氣에너지 계산에 사용 되는 要素이며 增分인덕턴스는 直流리액티특성 및 각종 機器의 飽和 상태에서의 동특성을 결정하는 요소이다. 이들중 綫보기인덕턴스는 실험으로 쉽게 구할 수 있으나 다른 인덕

턴스는 정확히 구할 수 없다.

이들 인덕턴스를 구하려면 磁界에 따른 磁束密度를 정확히 구하여야 하는데 磁化曲線의 飽和때문에 계산이 곤란하다. 이들 문제를 電算機를 사용하여 처리한 것은 20년쯤 전부터 시작되었다. 數學的 처리방법은 크게 분류하면 有限要素法과 有限階差法이었다<sup>4)~16)</sup>

최근에 有限要素法을 적용하여 飽和된 回轉機의 인덕턴스를 Demerdash 등이 처음으로 계산하였다.<sup>17)</sup>

本 論文에서는 飽和된 變壓器의 인덕턴스를 有限要素法과 에너지攝動法을 사용하여 계산하고 이를 실측치와 비교 검토 하였다.

### 2. 有限要素法

#### 2.1 POISSON 방정식

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{B} \tag{2-1}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{2-2}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{2-3}$$

\*正 會 員 : 嶺南大 工大 電氣工學科 教授  
接受日字 : 1984年 12月21日

$$\vec{H} = \nu \vec{B} \quad (2-4)$$

위식에서 變壓器의 磁束分布를 2次元적으로 해석하기 위해서 아래의 가정을 둔다.

1) 入力電流密度는 Z 축방향의 성분만 가지며 導體는 연속된 단면적이고 電流密度는 일정하다.

2) 鐵心은 히스테리시스 손실은 없고 磁化特性曲線은 면적을 가지지 않는다.

3) 透磁率은 등방성이다.

4) 磁界는 準定常狀態로서 變位電流은 없다.

이상의 조건과 위식으로 부터 식(2-5)를 얻는다.

$$\frac{\partial}{\partial x} (\nu \frac{\partial A}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\nu \frac{\partial A}{\partial y}) = -J \quad (2-5)$$

(2-5) 식이 POISSON의 방정식이다.

磁束密度  $\vec{B}$ 는 (2-1)식으로 부터 아래식과 같이 된다.

$$\vec{B} = (\frac{\partial A}{\partial y}) \mathbf{a}_x + (-\frac{\partial A}{\partial x}) \mathbf{a}_y \quad (2-6)$$

(2-5) 식은 해석적 방법으로서는 잘 풀려지지 않는다. 따라서 有限要素法을 적용하고자 한다.

### 2.2 有限要素方程式

앞절 식(2-5)는 非線型偏微分方程式이다. 이 해를 구하기 위해서 Chari는 Euler의 에너지함수  $F(A)$ 를 도입하였다.

$$F(A) = \iint_R (\int_0^B \nu B dB - JA) ds \quad (2-7)$$

$R$ 는  $X, Y$  평면에서의 磁場영역이다.

$$\delta F = 0 \quad (2-8)$$

위 식을 영역  $R$ 내에서 만족하는  $A$ 의 값들이 식(2-5)의 해임을 증명하였다.<sup>1)</sup>

이 해를 구하기 위해서 영역  $R$ 를 그림 1과 같이 1次三角要素들로 분할하였다. 임의의 三角要素  $e$ 안에서의 磁位값은 세 정점 磁位값의 일차다항식 및 위치함수이며 식(2-9)와 같이 근사화된다.<sup>1)~13)</sup>

$$A_e(x, y) = \frac{1}{2\Delta_e} \sum_{j=k, l, m} (b_j + q_j x + r_j y) A_j \quad (2-9)$$

여기서

$$\begin{aligned} b_k &= x_l y_m - x_m y_l, & q_k &= y_l - y_m, & r_k &= -(x_l - x_m) \\ b_l &= x_m y_k - x_k y_m, & q_l &= y_m - y_k, & r_l &= -(x_m - x_k) \end{aligned} \quad (2-10)$$

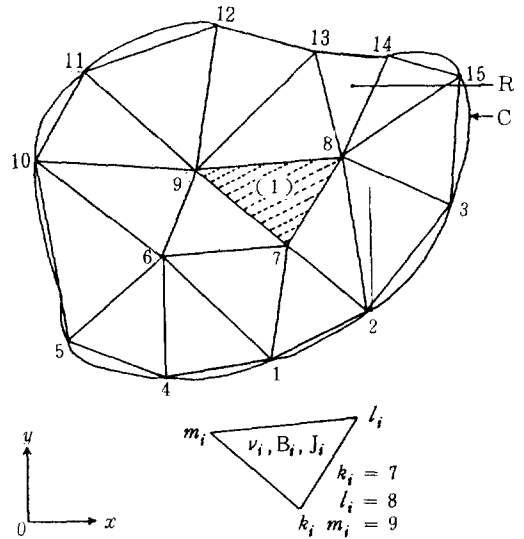


그림 1. 영역의 三角要素분할

Fig. 1. Discretization of the field region by triangular finite element.

