

# 생체 관절에서 압착막 윤활의 구체적 가능성

유 형 선\*

=Abstract ...

## Some Evidence of Squeeze Film Lubrication in Biological Joints

Hyeong-Seon Yoo\*

A solution scheme for the squeeze film problem using the Newton-Raphson method with a tangential matrix is presented. The integration of elasticity equation is done with the aid of isoparametric elements and the film thickness under a sinusoidal load is obtained. A new squeeze-suction phenomenon which shows the possibility of maintaining fluid film under cyclic positive load conditions is observed for small load and period and large compliance parameter cases. This could be an interesting result in applications like the viscous hydroplaning and the biological joints.

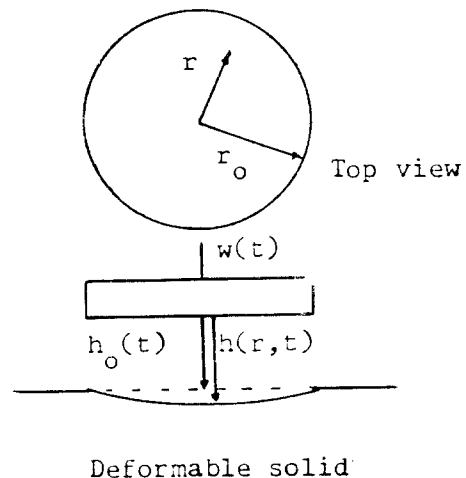
### 1. 서 론

생체관절의 문제는 1743년 관절의 기능에 대한 Sir William Hunter의 논문이래로 많이 연구되어 왔지만, 아직 관절의 윤활구조가 명백히 밝혀지지 않고있다<sup>1,2</sup>. 여러가지 윤활구조중 압착막 윤활형태는 생체관절에서의 가능성 뿐만 아니라 수막천상등의 다른 응용분야에 대한 활용성으로 인하여 최근 많이 논의되었다<sup>3-6</sup>.

위의 논문들은 해석적방법으로 원형의 비선형 방정식을 선형화하고 Newton법을 써서 수렴하는해를 구하는 해법<sup>7</sup>이 많이 사용되었다. 그러나 이 방법은 그 과정이 복잡하면 탄성방정식의 적분은 등제수 요소를 이용한 새로운 적분방법과, Newton-Raphson법을 사용한 새로운 해법을 쓰이고 압착막 윤활형태의 가능성을 보이는데 있다. 단 이논문에서 베어링의 재료는 선형 탄성으로 윤활유는 Newtonian으로 제한한다.

### 2. 해 석

먼저 그림 1과 같은 전형적인 압착막 형태를 고려하자. 원형의 강체판이 가변하중 하에서 얇은유막을 누르고 밑판은 탄성변형한다. 이 극좌표계의 Reynolds



Deformable solid

그림 1. 문제의 모형

Fig. 1. Problem geometry

<1985년 5월 20일 접수>

\* 인하대학교 공과대학 기계공학과  
 Dept. of Mechanical Eng., Inha University

방정식은

$$-\frac{d}{dr} \left( r h^3 \frac{dp}{dr} \right) = 12\mu \frac{dh}{dt} \quad (1)$$

식을 무차원화 하기 위하여 다음의 변수들을 사용하면, 식 (3)이 얻어진다.

$$r = R r_0 \quad (2)$$

$$h = H h_0(0) \quad t = T \frac{12\mu r_0^2}{p_{ref} h_0(0)^2}$$

$$p = P p_{ref} \quad \therefore \frac{d}{dR} \left( R H^3 \frac{dR}{dR} \right) = R \frac{dH}{dT} \quad (3)$$

경계, 대칭과 초기조건들은

$$P(1, T) = 0, \quad T \geq 0$$

$$\frac{dP}{dR}(0, T) = 0, \quad T \geq 0 \quad (4)$$

$$P(R, 0) = 0, \quad 0 \leq R \leq 1$$

유막두께는 윗판의 변위  $H_0(T)$ 와 밑판의 탄성변형 양의 합으로 나타낼수있다.