$b_m = x_k y_l - x_l y_k, q_m = y_k - y_l, r_m = -(x_k - x_l)$  영역은 여러개의 삼각요소로 구성되어 있으므로 식(2-7) 및 (2-8)은 아래식(2-11) 및 (2-12)와 같이된다.

$$F(A) \cong \sum_{e=1}^{n_e} F_e(A_e) \quad (2-11)$$

$$= \sum_{e=1}^{n_e} \iint_{R_e} (\int_0^B \nu B dB - J_e A_e) dx dy$$

$$\frac{\partial F(A)}{\partial A_h} \cong \sum_{e=1}^{n_e} \frac{\partial F_e(A_e)}{\partial A_h} = 0 \quad (h=1, 2, \dots, n) \quad (2-12)$$

위 식들로 부터 식(2-13)을 얻는다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_e(A_e)}{\partial A_h} &= \sum_{j=k, l, m}^{n_e} \frac{\nu_e}{4\Delta_e} (q_j q_h + r_j r_h) A_j \\ &\quad - \Delta_e J_e / 3 \quad (h=k, l, m) \end{aligned} \quad (2-13)$$

$e$ 는  $h$ 번째 점을 공유하는 모든 요소를 포함한다.  $h$ 를 전영역의 점  $n$ 개에 대해서 적용하면 식(2-13)은 行列로 표시되고 식(2-14)와 같다.

$$\underline{S} \underline{A} = \underline{I} \quad (2-14)$$

위식에서  $\underline{S}$  행렬은 시스템행렬이라 하고 정방행렬이고, Sparse이고 특이행렬이며 대칭인 성질을 갖는다.

경계조건들을 代入하여 식(2-14)의 행렬을 변형시켜서 푼다.<sup>2)</sup>

이 行列의  $j$  k번째 係數값  $S_{jk}$ 는 식(2-15)와 같다.

$$S_{jk} = \sum_e \frac{\nu_e}{4 \Delta_e} (q_j q_k + r_j r_k) \quad (2-15)$$

여기서  $e$  는  $j$  點과  $k$  點을 공유하는 모든 요소에 적용된다.

$\underline{I}$  行列의  $j$  번째 성분  $I_j$  는 식(2-16)으로 표시된다.

$$I_j = \sum_e \Delta_e J_e / 3 \quad (2-16)$$

여기서  $e$  는  $j$  點을 공유하는 모든 요소를 포함한다.

식(2-14)를 풀면 각점에서 磁位가 결정된다.

임의의 三角要素  $e$  에서의 세정점의 磁位값  $A_{ke}, A_{le}$  및  $A_{me}$  가 결정되면  $e$  要素의 磁束密度的  $x, y$  방향 성분  $B_{xe}, B_{ye}$  는 식(2-9)와 (2-6)으로부터 아래식으로 주어진다.

$$B_{xe} = \frac{\partial A_e}{\partial y} = \frac{1}{2 \Delta_e} (A_k r_k + A_l r_l + A_m r_m)$$

$$B_{ye} = -\frac{\partial A_e}{\partial x} = \frac{-1}{2 \Delta_e} (A_k q_k + A_l q_l + A_m q_m) \quad (2-17)$$

따라서 磁束密度는 다음과 같이 구해진다.

$$B = \sqrt{B_{xe}^2 + B_{ye}^2} \quad (2-18)$$

### 2.3 有限要素方程式의 해

앞절의 식(2-14)는 磁氣抵抗率이 상수일 때는 線型聯立方程式이나 飽和이 이루어진 경우 非線型이다. 따라서 이를 풀기위해서 Newton-Raphson 法을 적용한다.<sup>7)</sup>

식(2-14)를 아래식(2-19)와 같이둔다.

$$\underline{G}(\underline{A}) = \underline{S} \underline{A} - \underline{I} \quad (2-19)$$

만약  $\underline{A}$  가 참값이면  $\underline{G}(\underline{A}) = \underline{0}$  이 된다.

실제로는 식(2-19)를 만족하는  $\underline{A}$  의 값은 몇번 반복계산후에 구해진다.  $i$  번째 반복후에 磁位값을  $\underline{A}^i$  라하고  $\underline{A}^i$  가 참값이 아니면 아래식(2-20)과 같이 쓸 수 있다.

$$\underline{G}(\underline{A}^i) = \underline{S}^i \underline{A}^i - \underline{I} \neq \underline{0} \quad (2-20)$$

함수  $\underline{G}(\underline{A}^{i+1})$  을  $\underline{A} = \underline{A}^i$  에서 테일러급수로 전개하면 식(2-21)과 같다.

$$\underline{G}(\underline{A}^{i+1}) = \underline{G}(\underline{A}^i) + (\underline{A}^{i+1} - \underline{A}^i) \left. \frac{\partial \underline{G}(\underline{A})}{\partial \underline{A}_1} \right|_{\underline{A} = \underline{A}^i}$$

$$+ (\underline{A}_2^{i+1} - \underline{A}_2^i) \left. \frac{\partial \underline{G}(\underline{A})}{\partial \underline{A}_2} \right|_{\underline{A} = \underline{A}^i} \dots$$

$$+ (\underline{A}_{nn}^{i+1} - \underline{A}_{nn}^i) \left. \frac{\partial \underline{G}(\underline{A})}{\partial \underline{A}_{nn}} \right|_{\underline{A} = \underline{A}^i}$$

+ 고차항 (2-21)

위식에서 고차항을 무시하고  $\underline{A}^{i+1}$  이 참값에 가깝

다고 하면 식(2-22)와 같다.

$$\left[ \begin{array}{c} \frac{\partial \underline{G}(\underline{A})}{\partial \underline{A}_1} \\ \frac{\partial \underline{G}(\underline{A})}{\partial \underline{A}_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \underline{G}(\underline{A})}{\partial \underline{A}_{nn}} \end{array} \right]_{\underline{A} = \underline{A}^i} (\underline{A}^{i+1} - \underline{A}^i) = \underline{G}(\underline{A}^i)$$

여기서  $\underline{J}(\underline{A}^i) = \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial \underline{G}(\underline{A})}{\partial \underline{A}_1} \\ \frac{\partial \underline{G}(\underline{A})}{\partial \underline{A}_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \underline{G}(\underline{A})}{\partial \underline{A}_{nn}} \end{array} \right]_{\underline{A} = \underline{A}^i} \quad (2-22)$

위식을 Jacobian 행렬이라 하며 이 계산과정은 참고문헌 7에 상세히 기록되어 있다.

$$\underline{J}(\underline{A}^i) \Delta \underline{A}^i = \{ \underline{S}^i \underline{A}^i - \underline{I} \} \quad (2-23)$$

$$\text{단 } \Delta \underline{A}^i = \underline{A}^{i+1} - \underline{A}^i \quad (2-24)$$

식(2-23)은  $\Delta \underline{A}^i$  대해서 線型임으로 해는 Gauss의 소거법을 적용하였다.

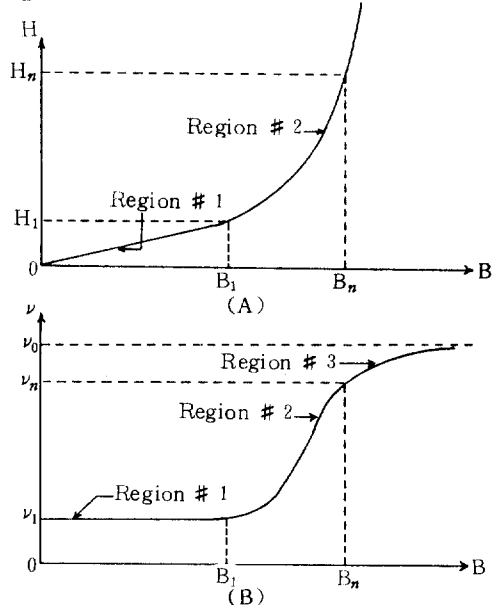
$$\underline{A}^{i+1} = \underline{A}^i + \Delta \underline{A}^i \quad (2-25)$$

$\underline{A}^{i+1}$  이 수렴되었으면 진치이다.

### 2.4 磁化曲線의 모델링

식(2-14)를 풀기위해서는  $\nu$ - $B$  曲線을 알아야 한다.  $\nu$ - $B$  曲線의 핏팅법은 여러가지 방법이 있으나<sup>7), 14)</sup> 본論文中에서 Cubic spline interpolation polynomial 방법을 채택한다.<sup>14)</sup>

그림 2A, 2B에 각각  $B$ - $H$  曲線과  $\nu$ - $B$  曲線



Region # 1: Linear Region # 2: Cubic spline  
Region # 3: Inverse Function

그림 2. 磁化曲線

Fig. 2. Representation of nonlinear magnetization characteristics.

이 그려져있다. 그림에서와 같이 세부분으로 나누어서 생각한다.

영역 # 1 은 磁氣抵抗率 이 일정한 값이고 영역 # 2 에서는  $\nu - B$  曲線을 Cubic spline interpolation polynomial 로 나타내었다.

영역 # 3 에서는 曲線이 심하게 飽和되는 지점밖이며 역함수로 표시하였다.

이 論文에 사용된 公式 關係에 대한 제값은 아래와 같다.

1) 영역 # 1.  $\nu = 153.8$  (2-26)

2) 영역 # 2.  $\nu(x) = (2x^3 - 3x^2 + 1)\nu(1) + (-2x^3 + 3x^2)\nu(2) + (x^3 - 2x^2 + x)\nu'(1) + (x^3 - x^2)\nu'(2)$  (2-27)

단  $x = \frac{B - B_1}{B_2 - B_1}$   $B_2 \geq B \geq B_1$   $B_2 = 1.9$ ,  $B_1 = 1.3$

3) 영역 # 3.  $\nu = \nu_0 + \frac{B_2(\nu_2 - \nu_0)}{B}$  (2-28)

단,  $B > B_2$

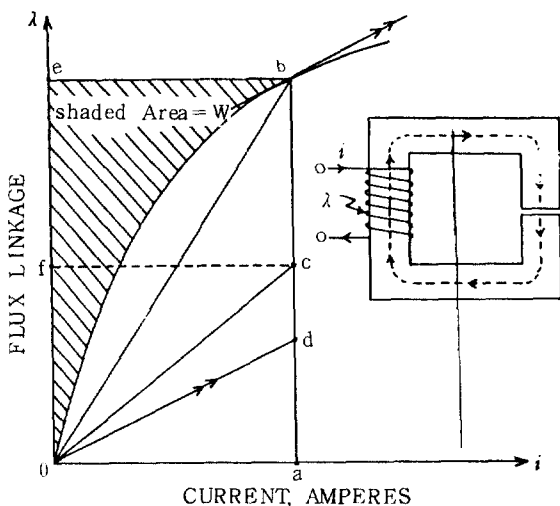
단,  $\nu(1) = 153.8$ ,  $\nu(2) = 10.526$

$\nu'(1) = 0$ ,  $\nu'(2) = 8.120$

### 3. 인덕턴스의 계산

飽和된 電氣機器의 세가지 인덕턴스의 값은 아래 식과 같으며 그림 3 으로 표시하였다.

1) 겉보기인덕턴스  $L_{app} = \frac{\lambda}{i} = \frac{ab}{oa}$  (3-1)



$L_{app} = \lambda/i = ab/oa$ ,  $L_{eff} = 2w/i^2 = ac/oa$ ,  $L_{inc} = d\lambda/di = ad/oa$

그림 3. 磁化曲線에서의 인덕턴스 표시

Fig. 3. Interpretation of inductance in terms of magnetization curve.

2) 有效인덕턴스  $L_{eff} = \frac{2w}{i^2} = \frac{ac}{oa}$  (3-2)

3) 増分인덕턴스  $L_{inc} = \frac{\partial \lambda}{\partial i} = \frac{ad}{oa}$  (3-3)

그림 3에서 겉보기인덕턴스는 ob의 기울기 이고 이는 단위전류당 쇄교자속수를 뜻한다. 빗금친 부분(obe)는 磁氣에너지 W이고 點c는 ab선상에 있고 면적 ocf와 면적 obe는 같게한 것이다. 따라서 oc의 기울기가 有效인덕턴스는 b點에서의 접선의 기울기이고 이는 od의 기울기와 같다.