$$H(R, T) = H_0(T) + \text{SCALE} \int \frac{P(R, T)}{R'} d\Omega \quad (5)$$

여기서  $\text{SCALE} = \frac{1-\nu^2}{\pi E} \frac{P_{ref} r_0}{h_0(0)}$

$R' = H$ 와  $P$ 점 사이의 거리

외부조건으로 윗판의 변위, 속도 또는 적용하중을 규제할수 있으나, 여기에서는 가장 가능성이 큰 마지막 조건을 사용한다. 무차원 적용하중은

$$W(T) = \int_0^1 P(R, T) R dR \quad (6)$$

$$\text{여기서 } W = \frac{w}{2\pi p_{ref} r_0^2}$$

이제 문제는 비선형식 (3)~(6)을 푸는 것이 된다. 식 (3)의 오른쪽항은 보통 식 (7)과 같이 표현된다.

$$\frac{dH}{dT} = \frac{H(T) - H(T - \Delta T)}{\Delta T} \quad (7)$$

근사 압력분포는 다음 식 (8)과 같이 써질수 있으며,

$$P(R, T) \cong \sum_{i=1}^n P_i(T) N_i(R) \quad (8)$$

여기서  $P_i(T)$ ; 노드점  $i$ 의 압력  
 $n$ ; 노드수

식 (3)과 (4)에 Galerkin법을 적용하면 다음과같은 식을 얻을 수 있다<sup>9)</sup>.

$$KP + f = 0 \quad (9)$$

$$\text{여기서 } K_{ji} = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial N_i}{\partial R} (R H^3) \frac{\partial N_j}{\partial R} \right) d\Omega$$

$$f_j = \int_{\Omega} N_j \left( R \frac{dH}{dT} \right) d\Omega$$

식 (9)는 비선형이며 유막두께의 식 (6)과 같이 풀

다. 여기에서 Newton Raphson법을 이용하면, 먼저 식 (9)를 비선형 표현식으로 다시쓰고

$$\phi(P) = K(P)P + f(P) = 0 \quad (9')$$

이식의 미분형은

$$\frac{d\phi}{dP} dP = K dP + dK P + df \quad (10)$$

2, 3번째 항들은

$$dK P = A dP; \quad df = B dP \quad (11)$$

여기서  $A_{ji} = \int \nabla N_i^T (\nabla N P) N_j K' d\Omega$

$$B_{ji} = \int N_i^T Q' N_j d\Omega$$

$$K' = \frac{d}{dP} (R H_c) = 3R H^2 \frac{dH}{dP}$$

$$Q' = \frac{d}{dP} \left( R \frac{dH}{dT} \right) = -\frac{d}{dP} \left( R \frac{H(T) - H(T - \Delta T)}{\Delta T} \right)$$

$$= \frac{R}{\Delta T} \frac{dH}{dP}$$

$$\frac{dH}{dP} = \frac{d}{dP} \left( H_0(T) + \text{SCALE} \int \frac{P(R, T)}{R'} d\Omega \right)$$

$$= \text{SCALE} \int \frac{d\Omega}{R'}$$

위에서  $dH/dP$ 는 적분경계가  $P$ 의 함수가 아니므로 성립된다. 또 접선매트릭스  $d\phi/dP$ 는

$$\frac{d\phi}{dP} = K(P) + A + B \quad (12)$$

그 접선매트릭스를 사용하면

$$\left( \frac{d\phi}{dP} \right)^n (\Delta P^n) + (K(P) + f)^n = 0 \quad (13)$$

여기서  $\Delta P^n$ ; 압력증분 ( $= P^{n+1} - P^n$ )

$n$ ; 반복회수

이 반복과정은 다음조건에서 정지된다.

$$\left\| \sum \left( \frac{P^n}{P^n} \right)^2 \right\| \uparrow < \quad (14)$$

문제의 영역이 축대칭이므로 압력은 1차원 요소로 구해진다. 탄성식에 대해서는 보다 편리한 직각좌표계를 사용하며  $R'$ 값,  $H$ 와  $P$ 점의 거리, 은 다음 식 (15)와 같이 표현된다.

$$X = \sum X_k N_k, \quad Y = \sum Y_k N_k \quad (15)$$

$$R' = \sqrt{X^2 - Y^2} = \sqrt{(\sum Y_k N_k)^2 + (\sum X_k N_k)^2}$$

여기서  $k=1, 2, \dots$  (노드)