### 3.1 多重捲線에서의 에너지

n個의 多重捲線으로 구성된 시스템의 저장된 에너지를 구하여 본다.

j번째 코일의 電壓, 低抗, 電流 및 磁束鎖交數를 각각  $V_j$ ,  $R_j$ ,  $i_j$  및  $\lambda_j$  라 하면 이들 관계식은 아래와 같다.

$V_j = R_j i_j + \frac{d\lambda_j}{dt}$  (3-4)

여기서  $\lambda_j$ 는 n個 코일에 흐르는 電流의 함수이다.

$\lambda_j = \lambda_j(i_1, i_2, \dots, i_n)$  (3-5)

식(3-5)와 (3-4)로 부터

$V_j = R_j i_j + \frac{\partial \lambda_j}{\partial i_1} \frac{di_1}{dt} + \frac{\partial \lambda_j}{\partial i_2} \frac{di_2}{dt} + \dots + \frac{\partial \lambda_j}{\partial i_n} \frac{di_n}{dt}$  (3-6)

인덕턴스  $L_{jk}$ 는

$L_{jk} = \frac{\partial \lambda_j}{\partial i_k} \begin{cases} (j=1, 2, \dots, n) \\ (k=1, 2, \dots, n) \end{cases}$  (3-7)

식(3-7)과 (3-6)으로 부터

$V_j = R_j i_j + L_{j1} \frac{di_1}{dt} + L_{j2} \frac{di_2}{dt} + \dots + L_{jn} \frac{di_n}{dt}$  (3-8)

j번째 코일의 순시전력을  $P_j$ 라 하면

$P_j = V_j i_j = R_j i_j^2 + i_j L_{j1} \frac{di_1}{dt} + i_j L_{j2} \frac{di_2}{dt} + \dots + i_j L_{jn} \frac{di_n}{dt}$  (3-9)

j번째 코일에 저축되는 磁氣에너지  $W_j$ 는 식(3-9)에서  $i_j^2 R_j$  항을 제외한 나머지를 시간에 대해서 적분하면 된다.

$W_j = \sum_{k=1}^n \int_{i_k(0)}^{i_k(t)} (L_{jk} i_j) di_k$  (3-10)

全 系에 저축되는 총자계에너지 W는

$$W = \sum_{j=1}^n W_j \quad (3-11)$$

각 코일에 흐르는 電流에 미소증분( $\Delta i_1, \Delta i_2, \dots, \Delta i_n$ )이 일어나도  $L_{jk}$ 의 값은 거의 변하지 않으므로 全 系의 에너지 증분  $\Delta W$ 는 아래와 같다.

$$\Delta W = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n L_{jk} \int_{i_k}^{i_k + \Delta i_k} i_j d i_k \quad (3-12)$$

식(3-12)를  $j = k$  일때와  $j \neq k$  일때로 분리해서 표시하면 식(3-13)과 같다.

$$\begin{aligned} \Delta W &= \sum_{j=1}^n L_{jj} \int_{i_j}^{i_j + \Delta i_j} i_j d i_j \\ &+ \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n L_{jk} \int_{i_k}^{i_k + \Delta i_k} i_j^* d i_k \\ &= \sum_{j=1}^n (i_j \Delta i_j + \Delta i_j^2 / 2) L_{jj} \\ &+ \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n L_{jk} (i_j + \Delta i_j / 2) \Delta i_k \end{aligned} \quad (3-13)$$

단,  $i_j^* = i_j + \Delta i_j / 2$  이므로 따라서 각 코일의 電流가 각각 미소분( $\Delta i_j, j = 1, 2, \dots, n$ ) 만큼 증가한 경우 全 系의 총 에너지  $\bar{W}$ 는 아래와 같다.

$$\bar{W} = W + \Delta W \quad (3-14)$$

그리고 인덕턴스  $L_{jk}$ 는 일정값인  $i_j (j = 1, 2, \dots, n)$  부근에서는 일정하다고 할 수 있다. 총에너지를  $j$  번째 코일에 흐르는 電流의 증분  $\Delta i_j$ 로 편미분하면 식(3-15)로 표시된다.

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial (\Delta i_j)} = \frac{\partial W}{\partial (\Delta i_j)} + \frac{\partial (\Delta W)}{\partial (\Delta i_j)} \quad (3-15)$$

식(3-15)에서 에너지  $W$ 는  $\Delta i_j$ 의 함수가 아님으로 식(3-16)과 같다.

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial (\Delta i_j)} = \frac{\partial (\Delta W)}{\partial (\Delta i_j)} \quad (3-16)$$

식(3-16)과 (3-13)으로 부터

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{W}}{\partial (\Delta i_j)} &= (i_j + \Delta i_j) L_{jj} \\ &+ \sum_{k=1}^n \Delta i_k (L_{jk} + L_{kj}) / 2 \end{aligned} \quad (3-17)$$

식(3-17)을 한번더  $\Delta i_j$ 에 대해서 편미분하면 식(3-18)로 된다.

$$\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial (\Delta i_j)^2} = L_{jj} \quad (3-18)$$

또 식(3-17)을  $\Delta i_k$ 에 대해서 편미분하면 식(3-19)와 같고 이는 상호인덕턴스다.

$$\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial (\Delta i_j) \partial (\Delta i_k)} = (L_{jk} + L_{kj}) / 2 = L_{jk} = L_{kj} \quad (3-19)$$

### 3.2 에너지攝動法에 의한 인덕턴스의 계산

3.1 절의 식(3-18), (3-19)의 계산은 아래와 같다.<sup>22)</sup>

$$\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial (\Delta i_j)^2} \cong [W(i_j - \Delta i_j) - 2W(i_j) + W(i_j + \Delta i_j)] / (\Delta i_j)^2 \quad (3-20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial (\Delta i_j) \partial (\Delta i_k)} &\cong [W(i_j + \Delta i_j, i_k + \Delta i_k) \\ &- W(i_j - \Delta i_j, i_k + \Delta i_k) \\ &- W(i_j + \Delta i_j, i_k - \Delta i_k) \\ &+ W(i_j + \Delta i_j, i_k - \Delta i_k)] \\ &/ 4 \Delta i_j \Delta i_k \end{aligned} \quad (3-21)$$

$$\begin{aligned} \text{단, } W(i_j \pm \Delta i_j, i_k \pm \Delta i_k) &= W(i_j, i_k) \\ &+ \Delta W(\pm \Delta i_j, \pm \Delta i_k) \end{aligned} \quad (3-22)$$

따라서  $L_{jj}, L_{jk}$ 는 아래식과 같다.

$$L_{jj} \cong [W(i_j + \Delta i_j) - 2W(i_j) + W(i_j - \Delta i_j)] / (\Delta i_j)^2 \quad (3-23)$$

$$\begin{aligned} L_{jk} = L_{kj} &\cong [W(i_j + \Delta i_j, i_k + \Delta i_k) \\ &- W(i_j - \Delta i_j, i_k + \Delta i_k) \\ &- W(i_j + \Delta i_j, i_k - \Delta i_k) \\ &+ W(i_j - \Delta i_j, i_k - \Delta i_k)] \\ &/ (4 \Delta i_j \Delta i_k) \end{aligned} \quad (3-24)$$

따라서 電流의 增분에 대한 에너지를 구하면 인덕턴스를 계산할 수 있다.

### 3.3 겹보기 인덕턴스

겹보기인덕턴스를 계산하는 과정은 아래와 같다.

1)  $\underline{SA} = \underline{I}$ 를 Newton-Raphson 반복계산법을 적용하여 수렴시킨다. 이렇게 해서 구한 요소들의 磁氣抵抗率을 겹보기磁氣抵抗率  $\nu_{e1}$ 이라한다.

2) 각코일의 電流의 미소변화를 가정한다. 즉  $(i_j + \Delta i_j, i_k + \Delta i_k) \dots, (i_j - \Delta i_j, i_k + \Delta i_k), (i_j - \Delta i_j, i_k - \Delta i_k)$  등의 電流에 대해서 磁氣抵抗率은 동작점 부근에서 상수이므로 식(2-14)는 선형이다. 磁氣抵抗率의 값은 1항에서 구한결과를 대입하여 이선형방정식을 풀면 磁位가 결정되고 磁位값으로 부터 각요소소의 磁束密度가 결정된다.

3) 2항에서 구한 각요소소의 磁束密度  $B_e$ 로서 磁氣에너지를 구한다.

$$W = \sum_{e=1}^n \frac{1}{2} \nu_{e1} B_e^2 \Delta e \text{ dm} \quad (3-25)$$

4) 3항에서 구한 磁氣에너지 값을 식(3-23), (3-24)에 대입하여 겹보기자기인덕턴스 및 相互인덕턴스를 구한다.

3.4 有效인덕턴스  $L_{eff}$

1) 3.3 절에서 구한  $B_e$  값을 사용하여 有效磁氣抵抗率  $\nu_{e2}$  를 구한다.

$$\nu_{e2} = \frac{1}{2} H^2 / \int_0^{B_e} H dB \quad (3-26)$$

2) 식(3-26)에서 구한  $\nu_{e2}$  를  $\nu_{e1}$  대신에 사용하여 3.3 절 2항에서 하는 연산을 행한다.

3) 2항에서 구한 磁氣密度  $B_e$  로써 磁氣에너지를 구한다.

$$W = \sum_{e=1}^{n_e} \frac{1}{2} \nu_{e2} B_e'^2 \Delta_e d_m \quad (3-27)$$

4) 3항에서 구한 磁氣에너지 값을 식(3-23), (3-24)에 대입하여 有效자기인덕턴스 및 相互인덕턴스를 구한다.

3.5 増分인덕턴스  $L_{inc}$

1) 3.3 절 1항에서 구한  $B_e$  값을 이용하여 増分磁氣抵抗率  $\nu_{e3}$  는 아래식으로 구한다.

$$\nu_{e3} = \frac{\partial H}{\partial B} \Big|_{B=B_e} \quad (3-28)$$

2) 식(3-28)에서 구한  $\nu_{e3}$  를  $\nu_{e1}$  대신에 사용하여 3.3 절 2항에서와 같은 연산을 행한다.

3) 2항에서 구한 요소의 磁束密度  $B_e'$  를 대입하여 磁氣에너지를 구한다.

$$W = \sum_{e=1}^{n_e} \frac{1}{2} \nu_{e3} B_e'^2 \Delta_e d_m \quad (3-29)$$

4) 3항에서 구한 에너지 값을 식(3-23), (3-24)에 대입하여 増分자기인덕턴스 및 相互인덕턴스를 구한다.

4. 變壓器 적용 실예

4.1 變壓器 사양 및 요소분할

變壓器 鐵心の 크기와 모형은 그림 4와 같으며 사양은 표 1과 같다.

鐵心은 X, Y 축에 대칭임으로 요소분할은 그림 5와 같이 1 상한에 대해서만 하였다. 그림에서 보는 바와 같이 境界條件으로서는  $X=0$  인  $y$  축상에서는 鐵心이 좌우로 대칭이고 入力電流密度의 方向이 반대가 되며 等磁位線이고 이값은 0이다. ( $A=0$ )

變壓器의 상단  $y=8.4$  와 우단  $x=8.4$  인 직선상에서는 變壓器 鐵心이 외부 공간과 맞닿는 경계점이다.