여기에서  $X$ 와  $Y$ 는 유막두께점을 원점으로한 무차원 직각좌표계이다. 탄성변형 부분은 Gauss quadrature을 써서

$$\text{SCALE} \int \frac{P(R, T)}{R'} d\Omega$$

$$= \text{SCALE} \sum_l \iint \frac{\sum P_k N_k}{R'} \det J d\xi d\eta \quad (16)$$

여기서  $l=1, 2, \dots$  (요소)

적분내의 값을 부호  $\phi(\xi, \eta)$ 로 나타내면

$$\phi(\xi, \eta) = \frac{\sum P_k N_k}{\sqrt{(\sum X_k N_k)^2 + (\sum Y_k N_k)^2}} \det J \quad (17)$$

따라서 유막두께의 식 (5)는

$$H = H_0 + \text{SCALE} \sum_i \sum_j (a_i a_j \phi(\xi_j, \eta_i)) \quad (18)$$

여기서  $i, j = 1, 2, \dots$  (Gauss order)

$a_i, a_j =$ 가중계수

앞의 식 (6), (13)과 (18)을 풀기 위하여 그림 2의 과정이 사용되었다.

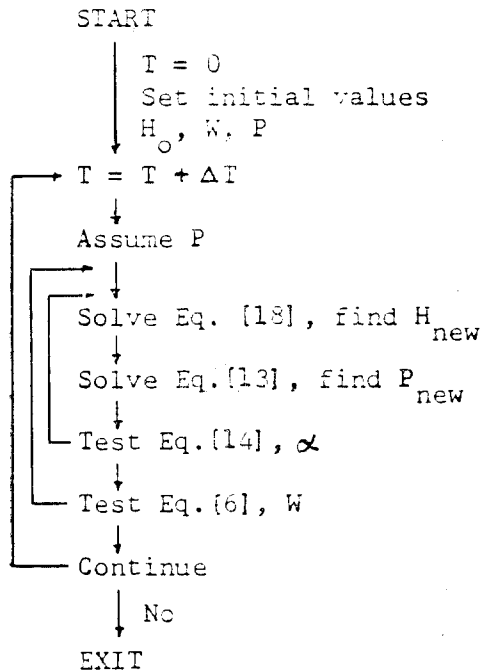


그림 2. 해석 과정  
Fig. 2. Solution procedure

### 3. 계산결과 및 고찰

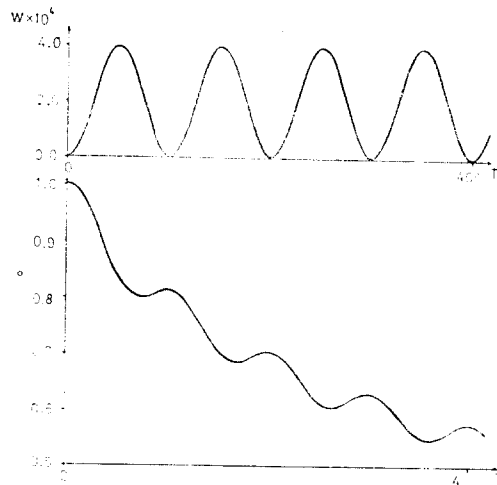
적용하중식은 다음과 같은 형태가 사용되었다.

$$W(T) = \frac{\alpha}{2} \left( 1 + \sin \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right) \right) \quad (19)$$