이 부분에서는 누설磁束을 무시하여  $A=0$  라 놓았다. 그리고  $y=0$  인  $x$  축상에서 磁束線이 수직이므로  $\frac{\partial A}{\partial n} = 0$  이 된다.

여기서 이용한 鐵心 자질은 M-19이다. 초기 磁氣抵抗率은  $\nu = 153.8$  이고 1次 및 2次電流密度는 아래와 같다.

$$J_1 = -1,786,000 (A/m^2), J_2 = -1,554,000 (A/m^2)$$

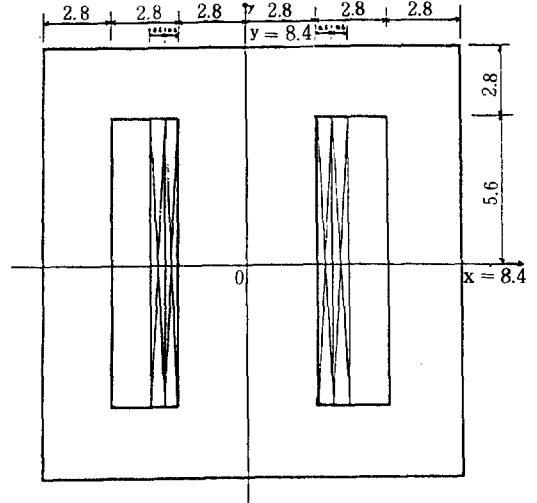


그림 4. 코아모형  
Fig. 4. Core dimension.

표 1. 變壓器 사양

Table 1. Specification of single phase transformer.

鐵 心 型	外 鐵 型
定 格 容 量	1.5 (KVA)
捲 線 數 (1次)	85
捲 線 數 (2次)	195
1 次 電 壓	120 (V)
2 次 電 壓	277 (V)
勵 磁 電 流	0.865 (A)
1 次 定 格 電 流	12.5 (A)
2 次 定 格 電 流	5.2 (A)
Z 方 向 길 이 (dm)	7.6 (cm)

4.2 프로그램<sup>18), 19), 21)</sup>

有限要素法을 사용하여 인덕턴스를 계산하기 위한 플로우 차트를 그림 6에 나타내었다.

첫째 부분은 각 정점 및 요소들의 데이터를 읽어들이고 이것들이 잘못되지 않았는지를 판단한다.

두번째 부분에서는 要素方程式을 세운다. 각요소에서 처음  $B, \nu, \frac{\partial \nu}{\partial B}$  를 정하고 이로부터 시스템行列을 조립하여 Newton-Raphson法을 적용할 수 있도록 한다. 그러다음 線型方程式을 풀고 이렇게 풀 A의 값들로부터 각요소의  $B, \nu, \frac{\partial \nu}{\partial B}$  의 값들이 구해진다. 이값들이 수렴하지 않으면 다시 반복

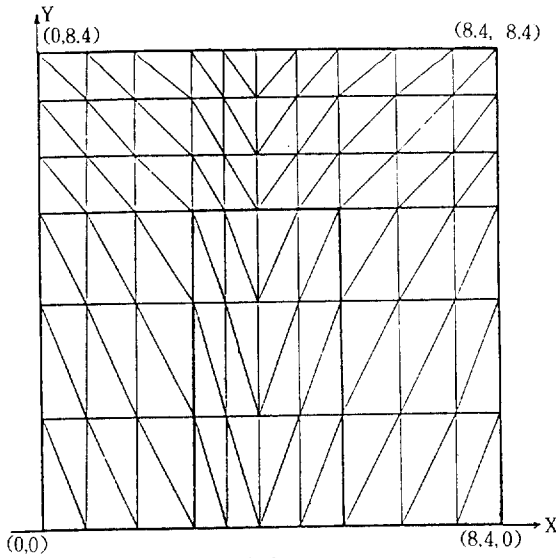


그림 5. 요소분할도

Fig. 5. Element subdivision.

하고 수렴이 되면  $\nu$  값은 고정된다.

이  $\nu$  값이 고정이 되고 나면 다음 단계로 넘어간다. 이때 電流를 약간 변화시켜 다시 線型方程式을 풀고 이로 부터 B 값을 계산하고 에너지를 계산하여 최종적으로 인덕턴스를 계산한다.

4.3 계산값 및 검토

인덕턴스 계산을 鐵心이 飽和되지 않은 경우와 飽和된 경우에 대해서 有限要素法과 에너지攝動法을 사용하여 4-1 절의 표 1에 공시된 變壓器의 각종 인덕턴스를 구한결과 표 2 와 같다.

표 2 에서 누설인덕턴스는 식 (4-1) (4-2) 로 구하였다.

$$L_{pl} = L_{pp} - (N_p / N_s) L_{ps} \quad (4-1)$$

$$L_{sl} = L_{ss} - (N_s / N_p) L_{ps} \quad (4-2)$$

또한 線型에 있어서 인덕턴스 계산값은 아래공식에 따랐다.

표 2. 單相 變壓器 인덕턴스

Table 2. Inductance of single phase transformer.

		1 차자기 인덕턴스 $L_{app}$ (H)	1 차누설 인덕턴스 $L_{pl}$ (H)	상 호 인덕턴스 $L_{sp}$ (H)	2 차자기 인덕턴스 $L_{ss}$ (H)	2 차누설 인덕턴스 $L_{sl}$ (H)
線 型	중 래 공 식	0.8010		1.868	4.357	
	F · E 方 法	0.8280		1.8990	4.3578	
非 線 型 法	실 측 치	0.355				
	경보기인덕턴스	0.355	0.00148	0.8111	1.861	0.00547
	有 効인덕턴스	0.194	0.000897	0.443	1.020	0.00370
	增 分인덕턴스	0.0609	0.000310	0.139	0.321	0.00212

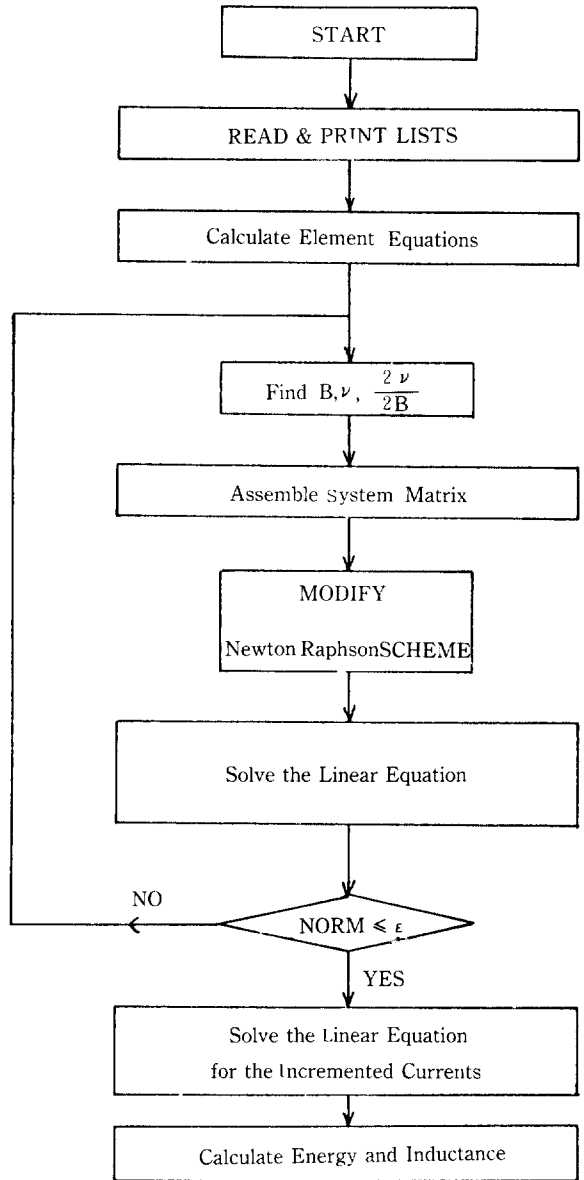


그림 6. 플로우차트

Fig. 6. Flow chart.

$$L_{pp} = N_p^2 / R_c \quad (4-3)$$

$$L_{ss} = N_s^2 / R_c \quad (4-4)$$

$$L_{sp} = N_p N_s / R_c \quad (4-5)$$

非線型일 경우 1次自己인덕턴스만 측정하였다. 開路試驗을 행하여 電壓 및 電流의 기본파성분을  $V_1, I_1$  이라하고 이때 각속도를  $\omega$  라 하면  $L$ 의 값은 아래식과 같다.

$$L_{pp} = \frac{V_1}{\omega I_1} \quad (4-6)$$

실측한 인덕턴스 값과 계산한 1次 걸보기自己인덕턴스의 값은 거의 일치한다. 따라서 増分 및 有效인덕턴스 값도 실제와 비슷할 것으로 예상된다.

표 2에서 보는 바와 같이 飽和가 이루어지면 인덕턴스의 값은 현저히 작어짐을 알 수 있다. 飽和시 有效인덕턴스의 값은 걸보기인덕턴스의 1/2 정도이며, 増分인덕턴스는 훨씬 적어 1/5.5 정도의 값으로 나타났다.

### 5. 結 論

有限要素法과 에너지攝動法을 사용하여 變壓器의 각종 인덕턴스를 계산할 수 있는 방법을 제시하였다.

여기서는 걸보기인덕턴스, 有效인덕턴스, 및 増分인덕턴스에 대하여 취급하였고 해석모델로서 2개의 捲線을 가진 單相變壓器를 취급하였다.

變壓器 鐵心の 磁化特性曲線을 3부분으로 구분하여 磁氣抵抗率  $\nu$ 가 상수인 부분과 Cubic spline interpolation polynomial로 표시되는 부분과 逆函數로 표시되는 부분으로 구분하여 계산처리 하였다.

주어진 모델에 대하여 걸보기인덕턴스 有效인덕턴스, 増分인덕턴스를 수치적으로 계산하였는데 이중 걸보기인덕턴스는 실제 측정치와 비교한 결과 그 값이 잘 일치하고 있다.

따라서 有效인덕턴스 및 増分인덕턴스의 값도 합리적 값이라 생각된다.

이상의 결과로 볼때 본 研究에서 얻어진 방법을 널리 이용될 수 있으리라고 생각된다.

또한 増分인덕턴스를 알므로써 電氣機器의 設計製作시 동특성을 예측할 수 있으며 아울러 有效인덕턴스로써 磁氣에너지 상태를 정확히 추정할 수 있다.