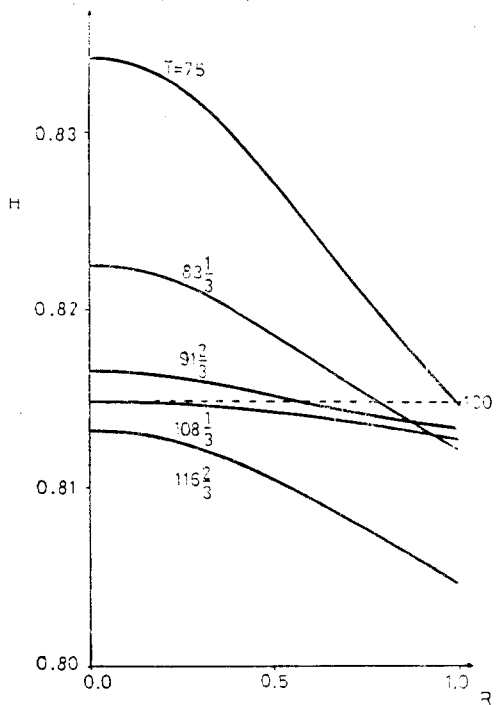
여기서  $\theta = \frac{2\pi}{\tau} T$

문제의 변수는 최대하중  $\alpha$ , 주기  $\tau$ 와 컴플라이언스 인자 SCALE이며, 위의 해법은 대부분의 경우 오차한계 0.0001에 대해서 2~4번 반복후 수렴되었다.

서로 다른 인자들에 따른 계산결과는 그림 3~6에 나타냈다. 그림 3은 적용하중  $W$ 와 전형적인 유막두께



(a) 시간 T에 따른 주기하중 W, 시간 T에 따른 유막두께 H  
(a) Sinusoidal load W versus time T. Film thickness  $H_0$  versus time T.  $\alpha = 0.0004$ ,  $\tau = 100$ , SCALE = 10



(b) 시간 T에 따른 유막두께 분포  
(b) Film thickness distribution as a function of time T.

그림 3.

Fig. 3.

분포를 시간에 따라 나타낸 것이다.  $\alpha$ , Z와 SCALE은

각각 0.0004, 10과 10으로 놓았다. 여기에서  $H_0$ 가 주기적으로 변화함에도 유막두께는 단조감소 됨을 알 수 있다. 그림 4에서 SCALE이 20(그림 3의 경우 보다 낮은 탄성계수인 경우)으로 변화 되었다. 적용하중 0.0001과 0.0004에 대응하는 2개의  $H_0$ 곡선은 그들이 하중조건에 직접 의존함을 알 수 있다.

그림 5는 주기 10, 컴플라이언스 인자 SCALE 30에 대해서 거의 주기적인  $H_0$ 를 보이고있다. 여기에서 우리는 그림 3과 같은 계속적인 압착대신에 매우 흥미로운 압착-흡입 현상을 볼 수 있다. 이 현상을 설명하기

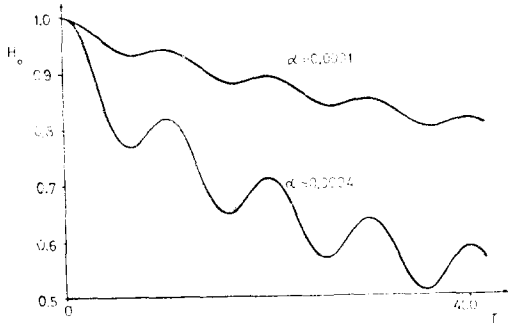
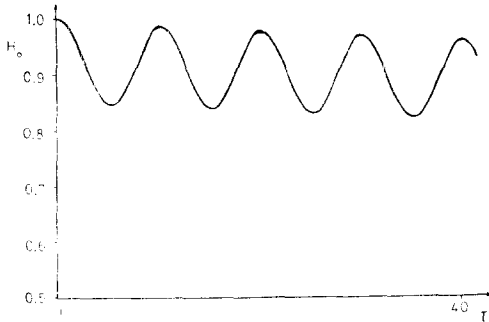


그림 4. 시간 T에 따른 유막두께  $H_0$   
Fig. 4. Film thickness  $H_0$  versus time T.  
 $\tau=100$ , SCALE=20



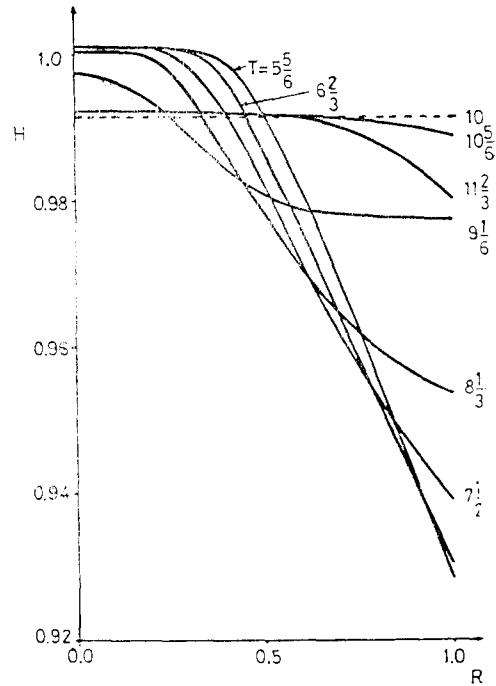
(a) 시간 T에 따른 유막두께  $H_0$   
(a) Film thickness  $H_0$  versus time T.  
 $\alpha=0.0004$ ,  $\alpha=10$ , SCALE=30

그림 5.  
Fig. 5.