- $\vec{H}$  : 磁場의 세기
- $\vec{j}$  : 電流密度
- $\nu$  : 磁氣抵抗率
- $\vec{D}$  : 誘電束密度
- $a_x$  :  $x$  方向의 단위벡터
- $a_y$  :  $y$  方向의 단위벡터
- $a_z$  :  $z$  方向의 단위벡터
- $\Delta_e$  :  $e$  要素의 면적
- $n_e$  : 要素의 총수
- $R_e$  :  $e$  번째 요소
- $B_e$  :  $e$  번째 요소의 磁束密度
- $J_e$  :  $e$  번째 요소의 電流密度
- $nn$  : 정점의 총갯수
- $B_{re}$  :  $e$  요소에서의  $x$  方向의 磁束密度
- $B_{ye}$  :  $e$  요소에서의  $y$  方向의 磁束密度
- $\vec{n}$  : 경계면에 수직단위 벡터
- $\nu_0$  : 진공의 磁氣抵抗率
- $\underline{S}$  : System Matrix
- $\underline{I}$  : Forcing Matrix
- $\underline{A}$  : 磁位 Matrix
- $\lambda$  : 磁束鎖交數
- $i$  : 捲線에 흐르는 電流
- $W$  : 磁場에서의 저장에너지
- $L_{app}$  : 걸보기 인덕턴스
- $L_{eff}$  : 有效 인덕턴스
- $L_{inc}$  : 増分 인덕턴스
- $V_j$  :  $j$  번째 코일의 電壓
- $R_j$  :  $j$  번째 코일의 抵抗
- $i_j$  :  $j$  번째 코일의 電流
- $\lambda_j$  :  $j$  번째 코일의 磁束鎖交數
- $P_j$  :  $j$  번째 코일의 瞬時電力
- $\Delta i_j$  :  $j$  번째 코일에 흐르는 電流의 증분
- $dm$  :  $z$  方向의 길이
- $N_p$  : 변압기 일차권선수
- $N_s$  : 변압기 이차권선수
- $R_c$  : 변압기 철심의 磁氣抵抗
- $A_{ke}$  :  $e$  번째 요소의  $k$  點의 磁位
- $A_{je}$  :  $e$  번째 요소의  $l$  點의 磁位
- $A_{me}$  :  $e$  번째 요소의  $m$  點의 磁位

### 參 考 文 獻

1) P.I. Fergestad, T. Henriksen, "Inductances for the calculation of transient oscillations in transformers.", paper 73394-4 PES summer

### 記 號 說 明

- $\vec{A}$  : 磁位벡터
- $\vec{B}$  : 磁束密度



- meeting, 1973.
- 2) Matsch, L.W., "Electromagnetic and electromechanical machines" Harper and Row, 1977, pp. 68-69.
  - 3) Gourishankar, Kelly., "Electromechanical energy conversion.", Intext. Inc. 1973.
  - 4) Ahamed, S.V. and Erdelyi, E.A., "Nonlinear theory of salient pole machines." IEEE Trans., Vol. PAS-85, pp. 61-70, 1966.
  - 5) Ahamed, S.V. and Erdelyi, E.A., "Flux distribution in dc machines on-load overloads.", IEEE Trans., Vol. PAS-85, pp. 960-967, 1966.
  - 6) Erdelyi, E.A., Sarma, M.S. and Coleman, S.S. "Magnetic fields in nonlinear salient pole alternators.", IEEE Trans., Vol. PAS-87, pp. 1848-1856, 1968.
  - 7) Chari, M.V.K., "Finite element analysis of nonlinear magnetic fields.", Ph. D. Dissertation, McGill univ., Montreal, Quebec, Canada, 1970.
  - 8) Silvester, P. and Chari, M.V.K., "Finite element solution of saturable magnetic field problems.", IEEE Trans., Vol. PAS-89, pp. 1642-1652., 1970.
  - 9) M.V.K. Chari, S.C. Tandon. E. Richter., "Studies of magnetic fields in electrical machines by means of finite element analysis.", Electric Machines and Electromechanics, vol. 6, No. 6, 297-306, 1981.
  - 10) Chari, M.V.K. "Finite element analysis of electrical machinery and devices.", IEEE Trans, Vo. Mag-16, No. 5, pp. 1014-1017, 1970.
  - 11) A.K. Ray., "Magnetic circuit design of saturated electrical machines by the finite element method.", IEEE Trans., Vol. PAS 100, No. 6, pp. 2936-2945, 1981.
  - 12) O.W. Anderson., "Iterative solution of finite element equations in magnetic field problems.", Conference paper., IEEE PES, C-72 425-7, 1972.
  - 13) Anderson, O.W., "Transformer leakage flux program based on the finite element method.", IEEE Trans., Vol. PAS 92, pp. 682-689, 1973.
  - 14) Silvester, P., Cabayan, H.S., and Brovne, B.T., "Efficient techniques for finite element analysis of electric machines.", IEEE Trans., Vol. PAS 92, pp. 1274-1281, 1973.
  - 15) Brauer, John R. and Smith, A.O., "Saturated magnetic energy functional for finite element analysis of electric machines.", Conference Paper C-75-151-6, IEEE PES., Winter Meeting, New York, Jan., 26-31, 1975.
  - 16) Demerdash, N.A. and Nehl, T.W., "Flexibility and economics of implementation of the finite element and difference techniques in nonlinear magnetic fields of power devices.", IEEE Trans., MAG-12. pp. 1036-1038, 1976.
  - 17) T.W. Nehr, F.A. Fouad, N.A. Demerdash, "Determination of saturated values of rotating machinery incremental and apparent inductances by an energy perturbation method.", IEEE Trans., Vol. PAS-101, No. 12, Dec. pp. 4441-4449, 1982.
  - 18) Hinton, Owen, "Finite Element Programming", Academic press, 1970.
  - 19) Bathe, "Finite element procedures in engineering analysis", prentice Hall, 1982.
  - 20) James., G.M. Smith, T.C. Wolford., "Applied numerical methods for digital computation with fortran and CSMP.", Second Edition, Harper and Row, 1977.
  - 21) Huebner, K.H., "The finite element method for engineers.", New York, John Wiley and Sons, 1975.
  - 22) Brice, Carnahan, Luther, Wilkes "Applied numerical methods.", John Wiley Sons, 1970.