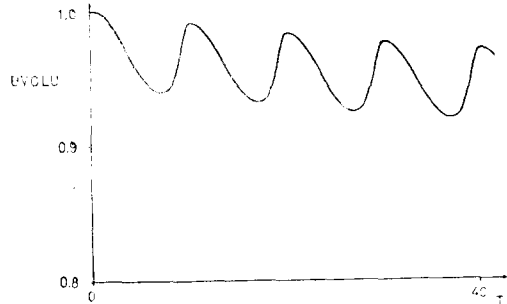
위하여 다음과 같은 베어링 체적이 정의 되었다.

$$\text{베어링체적} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} HR d\theta dR = 2\pi \int_0^1 HR dR \quad (20)$$

초기값을 1로 하기 위하여 실제로 사용된 체적은, 식 [20]  $\pi$ 로 나눈값이다. 그림 5.C에서 이값의 시간에 따



(b) 시간 T에 따른 유막두께 분포  
(b) Film thickness distribution as a function of time T

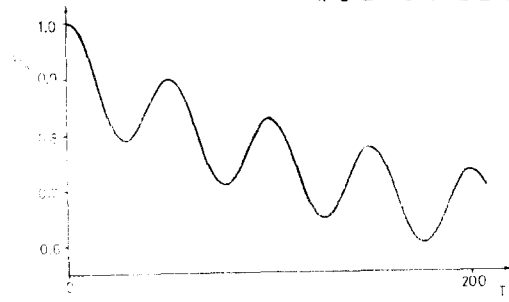


(c) 시간 T에 따른 교정베어링 체적  
(c) The modified bearing volume(BVOLU) versus time T

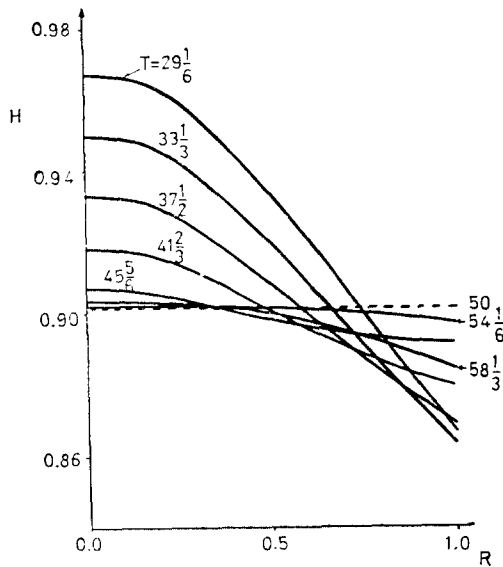
른 변화가 보이며 압착-흡입 현상이 뚜렷하다. 이상과 같은 결과로서 적은하중 및 주기, 큰 컴플라이언스 인자에 대해서 압착-흡입 현상이 강하게 나타남을 알 수 있다. 이것은 압착-흡입 현상이 주기적인 양의 한중하에서도 발생 가능함과 수막현상, 생체관절의 윤활증에 응용될 수 있음을 제시하는 것이다.

#### 4. 결 론

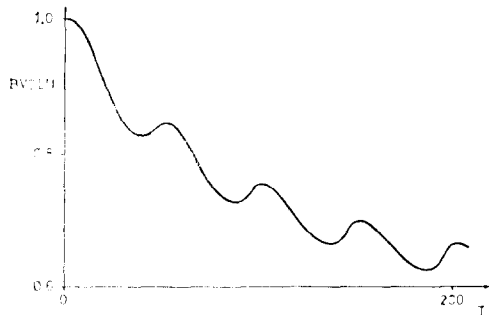
고도의 비선형 방정식에서 접선매트릭스를 구하고



(a) 시간  $T$ 에 따른 유막두께  $H_0$   
 (a) Film thickness  $H_0$  versus time  $T$   
 $\alpha=0.0004$ ,  $\tau=50$ , SCALE=30



(b) 시간  $T$ 에 따른 유막두께 분포  
 (b) Film thickness distribution as a function of time  $T$



(c) 시간  $T$ 에 따른 교정 베어링 체적  
 (c) The modified bearing volume(BVOLU) versus time  $T$

그림 6.  
 Fig 6.

Newton-Raphson법을 사용한 새로운 해법이 제시 되었다. 정현곡선으로 나타내는 하중이 연구되었으며 수렴이 빨리됨을 알수있었다. 탄성식의 적분이 등계수 요소를 사용하여 수행되었다.

전형적인 주기적 유막두께가 다른 논문에서와 같이 (3) 얻어졌으나 여기에서는 압착분포와 유막두께 분포를 동시에 연립시켜 풀기 때문에 유막두께의 변화도 나타내고 있다.

새로운 압착-흡입 현상이 적은 적용하중 및 주기, 큰 컴플라이언스 인자등의 경우에 관측되었으며 이 현상은 주기적인 양의하중 조건하에서도 유막을 유지할수있는 가능성을 제시하고있다. 따라서 압착막 윤활구조가 생체관절에서 중요한 역할을 수행할수 있음을 알수 있었다.

### 기 호

- $E$ : 탄성계수
- $h, H$ : 유막두께 ; 차원, 무차원
- $h_0, H_0$ : 무하중시 유막두께 ; 차원, 무차원
- $p, P$ : 압착 ; 차원, 무차원
- $P_{ref}$ : 기준압력
- $N_i$ : 형상합수
- $r, R$ : 반경방향 좌표 ; 차원, 무차원
- $r_0$ : 판의 반경
- $t, T$ : 시간 ; 차원, 무차원
- $w, W$ : 하중 ; 차원, 무차원
- $X, Y$ : 무차원 직각좌표계
- $\alpha$ : 무차원 최대하중
- $\Delta T$ : 무차원 시간증분
- $\epsilon$ : 오차한계
- $\nu$ : Poisson 비
- $\xi, \eta$ : 자연좌표계
- $\theta$ : 각좌표
- $\tau$ : 무차원 주기
- $\mu$ : 점성계수
- $\Omega$ : 적분영역
- SCALE : 컴플라이언스 인자

### 참 고 문 헌

- 1) Higginson, G.R. and Unsworth, T.: "The Lubrication of Natural Joints," *Tribology of Natural and Artificial Joints*, ed. Dumbleton.

- J.H., Elsevier, 1981, pp. 47~73.*
- 2) Higginson, G.R.: "Squeeze Films between Compliant Solids," *Wear, Vol. 46, 1978, pp. 387~395.*
  - 3) Rohde, S.M., Whicker, D. and Browne, A.L.: "Dynamic Analysis of Elastohydro-dynamic Squeeze Films," *J. Lubr. Technol., Vol. 98, 1976, pp.401~408.*
  - 4) Rohde, S.M., Whicker, D. and Booker, J.F.: "Elastohydrodynamic Squeeze Films; Effects of Viscoelasticity and Fluctuating Load," *J. Lubr. Technol., Vol. 101, 1979, pp. 74~80.*
  - 5) Higginson, G.R.: "Elastohydrodynamic Lubrication in Human Joints," *Proc. Instn. Mech. Engrs., Vol. 191, 33'77, 1977, pp.217~223.*
  - 6) Gore, T.A., Higginson, G.R. and Kornberg, R.E.: "Some Evidence of Squeeze Film Lubrication in Hip Prostheses," *Engineering in Medicine, Vol. 10, 2, 1981, pp.89~95.*
  - 7) Rohde, S.M. and Oh, K.P.: "A Unified Treatment of Thick and Thin Film Elastohydrodynamic Problems by Using Higher Order Element Method," *Proc. R. Soc., London, Series A, Vol. 343, 1975, pp. 315~331.*
  - 8) Zienkiewicz, O.C.: "The Finite Element Method, 3rd ed., McGraw-Hill Book Co., 1977.